Fourier-transzformáció a Schwartz-téren

Dr. Keresztes Zoltán, egyetemi docens
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék,
Tisza Lajos krt. 84-86, Szeged 6720
E-mail: zkeresztes@titan.physx.u-szeged.hu

Olvasási idő kb. 60 perc. Formai szempontból lektorálta: Dr. Majorosi Szilárd

I. A SCHWARTZ-TÉR

Definíció (Schwartz-tér): Jelölje $S(\mathbb{R}^n)$ az n-dimenziós Euklideszi téren értelmezett "gyorsan lecsengő", C^∞ komplex értékű függvények halmazát. E halmaz a függvények szokásos pontonkénti összeadásával és skalárral szorzással vektorteret alkot, amelyet Schwartz-térnek nevezünk. A definícióban a gyors lecsengés azt jelenti, hogy $\forall\alpha_i$, $\beta_j \in \mathbb{N}$-re $\exists M_{\alpha,\beta}$ véges szám, amelyre

$$\left|x^\alpha D^\beta \varphi\right| \leq M_{\alpha,\beta} \tag{1}$$

a teljes $\mathbb{R}^n$-en. Itt α és β multi-indexek: $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, .., \beta_n)$, továbbá

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}..x_n^{\alpha_n} \ , \tag{2}$$

és

$$D^\beta \varphi \equiv \frac{\partial^{\beta_1+..+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1}..\partial x_n^{\beta_n}} \varphi(\mathbf{x}) \ . \tag{3}$$

A gyors lecsengés alternatív megfogalmazás szerint azt jelenti, hogy

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi\right| < \infty \ . \tag{4}$$

Definíció (konvergencia): Egy $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^n)$ függvénysorozat tart a $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvényhez a Schwartz-térben, ha $\forall\alpha$, β-ra

$$\left|x^\alpha D^\beta \varphi_k - x^\alpha D^\beta \varphi\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{5}$$

egyenletesen a teljes $\mathbb{R}^n$-ben.

A fenti definíció alapján egy $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény és deriváltjai bármilyen $|\mathbf{x}|$ hatványnál gyorsabban tűnnek el a ∞-ben. Hiszen, ha $\left|x^\alpha D^\beta \varphi\right| < M_{\alpha,\beta}$, akkor lehet találni olyan M_β számot amire $\left|P(x_1, .., x_n) D^\beta \varphi\right| < M_\beta$, ahol $P(x_1, .., x_n)$ egy tetszőleges polinomja az $x_1, .., x_n$ változóknak, pl.: $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^8 + x_3^6 x_1$. Polinomként válasszuk a $P(x_1, .., x_n) = \left(|\mathbf{x}|^2\right)^{P+1}$-et, ahol $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + .. + x_n^2$ és $P \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\left|\left(|\mathbf{x}|^2\right)^{P+1} D^\beta \varphi\right| \leq M_{\beta,P+1} \Rightarrow \left(|\mathbf{x}|^2\right)^P \left|D^\beta \varphi\right| \underset{|\mathbf{x}|^2\to\infty}{\to} 0 \ . \tag{6}$$

- ***Példák:***

1) $P(x_1, .., x_n) e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$, ahol $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + .. + x_n^2$. Megjegyezzük, hogy $\left|x^\alpha D^\beta \varphi\right| = |x^\alpha| \left|D^\beta \varphi\right| \leq r^N \left|D^\beta \varphi\right|$, ahol $N = \alpha_1 + .. + \alpha_n$ és $r = |\mathbf{x}|$. A $P(x_1, .., x_n) e^{-|\mathbf{x}|^2}$ függvény tetszőleges változója szerinti bárhanyadik deriváltja is $P'(x_1, .., x_n) e^{-|\mathbf{x}|^2}$ alakú lesz, ahol $P'(x_1, .., x_n)$ szintén a változóinak egy

polinomja. Egy polinom pedig felülről becsülhető egy $C\left(1+r^d\right)$ kifejezéssel, ahol C egy alkalmas véges szám és d nagyobb mint a polinomban az $x_1 = x_2 = ... = x_n$ esetén megjelenő legmagasabb kitevő. Így esetünkben azt kapjuk, hogy

$$\left|x^\alpha D^\beta \varphi\right| \leq C\left(1+r^d\right) e^{-r^2} \ . \tag{7}$$

Mivel a jobboldalon folytonos, véges $r \in (a,b)$ intervallumon korlátos függvények és azok szorzata áll, így elegendő belátni azt, hogy a jobboldali kifejezés a nullához tart $r \to \infty$-re. A L'Hospital szabály ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy $\lim_{r\to\infty} r^k/e^{r^2} = 0$ tetszőleges véges k-ra. Ezért következik, hogy $P(x_1, .., x_n)\, e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$.

2) Az

$$f = \frac{1}{\left(1+r^2\right)^k} \notin S(\mathbb{R}^n) \ , \tag{8}$$

ahol k tetszőleges. Ez látható abból, hogy $r^{2k} f$ nem tart nullához az $r \to \infty$-re.

3) Az

$$f = e^{-r^2} \sin\left(e^{r^2}\right) \notin S(\mathbb{R}^n) \ . \tag{9}$$

Pl.:

$$\partial_1 f = -2x_1 e^{-r^2} \sin\left(e^{r^2}\right) + 2x_1 \cos\left(e^{r^2}\right) \ , \tag{10}$$

ahol a második tag nem tart zérushoz a térbeli végtelenben.

Az $S(\mathbb{R}^n)$ ∞-dimenziós komplex vektorteret alkot a pontonkénti összeadás és skalárral szorzás definíciókkal: $(\varphi_1 + \varphi_2)(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x})$ és $(z\varphi)(\mathbf{x}) = z\varphi(\mathbf{x})$, ahol $z \in \mathbb{C}$.

