A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

2. előadás, szintaxis

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

Formalizálás szükségessége

- Az adjunktus azt mondta a docensnek, hogy van egy diákja, aki okosabb, mint mindegyik kollégája.
- x (az adjunktus) azt mondta y-nak (a docens),
- hogy van egy diákja: z (z diákja u-nak),
- ahol z okosabb mint v összes kollegája
  - u lehet x vagy y
  - v lehet x, y, vagy z
  - 6 lehetőség!

Pólya és a lovak: Minden ló ugyanolyan színű

- Ha csak egy ló van, az állítás nyilvánvalóan teljesül.
- Tegyük fel, hogy az állítás igaz n lóra!
  - Be szeretnénk látni az állítást $n + 1$ lóra.
  - Ehhez számozzuk meg a lovakat 1-től $n + 1$-ig.
  - Az $\{1, \ldots, n\}$ valamint a $\{2, \ldots, n + 1\}$ halmaz egyaránt n lovat jelöl, így mindkettőre igaz az állítás.
  - Ezek szerint mindkét halmazban szereplő lovak ugyanolyan színűek, külön-külön.
  - Viszont vannak olyan lovak, melyek mindkét halmazban megtalálhatóak, így mind az $n + 1$ ló ugyanolyan színű.

Teljes indukció

- Bebizonyítja, hogy egy n-et tartalmazó állítás igaz az n minden értékére.
- Két lépésből áll:
  - **Bázis**: Megmutatja, hogy az állítás igaz az n legkisebb értékére. Ez rendszerint 0, vagy 1.
  - **Indukciós lépés**: Megmutatja, hogy *ha* az állítás igaz n-re, *akkor* is igaz lesz, ha n-et $n + 1$-re cseréljük.

Állítások nulladrendben

Keressük az összetett állításban található, tovább már nem bontható állításokat!

- Feri csak akkor szereti a Lokit, ha debreceni.
  - Feri szereti a Lokit.
  - Feri debreceni.
- Esik eső, süt a nap, Paprikajancsi mosogat.
  - Esik az eső.
  - Süt a nap.
  - Paprikajancsi mosogat.
- A hálapénzt akkor és csak akkor fizetik ki, ha elégedettek az orvossal.
  - A hálapénzt kifizetik.
  - Elégedettek az orvossal.

Kijelentéslogika

- Kijelentés alatt olyan mondatot értünk, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
- Gyakran kifejezésekből kötőszavakkal (nem, és, ha-akkor, stb.) összetett állításokat képzünk.
  - Az összetett állítás igazságértékét a benne szereplő kijelentések igazságértéke határozza meg.
  - A kötőszavakra igazságfunktorokként tekintünk, melyek igazságfüggvényeket jelölnek.
  - A *nem* például megváltoztatja egyetlen argumentuma igazságértékét.

Az igazságértékekkel a következő órán foglalkozunk részletesebben.

Szintaxis és szemantika

*Haskell nyelven megadjuk, hogy mit jelent a **nem** és a **vagy**.*

```
data Igazságérték = Hamis | Igaz
  deriving (Eq,Show)

nem :: Igazságérték -> Igazságérték
nem Hamis = Igaz
nem Igaz  = Hamis

vagy :: Igazságérték -> Igazságérték -> Igazságérték
vagy Hamis Hamis = Hamis
vagy _     _     = Igaz
```

Nulladrendű nyelv

Definíció (klasszikus nulladrendű nyelv)

Klasszikus nulladrendű nyelven az

$$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

rendezett hármast értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Con \neq \emptyset$ a nyelv nemlogikai konstansainak (állítás- vagy kijelentés-paramétereinek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- Az $LC \cap Con = \emptyset$

Nulladrendű nyelv

Definíció (klasszikus nulladrendű nyelv)

A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a *Form* halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:

- $Con \subseteq Form$
- Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor
  - $(A \supset B) \in Form$,
  - $(A \wedge B) \in Form$,
  - $(A \vee B) \in Form$,
  - $(A \equiv B) \in Form$.

