A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

3. előadás, szemantika

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

Nulladrendű interpretáció

interpretatio (lat.)

- értelmezés, magyarázat
- művészi alkotás egyedi értelmezésen alapuló bemutatása

Definíció

A ϱ függvényt az $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ nulladrendű nyelv egy interpretációjának nevezzük, ha

- $Dom(\varrho) = Con$
- Ha $p \in Con$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$.

Nulladrendű interpretáció - 2

Megjegyzés

- Minden szemantikai úton felépített logikai rendszer esetén az interpretáció feladata az, hogy szemantikai értéket rendeljen a nemlogikai konstansokhoz.
- A nulladrendű logikában a nemlogikai konstansok állítások helyettesítésére szolgálnak. Az állítások lehetséges szemantikai értékei az igazságértékek, így egy interpretáció minden nemlogikai konstanshoz egy igazságértéket rendel (megmondja, hogy az adott szituációban az állításparaméter milyen igazságértékű állítás helyet szerepel).
- Ha a nulladrendű nyelvben n darab nemlogikai konstans van, akkor a különböző interpretációk száma 2^n.

Nulladrendű szemantikai szabályok

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és ϱ egy nulladrendű interpretáció.
Az $A \in Form$ formula ϱ interpretáció szerinti szemantikai értékét a következő szabályok határozzák meg
(jelölés: $|A|_\varrho$ jelöli az A formula ϱ interpretáció szerinti értékét):

- Ha $p \in Con$, akkor $|p|_\varrho = \varrho(p)$
- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_\varrho = 1 - |A|_\varrho$.

Nulladrendű szemantikai szabályok - 2

Definíció

Ha $A, B \in Form$, akkor

- $|(A \supset B)|_\varrho = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_\varrho = 1 \quad \text{és} \quad |B|_\varrho = 0 \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $|(A \wedge B)|_\varrho = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_\varrho = 1 \quad \text{és} \quad |B|_\varrho = 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $|(A \vee B)|_\varrho = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_\varrho = 0 \quad \text{és} \quad |B|_\varrho = 0 \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $|(A \equiv B)|_\varrho = \begin{cases} 1, & \text{ha } |A|_\varrho = |B|_\varrho \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

Nulladrendű szemantikai szabályok - 4

Példa

$Con = \{p,\ q\}$
$\varrho(p) = 1$ és $\varrho(q) = 0$.
Ekkor $|q|_\varrho = 0$, $|p|_\varrho = 1$, $|(q \supset p)|_\varrho = 1$, $|\neg(q \supset p)|_\varrho = 0$, $|\neg p|_\varrho = 0$,
$|(\neg(q \supset p) \vee \neg p)|_\varrho = 0$

Nulladrendű szemantikai szabályok - 4

Megjegyzés

- A szemantikai szabályok megadása induktív definícióval történik, amelyben a bázist a *Con* halmaz elemeire vonatkozó 1. szabály alkotja.
- Minden szemantikai úton felépített logikai rendszer esetén a szemantikai szabályok feladata a logikai konstansok jelentésének megadása.
- A nulladrendű szemantikai szabályok segítségével egy adott interpretációban a nulladrendű nyelv minden formulájához igazságértéket rendelünk.

Igazságtáblázat

Az igazságtábla megadja a formula igazságértékét minden interpretáció esetén.

p	q	r	$\neg p$	$(q \supset r)$	$(\neg p \wedge (q \supset r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

Igazságtáblázat - 2

Egy variáns ábrázolásban csak egyszer szerepel a formula, és minden részformulája külön oszlopot kap.

$(\neg$	p	$\wedge($	q	$\supset$	$r)$
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	$\underline{0}$	1	1	1

Nulladrendű modell

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
A ϱ interpretáció nulladrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_\varrho = 1$

Megjegyzés

A nulladrendű nyelv egy adott formulahalmazának a nulladrendű modellje a nyelv egy olyan nulladrendű interpretációja, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula modelljén az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

Nulladrendű modell - 2

Példa - formulahalmaz modellje

$Con = \{p,\ q,\ r\}$

A $\{p,\ (p \wedge q),\ (r \supset p)\}$ formulahalmaz modelljei:

- $\varrho(p) = 1$, $\varrho(q) = 1$ és $\varrho(r) = 0$,
- $\varrho(p) = 1$, $\varrho(q) = 1$ és $\varrho(r) = 1$.

míg nem modelljei:

- $\varrho(p) = 0$, $\varrho(q) = 0$ és $\varrho(r) = 0$,
- $\varrho(p) = 0$, $\varrho(q) = 0$ és $\varrho(r) = 1$,
- $\varrho(p) = 0$, $\varrho(q) = 1$ és $\varrho(r) = 0$,
- $\varrho(p) = 0$, $\varrho(q) = 1$ és $\varrho(r) = 1$,
- $\varrho(p) = 1$, $\varrho(q) = 0$ és $\varrho(r) = 0$,
- $\varrho(p) = 1$, $\varrho(q) = 0$ és $\varrho(r) = 1$.