A Schwartz-tér fontos tulajdonsága, hogy bármely $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény és annak deriváltjainak integrálja korlátos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} \left|D^\beta \varphi\right| < \infty \ , \ (n \geq 1) \ . \tag{11}$$

Ez a következőképpen mutatható meg. Egyrészt $d^n\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^{n-1} dr d\Omega^{n-1} = r^{n-1} dr d\Omega^{n-1}$, ahol $r = |\mathbf{x}|$, másfelől létezik K_β, amelyre $\left|D^\beta\varphi\right| \leq K_\beta/\left(1+r^n\right)^2$. Ezért

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} \left|D^\beta\varphi\right| &= \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} \int_0^\infty dr r^{n-1} \left|D^\beta\varphi\right| \leq \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} \int_0^\infty dr \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^n\right)^2} \\ &= -\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} \left[\frac{1}{1+r^n}\right]_0^\infty = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} < \infty \ .\end{aligned} \tag{12}$$

II. FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

Definíció: Egy $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \ , \tag{13}$$

ahol $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1 x_1 + .. + k_n x_n$.

Az integrál értéke minden esetben véges, hiszen

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\left|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right)\right| = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\left|\varphi\left(\mathbf{x}\right)\right| < \infty \ . \tag{14}$$

Ez ugyanígy teljesül a φ deriváltjainak a Fourier-traszformáltjaira.

A Fourier-traszformáció **folytonos leképezés**t valósít meg. A *Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel* értelmében, ha φ_n az integrálható függvényeknek egy olyan sorozata, amely null mértékű halmaztól eltekintve pontonként konvergál egy φ függvényhez

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \varphi \ , \tag{15}$$

és létezik egy integrálható h függvény, amelyre $|\varphi_n| \leq h$, ekkor φ integrálható és a φ_n integráljaiból álló sorozat konvergál a φ integráljához:

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n = \int\varphi \ . \tag{16}$$

Mivel a Schwartz-térbeli konvergencia erősebb a függvények pontonkénti konvergenciájánál és $\left|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right| = 1$, ezért a Fourier-transzformáció folytonossága következik.

A Fourier-transzformált **folytonosan deriválható**. Tekintsük a Fourier-traszformáltnak a $\mathbf{k}$ hullámszám vektor i-edik komponense szerinti parciális deriváltját:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k_i}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right) &= \lim_{k_i^*\to k_i}\frac{1}{k_i^*-k_i}\left[\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right) - \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right)\right] \\ &= \lim_{k_i^*\to k_i}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\frac{e^{-i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{x}}-e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k_i^*-k_i}\varphi\left(\mathbf{x}\right) \ .\end{aligned} \tag{17}$$

A jobboldali integrandusra teljesül, hogy

$$\lim_{k_i^*\to k_i}\frac{e^{-i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{x}}-e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k_i^*-k_i}\varphi\left(\mathbf{x}\right) = \frac{\partial}{\partial k_i}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right) = -ix_ie^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right) \ , \tag{18}$$

ami egy folytonos függvény. Ezért, illetve a Schwartz-térbeli függvények tulajdonságai miatt a baloldali sorozat tagjai eleget tesznek a Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel feltételeinek. Ami azt jelenti, hogy a hullámszám vektor komponensei szerinti parciális deriválás felcserélhető az integrálással, vagyis

$$\frac{\partial}{\partial k_i}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi\left(\mathbf{x}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\varphi\left(\mathbf{x}\right)\frac{\partial e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\partial k_i} = -i\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}x_i\varphi\left(\mathbf{x}\right) \ . \tag{19}$$

Ez bárhanyadik parciális deriváltra teljesül. Mivel a $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ függvény tetszőleges $x_i^{\alpha_i}$ hatványokkal való szozata is a Schwartz-tér eleme, ezért egy Schwartz-tébeli elem Fourier-transzformáltjának hullámszámvektor komponensei szerinti deriváltak is megfelelnek egy Schwartz-térbeli függvény Fourier-transzformáltjának. Az utóbbiról beláttuk, hogy folytonos. Ezért a Fourier-traszformáció a végtelenszer folytonosan differenciálható függvényekből a végtelenszer folytonosan differenciálható függvények körébe létesít leképezést.

A. A Fourier-transzformáció tulajdonságai

A Fourier-transzformáció az integrálás tulajdonságai miatt **lineáris leképezés**, vagyis $z_i \in \mathbb{C}$, és $\varphi_i \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ esetén teljesül, hogy

$$\mathcal{F}\left(z_1\varphi_1 + z_2\varphi_2\right) = z_1\mathcal{F}\left(\varphi_1\right) + z_2\mathcal{F}\left(\varphi_2\right) \ . \tag{20}$$

Az eltolt függvény Fourier-transzformáltja: Az eltolás definíció szerint tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$-re:

$$(T_a\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \ , \tag{21}$$

ahol $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Ekkor

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(T_a\varphi))(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{a})}\varphi(\mathbf{y}) \\ &= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y})}\varphi(\mathbf{y}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) \ .\end{aligned} \tag{22}$$

Így

$$\mathcal{F}T_a = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\mathcal{F} \ . \tag{23}$$

Tehát az eltolás hatása a Fourier-transzformáltra:

$$T_a(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}-\mathbf{a}) \ . \tag{24}$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$T_a\mathcal{F} = \mathcal{F}e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}} \ . \tag{25}$$

