A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

4. előadás, centrális fogalmak tulajdonságai

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

Kielégíthetőség

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.
Ha Γ kielégíthető formulahalmaz és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ kielégíthető formulahalmaz.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.

Kielégíthetőség

Bizonyítás

Legyen $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges kielégíthető formulahalmaz, és $\Delta \subseteq \Gamma$!
Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje.
Legyen Γ egy modellje a ϱ interpretáció!
ϱ tulajdonsága:

- Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_\varrho = 1$

Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_\varrho = 1$.
Azaz a ϱ interpretáció modellje Δ-nak, tehát Δ kielégíthető.

Kielégíthetetlenség

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.
Ha Γ kielégíthetetlen formulahalmaz, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ kielégíthetetlen formulahalmaz.

Megjegyzés

- A tétel röviden úgy fogalmazható meg, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.
- Szemléletes értelemben a tétel azt mondja ki, hogy a logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.

Kielégíthetetlenség

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás: Tegyük fel,

- hogy $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges kielégíthetetlen formulahalmaz,
- $\Delta \subseteq Form$ pedig tetszőleges formulahalmaz, melyre teljesül, hogy $\Gamma \subseteq \Delta$.

Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és Δ kielégíthető.
Mivel $\Gamma \subseteq \Delta$, így a kielégíthetőségre vonatkozó tétel miatt Γ kielégíthető, ez pedig ellentmondás.

Következményreláció tulajdonságai

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$, és $A \in Form$.
$\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha a Γ formulahalmaz *minden* modellje modellje az a A formulának (azaz az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaznak) is.

Bizonyítás $\rightarrow$

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models A$ és van olyan modellje a Γ formulahalmaznak, amely nem modellje az A formulának.
Legyen ez a modell a ϱ interpretáció! A ϱ tulajdonságai:

- minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_\varrho = 1$
- $|A|_\varrho = 0$, azaz $|\neg A|_\varrho = 1$

Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz minden eleme igaz ϱ-ban, tehát $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető, azaz $\Gamma \models A$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Bizonyítás $\leftarrow$

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy a Γ formulahalmaz minden modellje modellje az A formulának, de $\Gamma \models A$ nem teljesül.
Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthető, azaz van modellje.
Legyen ez a modell a ϱ interpretáció! A ϱ tulajdonságai:

- minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_\varrho = 1$;
- $|\neg A|_\varrho = 1$, azaz $|A|_\varrho = 0$

Tehát a Γ formulahalmaznak van olyan modellje, ami nem modellje az A formulának, s ez ellentmondás.

Következmény

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$, és $A \in Form$.
$\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha minden olyan interpretációban, amelyben a Γ formulahalmaz minden eleme igaz, igaz az A formula is.

Következményreláció tulajdonságai

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $A \in Form$.
Ha A érvényes formula ($\models A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \models A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.

Bizonyítás

Ha A érvényes formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \models A$.
Így $\emptyset \cup \{\neg A\} \quad (= \{\neg A\})$ kielégíthetetlen, s így a kielégíthetetlenségre kimondott tétel alapján ennek a halmaznak a bővítései is kielégíthetetlenek.
$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.

Következményreláció tulajdonságai

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.
Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \models A$.

Megjegyzés

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.

Bizonyítás

A már bizonyított tétel szerint ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen.
$\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ-nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.

Dedukció tétel

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.
Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$, akkor $\Gamma \models (A \supset B)$.

Megjegyzés

$\Gamma \cup \{A\} \models B$ helyett gyakran használjuk a következő rövidebb írásmódot:
$\Gamma, A \models B$

Dedukció tétel

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$ teljesül, de $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül.
Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje a ϱ interpretáció! A ϱ tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
- $|\neg(A \supset B)|_\varrho = 1$

$|(A \supset B)|_\varrho = 0$, azaz $|A|_\varrho = 1$ és $|B|_\varrho = 0$.
Így $|\neg B|_\varrho = 1$. $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a formulahalmaz kielégíthető, tehát $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Dedukció tétel megfordítása

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.
Ha $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

Dedukció tétel megfordítása

Bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models (A \supset B)$, és ugyanakkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül.
Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje a ϱ interpretáció! A ϱ tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
- $|A|_\varrho = 1$
- $|\neg B|_\varrho = 1$, így $|B|_\varrho = 0$

Így a ϱ interpretáció szerint $|(A \supset B)|_\varrho = 0$, következésképpen $|\neg(A \supset B)|_\varrho = 1$.
$\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, azaz a ϱ interpretációja modellje a formulahalmaznak, ami egyben azt is jelenti, hogy a formulahalmaz kielégíthető.
Tehát $\Gamma \models (A \supset B)$ nem teljesül, ami ellentmond indirekt feltételünknek.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula.
$A \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \supset B)$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a dedukció tételt és megfordítását abban az esetben, amikor $\Gamma = \emptyset$.

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula.
$A \Leftrightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \equiv B)$

Metszet tétel

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.
Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \models B$.

Metszet tétel

Indirekt bizonyítás

Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, de $\Gamma \cup \Delta \models B$ nem teljesül.
Ekkor $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg B\}$ kielégíthető
(a következményreláció definíciója miatt), azaz van modellje.
Legyen a formulahalmaz egy modellje a ϱ interpretáció. A ϱ interpretáció tulajdonságai:

- Γ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
- Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban.
- $|\neg B|_\varrho = 1$

Mivel $\Delta \models A$ és Δ minden eleme igaz a ϱ interpretációban, $|A|_\varrho = 1$.
Következésképpen a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ halmaz minden eleme igaz a ϱ interpretációban, ami azt jelenti, hogy a $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthető.
Ekkor azonban a következményreláció definíciója miatt $\Gamma \cup \{A\} \models B$ nem teljesül. Ez pedig ellentmond indirekt feltételünknek.