Nulladrendű modell - 3

Példa - formula modellje

$Con = \{p,\ q\}$
A $\{(p \equiv (p \supset q))\}$ formula modellje:

- $\varrho(p) = 1$ és $\varrho(q) = 1$.

míg nem modelljei:

- $\varrho(p) = 0$ és $\varrho(q) = 0$.
- $\varrho(p) = 0$ és $\varrho(q) = 1$.
- $\varrho(p) = 1$ és $\varrho(q) = 0$.

Kielégíthetőség

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.

Megjegyzés

- A Γ fomulahalmaz kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.

Kielégíthetőség - 2

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula kielégíthető, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

Megjegyzés

- Az A fomula kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.
- Az előző állítás megfordítása nem igaz. Pl.: a $\{p, \neg p\}$ formulahalmaz minden eleme kielégíthető, de maga a formulahalmaz nem kielégíthető.

Kielégíthetőség - 3

$Con = \{p,\ q,\ r\}$

Példa - kielégíthető formulahalmazok

- $\{((q \wedge p) \vee (q \vee p)),\ ((p \vee q) \vee (q \equiv q))\}$,
- $\{(r \supset (p \vee (p \wedge p))),\ (p \equiv ((q \supset q) \wedge p))\}$,
- $\{((q \supset q) \equiv \neg q),\ (p \equiv (q \supset \neg q))\}$.

Példa - kielégíthető formulák

- $(p \supset ((q \wedge q) \vee p))$,
- $((p \wedge (q \wedge p)) \equiv p)$,
- $\neg((q \wedge p) \equiv p)$.

Kielégíthetetlenség

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz nincs modellje.

Megjegyzés

- A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz *minden* eleme igaz.
- Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak.

Kielégíthetetlenség - 2

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula kielégíthetetlen, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

Megjegyzés

Ha az A fomula kielégíthetetlen, ha nincs olyan interpretáció, amelyben a formula igaz, azaz minden interpretációban a formula hamis értékű.

Kielégíthetetlenség - 3

$Con = \{p,\ q\}$

Példa - kielégíthetetlen formulahalmazok

- $\{(\neg p \wedge p),\ ((q \supset p) \supset \neg q)\}$,
- $\{(q \wedge \neg(p \equiv q)),\ (q \wedge (p \vee (p \vee p)))\}$,
- $\{(p \vee ((q \equiv q) \equiv q)),\ \neg(\neg p \supset q)\}$.

Példa - kielégíthetetlen formulák

- $(\neg(q \wedge q) \equiv q)$,
- $(p \wedge (p \equiv \neg p))$,
- $\neg((q \wedge p) \supset q)$.

Szemantikai következményreláció

Definíció (logikai következmény szemantikai definíciója)

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz, és $A \in Form$ egy formula.
A Γ formulahalmaznak *logikai következmény* az A formula, ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ *formulahalmaz kielégíthetetlen*.
Jelölés: $\Gamma \models A$

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A, B \in Form$ két tetszőleges formula.
Az A formulának *logikai következménye* a B formula, ha a $\{A\} \models B$.
Jelölés: $A \models B$

Következményreláció - 2

$Con = \{p,\ q\}$

Példa - formulahalmaz következményei

$\{(p \equiv \neg(p \wedge q)),\ (((q \supset q) \wedge q) \wedge p)\}$ formulahalmaz logikai következményei:

- $\neg((p \supset q) \equiv q)$,
- $(q \equiv (p \supset \neg p))$,
- $(q \supset (q \vee q))$.

Példa - formula következményei

$(p \supset \neg p)$ formula logikai következményei:

- $\neg(q \wedge p)$,
- $((p \vee p) \supset \neg q)$,
- $(p \supset \neg q)$.

Érvényesség

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.
Az A formula érvényes, ha $\emptyset \models A$, azaz ha az A formula logikai következménye az üres halmaznak.
Jelölés: $\models A$

Érvényesség

$Con = \{p,\ q\}$

Érvényes formulák

- $((q \supset p) \vee q)$,
- $(q \supset ((p \supset q) \equiv q))$,
- $(p \supset ((q \supset p) \vee p))$.

Logikai ekvivalencia

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula.
Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \models B$ és $B \models A$.
Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

Logikai ekvivalencia - 2

$Con = \{p,\ q\}$

Ekvivalens formulák

- $\neg((p \supset p) \vee q)$ és $(\neg q \wedge (q \equiv p))$,
- $(p \equiv \neg(q \equiv q))$ és $(p \supset (p \supset \neg p))$,
- $(((p \equiv q) \vee q) \equiv q)$ és $((p \supset (p \equiv q)) \equiv q)$.