A derivált függvény Fourier-transzformáltja: A parciális deriválásra az alábbi jelölést vezetjük be

$$\partial_j\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \ , \tag{26}$$

ahol $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Így

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\partial_j\varphi)(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_j\varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d^n\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d^{n-1}\mathbf{x}\right]_{x^j=-\infty}^{x^j=\infty} - \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\partial_j e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d^n\mathbf{x} \\ &= \frac{ik_j}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d^n\mathbf{x} = ik_j(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) \ ,\end{aligned} \tag{27}$$

ahol felhasználtuk hogy a Schwartz-tér elemei a ∞-ben gyorsan lecsengenek. Ezért

$$\mathcal{F}\partial_j = ik_j\mathcal{F} \ . \tag{28}$$

Bevezetve a

$$\partial_j(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) \equiv \frac{\partial}{\partial k_j}(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) \tag{29}$$

jelölést szintén bizonyítható, hogy

$$\partial_j\mathcal{F} = -i\mathcal{F}x_j \ . \tag{30}$$

Továbbá

$$\mathcal{F}\partial_j\partial_i = (ik_i)(ik_j)\mathcal{F} \ , \ \partial_i\partial_j\mathcal{F} = i^2\mathcal{F}x_ix_j \ . \tag{31}$$

A fentiekből tetszőleges polinomiális alakra következik, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{F}P(\partial_1,..,\partial_n) &= P(ik_1,..,ik_n)\mathcal{F} \ , \\ P(i\partial_1,..,i\partial_n)\mathcal{F} &= \mathcal{F}P(x_1,..,x_n) \ .\end{aligned} \tag{32}$$

Példa polinomiális alakú deriváló operátorra:

$$P(\partial_1,\partial_2,\partial_3) = \partial_1^2 + \partial_1\partial_2^3 + \partial_3 \ . \tag{33}$$

A függvények konvolúciójának Fourier-transzformáltja: Emlékeztetőként a konvolúció

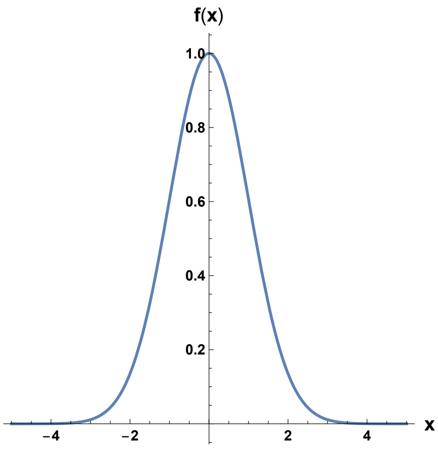
$$(\varphi * \psi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y})\, \psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^n\mathbf{y} \ , \tag{34}$$

ahol jelen esetben φ és $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. A Fourier-transzformáció definíciójából:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\mathcal{F}(\varphi * \psi))(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y})\, \psi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y})\, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}} (\mathcal{F}\psi)(\mathbf{k}) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k})\, (\mathcal{F}\psi)(\mathbf{k}) \ .
\end{aligned} \tag{35}$$

B. Példák

1) Keressük a Gauss-függvény (lásd 1. ábra)



1. ábra. A Gauss-függvény az 1-es példához.

$$\varphi(\mathbf{x}) = e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}}$$

Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{k}|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}+i\mathbf{k})^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^2} = e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{2}},
\end{aligned} \tag{36}$$

ahol felhasználtuk az

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{x}+i\mathbf{k})^2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}+i\mathbf{k})(\mathbf{x}+i\mathbf{k}) = -\frac{1}{2}\left[|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{k}|^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{x}\right] = -\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{k}|^2 - i\mathbf{k}\mathbf{x} \ , \tag{37}$$

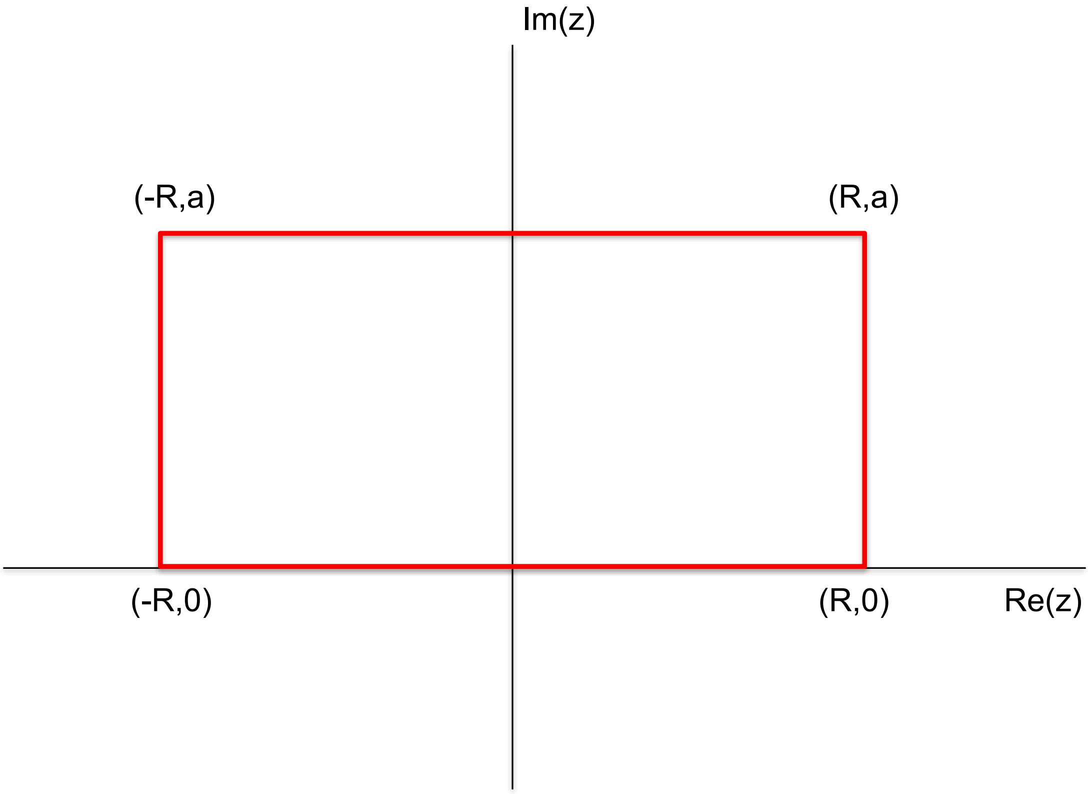
átalakítást, alkalmaztuk az

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + i\mathbf{k} \tag{38}$$

változó cserét és az integrál táblázatból a

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^2} = (2\pi)^{n/2} \tag{39}$$

formulát. **Megjegyzés**: A fenti számolásban egy olyan változó cserét alkalmaztunk ((38) kifejezés), amikor az integrálás során a valós térről egy komplex térre tértünk át. Részletezzük az integrálási változó cserét 1-dimenzióban, az általánosítás több dimenzióra az exponenciális függvény tulajdonságai miatt könnyen látható. Tehát 1 változó esetén az