Formulahalmazok

Példa: $Con = \{p\}$

$Form = \{p,\ \neg p,\ (p \supset p),\ (p \wedge p),\ (p \vee p),\ (p \equiv p) \ldots\}$

Példa: $Con = \{p,\ q\}$

$Form = \{p,\ q,\ \neg p,\ \neg q,\ (p \supset p),\ (p \wedge p),\ (p \vee p),\ (p \equiv p), (p \supset q),\ (p \wedge q),\ (p \vee q),\ (p \equiv q), (q \supset p),\ (q \wedge p),\ (q \vee p),\ (q \equiv p), (q \supset q),\ (q \wedge q),\ (q \vee q),\ (q \equiv q) \ldots\}$

Nulladrendű atomi formula

Definíció

Ha $L^{(0)}$ *egy nulladrendű nyelv (azaz* $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$*), akkor* Con *halmaz elemeit nulladrendű atomi formuláknak vagy nulladrendű prímformuláknak nevezzük.*

Megjegyzés

A nulladrendű jelzőt, ha félreértést nem okoz, akkor gyakran elhagyjuk, s csak atomi formulákról vagy prímformulákról beszélünk.

Szintaktikai definíciók

Definíció (részformula a nulladrendű nyelvben)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája.
Az *A formula részformuláinak halmaza* az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$.

Formula részformulái

$A = ((\neg p \lor q) \supset (\neg q \land r))$

$RF(A) = \{((\neg p \lor q) \supset (\neg q \land r)),\ (\neg p \lor q),\ (\neg q \land r)\ \neg p,\ q,\ \neg q,\ r,\ p\}$

$A = (\neg\neg p \equiv \neg\neg(q \supset (\neg p \supset \neg q)))$

$RF(A) = \{(\neg\neg p \equiv \neg\neg(q \supset (\neg p \supset \neg q))),\ \neg\neg p,\ \neg\neg(q \supset (\neg p \supset \neg q)),\ \neg p,\ \neg(q \supset (\neg p \supset \neg q)), p,\ (q \supset (\neg p \supset \neg q)),\ q,\ (\neg p \supset \neg q),\ \neg q\}$

Közvetlen részformula

Definíció (közvetlen részformula a nulladrendű nyelvben)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv.

- Ha A atomi formula (azaz $A \in Con$), akkor nincs közvetlen részformulája;
- $\neg A$ egyetlen közvetlen részfomulája A;
- Az $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.

Formula közvetlen részformulái

$A = ((\neg p \lor q) \supset (\neg q \land r))$

$KRF(A) = \{(\neg p \lor q),\ (\neg q \land r)\}$

$A = (\neg\neg p \equiv \neg\neg(q \supset (\neg p \supset \neg q)))$

$KRF(A) = \{\neg\neg p,\ \neg\neg(q \supset (\neg p \supset \neg q))\}$

$A = \neg(\neg p \equiv \neg\neg(q \supset (\neg p \supset \neg q)))$

$KRF(A) = \{(\neg p \equiv \neg\neg(q \supset (\neg p \supset \neg q)))\}$

Közvetlen részformula

Definíció (részformula definíciója közvetlen részformulák segítségével nulladrendű nyelv esetén)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája.
Egy *A* formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, (azaz az A formula részformulája önmagának);
- ha $A' \in RF(A)$ és B közvetlen részformulája A'-nek, akkor $B \in RF(A)$ (azaz, ha egy A' formula részformulája A-nak, akkor A' összes közvetlen részformulája is részformulája A-nak).

Szerkezeti fa

Definíció (szerkezeti fa nulladrendű nyelv esetén)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy tetszőleges nulladrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája.
Az A formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai formulák,

- gyökere az A formula,
- $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $(B \supset C), (B \wedge C), (B \vee C), (B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B, illetve a C formulák alkotják,
- levelei prímformulák (atomi formulák).

Szerkezeti fa

Példa