2. ábra. Integrálási út a komplex számsíkon az 1-es példához.

$$z = x + ik \tag{40}$$

változó cserével kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} = \int_{-\infty+ik}^{\infty+ik} dz e^{-\frac{1}{2}z^2} \ . \tag{41}$$

Használjuk fel a Cauchy-integrál tételt, amelynek alapján

$$\oint_C dz e^{-\frac{1}{2}z^2} = 0 \ , \tag{42}$$

ha C egy zárt görbe, ami egy egyszeresen összefüggő tartományt határol, hiszen az integrandusban egy holomorf függvény szerepel. Legyen C egy téglalap, amelynek végpontjai a komplex számsíkon: $(-R,0)$, $(R,0)$, (R,a), $(-R,a)$ (lásd 2 ábrát). Tekintsük az integrál kifejezését a képzetes tengellyel párhuzamos szakaszon, amit az $(R,0)$, (R,a) pontok határolnak. Felhasználva, hogy $z = R + is$, alakú ezen a szakaszon, és a képzetes rész szerint kell integrálni ($dz = ids$) kapjuk, hogy e szakaszon:

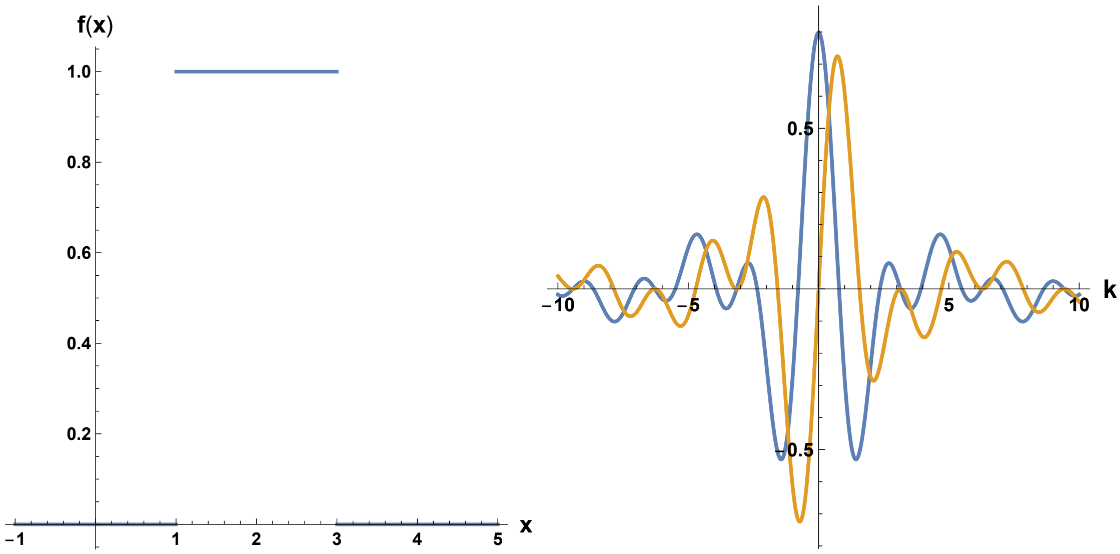
$$i \int_0^a ds e^{-\frac{1}{2}(R+is)^2} = ie^{-\frac{1}{2}R^2} \int_0^a ds e^{\frac{1}{2}s^2 - iRs} \ . \tag{43}$$

A $(-R,a)$ és $(-R,0)$ pontok közötti szakaszon az integrál hasonló alakú. Ha $R \to \infty$, akkor e szakaszokon az integrál értéke a nullához konvergál. Ezért $R \to \infty$-re a $(-R,0)$, $(R,0)$ szakaszon (a téglalap alsó, valós számegyenesen fekvő szakaszán) az integrál éppen megegyezik az $(-R,a)$, (R,a) szakaszon vettel. Így

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} = \int_{-\infty+ik}^{\infty+ik} dz e^{-\frac{1}{2}z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{1}{2}z^2} \ , \tag{44}$$

amit fentebb alkalmaztunk.

2) A négyszög-függvény:



3. ábra. Baloldalon a négyszög-függvény a 2-es példához $A = 1$ és $B = 3$ paraméter választással. A Jobboldalon pedig a függvény Fourier-transzformáltjának valós (kék) és képzetes (narancs) részei láthatók.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & A \le x \le B \\ 0 \ , & egyébként \end{cases} \tag{45}$$

(lásd 3. ábra baloldalát $A = 1$ és $B = 3$-ra). A Fourier-transzformált:

$$\widetilde{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{B} dx e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_A^B = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}ik} \left(e^{-ikB} - e^{-ikA} \right) \ . \tag{46}$$

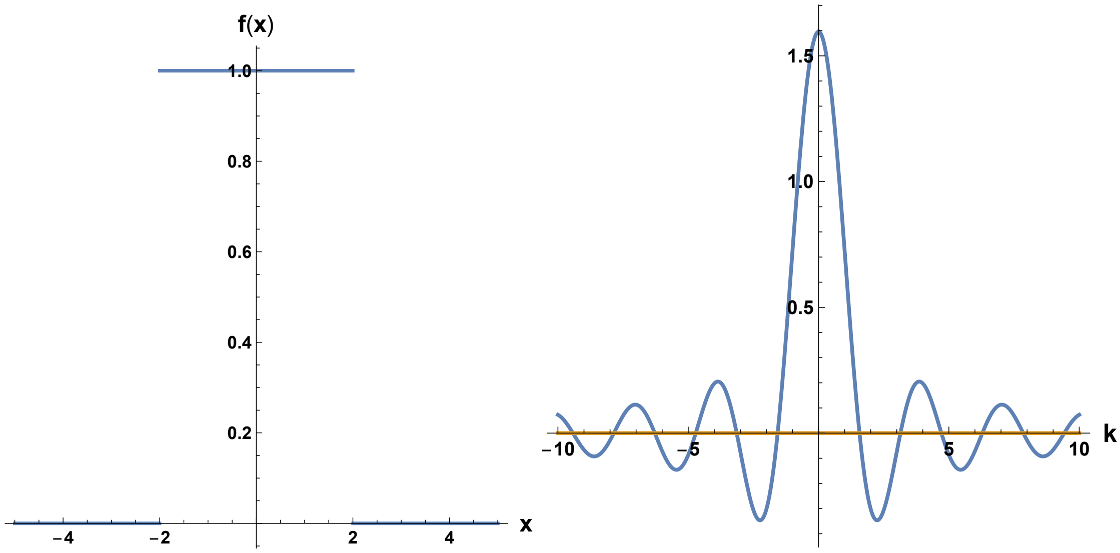
A 3. ábra jobboldala mutatja a Fourier-transzformált valós és képzetes részeit $A = 1$ és $B = 3$ esetén. Ha $A = -T$ és $B = T$:

$$\widetilde{f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}ik} \left(e^{-ikT} - e^{ikT} \right) = \frac{2 \sin kT}{\sqrt{2\pi}k} \ . \tag{47}$$

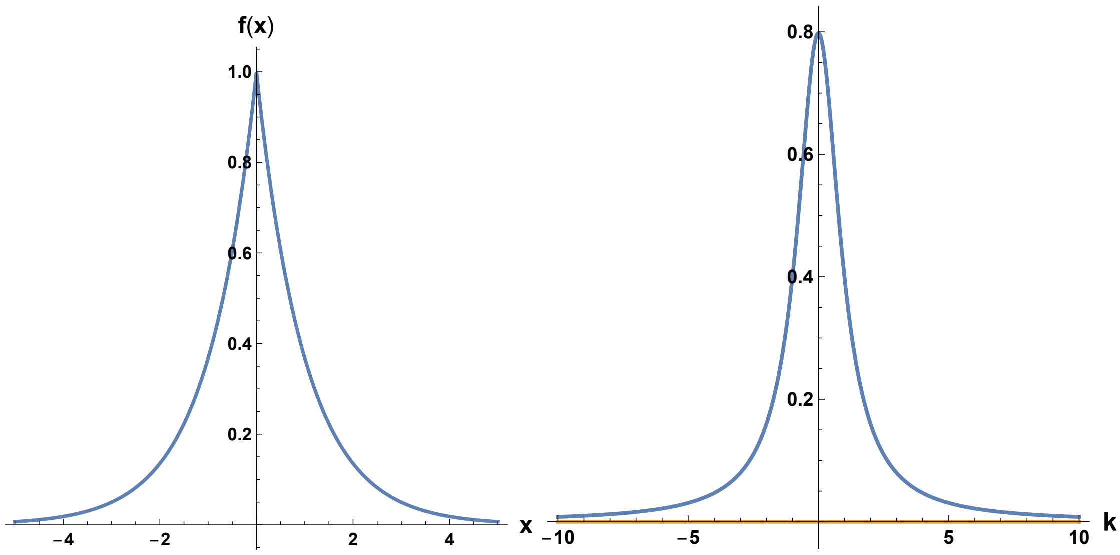
Ekkor az eredeti függvényt és Fourier-transzformáltját a 4. ábra mutatja $T = 2$-vel.

3) Az

$$f(x) = e^{-a|x|} \ , \ (a > 0) \tag{48}$$



4. ábra. Baloldalon a négyszög-függvény a 2-es példához $A = -T = -2$ és $B = T = 2$ paraméter választással. A Jobboldalon pedig a függvény Fourier-transzformáltjának valós (kék) és képzetes (narancs) részei láthatók.



5. ábra. Baloldalon az $f(x) = e^{-|x|}$ függvény. A Jobboldalon pedig a függvény Fourier-transzformáltjának valós (kék) és képzetes (narancs) részei láthatók.

függvény Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}
\widetilde{e^{-a|x|}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-a|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} dx e^{-ikx} e^{ax} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-ax} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} dx e^{(a-ik)x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dx e^{-(a+ik)x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+k^2} \ . \qquad (49)
\end{aligned}$$

Az eredeti függvényt és Fourier-transzformáltját a 5 ábra mutatja $a = 1$-el.

III. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK-FELADATOK

1. Mondjon egy olyan komplex értékű függvényt amely eleme a Schwartz-térnek, illetve egy olyat, amely nem eleme annak.
2. A $\sin x$ függvény eleme e a Schwartz-térnek?
3. Az (22) formula bizonyításának analógiájával mutassa meg (25) kifejezés teljesülését.
4. A (28) formula bizonyításának analógiájával mutassa meg (30) és (31) kifejezések teljesülését.
5. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & |x| > A \\ \cos x\ , & -A \le x \le A \end{cases} \tag{50}$$

   függvény Fourier-transzformáltját. Sematikusan rajzolja fel mind az $f(x)$ függvényt és annak Fourier-transzformáltját.

IV. REFERENCIÁK

Az alábbi referenciák segítik az órai tananyag mélyebb szintű megértését, illetve továbblépési lehetőséget kínálnak a témakörben:

[1] Bartha F., *Óravázlatok a Matematikai Módszerek a Fizikában 2. előadásokhoz I. rész: Disztribúcióelmélet* (2003). http://www.staff.u-szeged.hu/~barthaf/1resz.pdf

[2] J. Kirkwood, *Mathematical Physics with Partial Differential Equation*, Academic Press, Elsevier, Second Edition (2018).

[3] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Distributions: Theory and Applications*, Springer (2010).

[4] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Second Edition (1991).

[5] J. K. Hunter, B. Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific (2001).

[6] H. Abels, *Pseudodifferential and Singular Integral Operators, An Introduction with Applications*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG (2012).

JELEN TANANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT,
AZ EURÓPAI ÚNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKTAZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.

A Fourier-inverz tétel, mérsékelt disztribúciók és Fourier-transzformációjuk

Dr. Keresztes Zoltán, egyetemi docens
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék,
Tisza Lajos krt. 84-86, Szeged 6720
E-mail: zkeresztes@titan.physx.u-szeged.hu

Olvasási idő kb. 60 perc. Formai szempontból lektorálta: Dr. Majorosi Szilárd

I. A FOURIER-INVERZ TÉTEL

Állítás: Ha $\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{F}\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Bizonyítás: Az előző olvasóleckében már beláttuk, hogy $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty$. Ezért elegendő bizonyítani azt, hogy létezik olyan véges $M_{\alpha,\beta}$, amire

$$\left|k^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi\right| \leq M_{\alpha,\beta} \ . \tag{1}$$

Itt α és β multi-indexek, amelyek a D^β jelöléssel együtt az előző olvasóleckében lettek bevezetve. Azonban a parciális deriválások D^β-ban most a $\mathbf{k}$ komponensei szerint történnek. Mivel

$$k^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi = i^P \mathcal{F} D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right) \ , \tag{2}$$

ahol $P = \alpha_1 + .. + \alpha_n + \beta_1 + .. + \beta_n$, ezért

$$\left|k^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi\right| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{kx}} D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right) d^n\mathbf{x} \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right)\right| d^n\mathbf{x} < \infty \ . \tag{3}$$

Az utolsó relációnál felhasználtuk, hogy $D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right) \in S(\mathbb{R}^n)$.

Tétel: A Fourier-traszformáció invertálható és az inverz leképezés:

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}) \ , \tag{4}$$

ahol $\varphi(\mathbf{k}) \in S(\mathbb{R}^n)$. A tétel állítása tehát:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi \ . \tag{5}$$

Megjegyzés: Erről a leképezésről belátható, hogy olyan $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ leképezés, ami folytonos és lineáris. A bizonyítás egyszerű analógja annak a bizonyításnak, amit a Fourier-traszformáció esetén az előző olvasóleckében láttunk. **Következmény**: A Fourier-transzformáció az $S(\mathbb{R}^n)$-t egy-egy értelmű módon képezi önmagára.

A tétel bizonyítása: Fel fogjuk használni a következő mellékszámolást:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{kx}} e^{-\varepsilon\frac{|\mathbf{k}|^2}{2}} &= e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right)^2} \\ &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k}' e^{-\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{k}'^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2\varepsilon}} \ , \end{aligned} \tag{6}$$

ahol az alábbi átalakítást

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right)^2 = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right)\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right) = -\frac{\varepsilon}{2}\left[\mathbf{k}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{x}^2 - \frac{2i}{\varepsilon}\mathbf{kx}\right] = -\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{k}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\mathbf{x}^2 + i\mathbf{kx} \ , \tag{7}$$

és a $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - i\mathbf{x}/\varepsilon$ változó cserét alkalmaztuk. Számoljuk a következő határértéket

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\right)(\mathbf{x}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-\varepsilon\frac{\mathbf{k}^2}{2}} (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-\varepsilon\frac{\mathbf{k}^2}{2}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-\varepsilon\frac{\mathbf{k}^2}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{h} \varphi\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{h}+\mathbf{x}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} \ , \end{aligned}$$

ahol a harmadik sor elején a $\mathbf{h} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) / \sqrt{\varepsilon}$ változó cserét hajtottunk végre. Most alkalmazzuk a *Lebesgue-féle dominált konvergencia tételt* az

$$f_\varepsilon(\mathbf{h}) = \varphi\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{h} + \mathbf{x}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} \tag{8}$$

függvény sorozatra. A sorozat teljesíti, hogy

$$\left|\varphi\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{h} + \mathbf{x}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2}\right| \leq C e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} \ , \tag{9}$$

ahol

$$C = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) < \infty \ . \tag{10}$$

Így kapjuk, hogy

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\right)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{h} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} = \varphi(\mathbf{x}) \ , \tag{11}$$

ami a tétel állítása volt.

Vezessük be a következő skaláris szorzatot:

$$(\psi, \varphi) = \langle \psi, \varphi^* \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \varphi^*(\mathbf{x}) \ . \tag{12}$$

Ekkor

$$(\mathcal{F}\varphi)^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi^*(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi^*\right)(\mathbf{k}) \ ,$$

így

$$(\mathcal{F}\psi, \mathcal{F}\varphi) = \left\langle \mathcal{F}\psi, (\mathcal{F}\varphi)^* \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\psi, \mathcal{F}^{-1}\varphi^* \right\rangle = \langle \psi, \varphi^* \rangle = (\psi, \varphi) \ . \tag{13}$$

Ez az úgynevezett **Parseval-formula**.

II. A MÉRSÉKELT DISZTRIBÚCIÓK ÉS FOURIER-TRANSZFORMÁLTJUK

Definíció (mérsékelt disztribúció): A Schwartz-tér folytonos lineáris funkcionáljait **mérsékelt disztribúciók**nak nevezzük, amelyek a szokásos összeadás és skalárral szorzás szabállyal vektorteret alkotnak. A mérsékelt disztribúciók terét $S'(\mathbb{R}^n)$ jelöli. Azt a számot amit egy f disztribúció hozzárendel egy Schwartz-térbeli függvényhez $f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$-vel jelöljük. Azokat a disztribúciókat, amelyek az összes $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvényhez ugyanazt a számot rendelik egyenlőknek tekintjük.

Tegyük fel, hogy f egy olyan Lebesgue-mérhető függvény, amelyre

$$|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)^{d/2} \tag{14}$$

teljesül $\mathbb{R}^n$-ben egy nemnegatív egész $d \geq 0$-val és egy nemnegatív, integrálható $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénnyel. Ekkor belátható, hogy

$$f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle = \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} \ , \tag{15}$$

ahol az integrálás a teljes $\mathbb{R}^n$-en történik, egy mérsékelt disztribúciót definiál. Az ilyen alakban megadható disztribúciókat *reguláris disztribúciók*nak nevezzük. A nemreguláris disztribúciókat pedig *szinguláris disztribúciók*nak hívjuk. Tipikus szinguláris disztribúció a Dirac-δ, amelynek definíciója:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \ . \tag{16}$$

Illetve általánosabban

$$\langle \delta_{\mathbf{y}}, \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{y}) \ , \tag{17}$$

ahol a

$$\delta_{\mathbf{0}} = \delta \tag{18}$$

jelölés azonosítással éltünk.

Történeti okokból, illetve számítások során áttekinthetőség miatt hasznos bevezetni az alábbi **jelölések**et egy tetszőleges f disztribúció hatásának kifejezésére:

$$f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle \equiv \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} \ . \tag{19}$$

Ez reguláris diszutribúciók esetén egyszerűen az f disztribúciónak az $f(\mathbf{x})$ Lebesgue-mérhető (közönséges) függvénnyel történő azonosítását jelenti. Szinguláris disztribúciók esetén az integrál kifejezésben megjelenő $f(\mathbf{x})$-et *általánosított függvény*nek, vagy *szimbolikus függvény*nek nevezzük. Az integrál értékét ez esetben a baloldali $\langle f, \varphi \rangle$ definiálja.

Jelölje $\tau_{\mathbf{h}} f$ egy közönséges függvény $\mathbf{h}$-val való eltoltját:

$$\tau_{\mathbf{h}} f = f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) \ . \tag{20}$$

Ekkor reguláris disztribúciókra

$$\begin{aligned} \langle \tau_{\mathbf{h}} f, \varphi \rangle &= \int \tau_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) \varphi(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y} + \mathbf{h}) d^n\mathbf{y} = \langle f, \tau_{-\mathbf{h}} \varphi \rangle \ . \end{aligned} \tag{21}$$

A (16)-(18) egyenletek alapján világos, hogy

$$\delta_{\mathbf{y}} = \tau_{-\mathbf{y}} \delta \ , \tag{22}$$

ezért

$$\langle \delta_{\mathbf{y}}, \varphi \rangle = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} \ . \tag{23}$$

A. Mérsékelt disztribúciók deriváltja

Egyszerűség kedvéért tekintsük az $n = 1$ esetet, vagyis az $S(\mathbb{R})$ és $S'(\mathbb{R})$ tereket. A deriváltat vesszővel jelöljük. Ekkor reguláris disztribúciókra fennáll az alábbi:

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &\equiv \langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = [f(x) \varphi(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\langle f, \varphi' \rangle \equiv -f(\varphi') \ . \end{aligned} \tag{24}$$

Az elsősorban egy parciális integrálás történt és felhasználtuk, hogy $\varphi(x = \pm\infty) = 0$. Az m-szeres derivált esetén pedig m-szeres parciális integrálással, a derivált rendjét felső indexben jelölve kapjuk, hogy

$$f^{(m)}(\varphi) \equiv \left\langle f^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle f, \varphi^{(m)} \right\rangle \equiv (-1)^m f\left(\varphi^{(m)}\right) \ . \tag{25}$$

Továbbá $n > 1$ esetére hasonlóan következik, hogy

$$D^\alpha f(\varphi) \equiv \langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \equiv (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \varphi) \ , \tag{26}$$

ahol $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Definíció: Az előzőeknek megfelelően egy tetszőleges $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció deriváltját az alábbi formulával definiáljuk:

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \ . \tag{27}$$

Mivel $D^\alpha\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ így $D^\alpha f$ jól definiált. A formulából következik az is, hogy tetszőleges disztribúció akárhányszor deriválható.

Példa: A

$$\Theta = \begin{cases} 0\ ,\ x<0 \\ 1\ ,\ 0<x \end{cases} \tag{28}$$

Heaviside-függvény x-szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned} \langle \Theta', \varphi\rangle &= -\langle \Theta, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \ . \end{aligned} \tag{29}$$

Tehát disztribúcionális értelemben:

$$\Theta' = \delta \ . \tag{30}$$

B. Mérsékelt disztribúciók Fourier-transzformáltja

A reguláris disztribúciókra:

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} f(\mathbf{k})\,(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} f(\mathbf{k})\,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})\,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} f(\mathbf{k})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle \end{aligned} \tag{31}$$

teljesül. Ennek megfelelően a **mérsékelt disztribúciók Fourier-transzformáltját** a következőképpen definiáljuk:

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle \ . \tag{32}$$

Hasonlóan definiáljuk az inverz Fourier-transzformációt is. A Fourier-transzformált jelölésére szokás még a disztribúció fölé helyezett tilde-t is alkalmazni, ahogy azt az előző olvasóleckében láttuk.

Példák:

1) A Dirac-δ Fourier-transzformáltja:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi\rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\langle 1, \varphi\rangle \ , \tag{33}$$

így

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \ . \tag{34}$$

2) A Dirac-δ deriváltjának Fourier-transzformáltja egyváltozós ($n=1$) esetben:

$$\langle \mathcal{F}\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', \mathcal{F}\varphi\rangle = -\left\langle \delta, (\mathcal{F}\varphi)'\right\rangle = i\,\langle \delta, \mathcal{F}(k\varphi)\rangle = \langle \mathcal{F}\delta, ik\varphi\rangle = \langle ik\mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \left\langle \frac{ik}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi\right\rangle \ , \tag{35}$$

így

$$\mathcal{F}\delta' = \frac{ik}{(2\pi)^{n/2}} \ . \tag{36}$$

3) A Dirac-δ x_j-koordináta szerinti parciális deriváltjának Fourier-transzformáltja:

$$\left\langle \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right), \varphi\right\rangle = \langle ik_j \mathcal{F}f, \varphi\rangle \ . \tag{37}$$

4) A konvolúció Fourier-transzformáltja:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \langle \mathcal{F}(f * g), \varphi \rangle = \langle (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g), \varphi \rangle \ . \tag{38}$$

5) A Fourier-transzformáció és inverzének alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \ . \end{aligned} \tag{39}$$

Ezt összevetve a Dirac-δ disztribúció hatásának (23) kifejezésével az alábbi fontos azonossághoz jutunk:

$$\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \ . \tag{40}$$

6) A $\sin(ax)$ Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sin(ax)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \sin(ax) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k-a)x} - \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k+a)x} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \left[\delta(k-a) - \delta(k+a)\right] \ . \end{aligned} \tag{41}$$

7) A $\cos(ax)$ Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned} \widetilde{\cos(ax)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \cos(ax) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k-a)x} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k+a)x} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\delta(k-a) + \delta(k+a)\right] \ . \end{aligned} \tag{42}$$

8) A

$$\Theta = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \\ 1 \ , & 0 < x \end{cases} \tag{43}$$

Heaviside-függvényre a Fourier-transzformációs formula egyenes alkalmazása adja, hogy

$$\widetilde{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} \ . \tag{44}$$

A jobboldali integrál azonban nem jól definiált. Viszont Θ olyan disztribúció, amely az

$$f_a(x) = \begin{cases} e^{-ax} \ , & 0 \leq x \\ 0 \ , & x < 0 \end{cases} \ , \tag{45}$$

függvény határértékeként is képezhető:

$$\Theta = \lim_{a \to 0} f_a \ . \tag{46}$$

Tekintsük az $f_a(x)$ függvény Fourier-transzformáltját:

$$\widetilde{f}_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-ax} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik} \ . \tag{47}$$

Ennek határértéke:

$$\lim_{a\to 0}\widetilde{f}_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} \ . \tag{48}$$

Kérdés ez valóban megfelel-e a Θ Fourier-transzformáltjának. Ugyanis a $k=0$ helyen probléma lehet, hiszen ott divergens eredményt kaptunk. Vegyük az inverz Fourier-transzformáltat:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\lim_{a\to 0}\widetilde{f}_a &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{e^{ikx}}{ik} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}dk\frac{e^{ikx}}{ik}+\int_{0}^{\infty}dk\frac{e^{ikx}}{ik}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}dk\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{ik}\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk\frac{\sin kx}{k} = \frac{sgn\,(x)}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\frac{\sin\omega}{\omega} = sgn\,(x)\,\frac{1}{2}\ ,\end{aligned}$$

ahol bevezettük az $\omega = kx$ jelölést és integrál táblázatból felhasználtuk, hogy

$$\int_0^{\infty}d\omega\frac{\sin\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2} \ . \tag{49}$$

Ami azt jelenti, hogy

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{ik} = \widetilde{sgn\,(x)} \ . \tag{50}$$

Tehát az előjel függvény Fourier-transzformáltját nem pedig a Heaviside-függvényét, vagy annak számszorosáét kaptuk. Viszont a Heaviside-függvény írható úgyis, mint

$$\Theta\,(x) = \frac{1}{2}sgn\,(x) + \frac{1}{2}\ , \tag{51}$$

így

$$\widetilde{\Theta\,(x)} = \widetilde{sgn\,(x)} + \widetilde{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta\,(k) \ . \tag{52}$$

III. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK-FELADATOK

1. Jelölje $D\,(\mathbb{R}^n)\subset S\,(\mathbb{R}^n)$ azokat a függvényeket, amelyek az $\mathbb{R}^n$-ben egy véges sugarú gömbön kívül azonosan nullák. Ez a függvényosztály is egy vektorteret alkot, amelyen szintén értelmezhetünk disztribúciókat, mint folytonos lineáris funkcionálokat. Ezek terét jelölje $D'\,(\mathbb{R}^n)$. Vajon $D'\,(\mathbb{R}^n)$, vagy $S'\,(\mathbb{R}^n)$ a bővebb halmaz és miért?

2. A $\sin x$ függvény mérsékelt disztribúció-e?

3. A Heaviside-függvény deriváltja ismeretében határozza meg az

$$f\,(x) = \begin{cases} 2x\ ,\ 0\le x\\ 0\ ,\ \mathit{egyébként}\end{cases} \tag{53}$$

függvény x-szerinti kétszeres deriváltját disztribúcionális értelemben!

4. Határozza meg az $1/x$ függvény Fourier-transzformáltját!

IV. REFERENCIÁK

Az alábbi referenciák segítik az órai tananyag mélyebb szintű megértését, illetve továbblépési lehetőséget kínálnak a témakörben:

[1] Bartha F., *Óravázlatok a Matematikai Módszerek a Fizikában 2. előadásokhoz I. rész: Disztribúcióelmélet* (2003). http://www.staff.u-szeged.hu/~barthaf/1resz.pdf

[2] J. Kirkwood, *Mathematical Physics with Partial Differential Equation*, Academic Press, Elsevier, Second Edition (2018).
[3] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Distributions: Theory and Applications*, Springer (2010).
[4] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Second Edition (1991).
[5] J. K. Hunter, B. Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific (2001).
[6] H. Abels, *Pseudodifferential and Singular Integral Operators, An Introduction with Applications*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG (2012).

JELEN TANANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT,
AZ EURÓPAI ÚNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKTAZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.