A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

5. előadás, normálformák, formulák ekvivalens átalakításai

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

Zárójelelhagyási konvenciók - 1

A konvenciók célja az egyértelmű olvashatóság fenntartása mellett a formulákban előforduló zárójelek számának a csökkentése.

- A létrejött jelsorozatok betű szerint nem formulák, de egyértelműen előállítható belőlük egy formula.
- Az egyszerűség kedvéért az így létrejött jelsorozatokat is formuláknak nevezzük, s használatukkor mindig a belőlük egyértelműen előállítható formulákra gondolunk.

Zárójelelhagyási konvenciók - 2

- A legkülső zárójelpár mindig elhagyható.
- A kétargumentumú logikai konstansok elsőbbségi (precedencia) sorrendje: $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$
- A negáció erősebb bármely kétargumentumú logikai konstansnál.
- Az azonos kétargumentumú logikai konstansok egymás közötti elsőbbségét a balról jobbra szabály rendezi: először mindig a bal oldali formulát tekintjük külön műveleti komponensnek.

Zárójelelhagyási konvenciók - 3

- Az utolsó szabály a következőképpen is megfogalmazható: azonos kétargmentumú logikai konstansok esetén balról az első a formula fő műveleti jele.
- Az utolsó szabálynak csak az implikációnál van valódi jelentősége:
  - az $A \supset B \supset C$ *formula* egyértelműen zárójelezett alakja: $(A \supset (B \supset C))$.
- A konjunkció, a diszjunkció és a (materiális) ekvivalencia esetében a műveltek asszociativitása miatt a szabályt nem követő zárójelezések is logikailag ekvivalens formulát eredményeznek.
  - Pl.: az $A \wedge B \wedge C$ *formula* egyértelműen zárójelezett alakja: $(A \wedge (B \wedge C))$, de ez logikailag ekvivalens az $((A \wedge B) \wedge C)$ formulával.

Példa

Írjuk fel a $(((p \wedge q) \supset (q \vee \neg r)) \equiv \neg((p \wedge q) \vee r))$ formulát!

- $((p \wedge q) \supset (q \vee \neg r)) \equiv \neg((p \wedge q) \vee r)$ (külső zárójel)
- $(p \wedge q) \supset (q \vee \neg r) \equiv \neg((p \wedge q) \vee r)$ (evivalencia a leggyengébb)
- $p \wedge q \supset q \vee \neg r \equiv \neg((p \wedge q) \vee r)$ (az implikáció gyengébb a konjunkciónál és diszjunkciónál)
- $p \wedge q \supset q \vee \neg r \equiv \neg(p \wedge q \vee r)$ (a diszjunkció gyengébb a konjunkciónál)

Ekvivalens formulák

- Kettős tagadás törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Kommutativitás: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ és $A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
- Asszociatívitás: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$,
  $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ és $A \equiv (B \equiv C) \Leftrightarrow (A \equiv B) \equiv C$
- Idempotencia: $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
- Disztibutivitás:
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Elnyelés: $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$ és $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ és $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- Áthelyezési törvény: $(A \wedge B) \supset C \Leftrightarrow A \supset (B \supset C)$
- Kontrapozíció: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$
- Öndisztributivitás: $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$
- Esetszétválasztás: $(A \vee B) \supset C \Leftrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

Érvényes formulák

- $\models \neg(A \wedge \neg A)$ (az ellentmondás törvénye)
- $\models A \vee \neg A$ (a kizárt harmadik törvénye)
- $\models A \supset A$
- $\models A \supset (\neg A \supset B)$
- $\models A \equiv A$
- $\models \neg(A \equiv \neg A)$

Logika következmények

- $A \supset \neg A \models \neg A$
- $\neg A \supset A \models A$
- $A \wedge B \models A$ és $A \wedge B \models B$
- $A \models A \vee B$
- $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
- $\{A \supset B, A\} \models B$ (modus ponens: leválasztási szabály)
- $\{A \supset B, \neg B\} \models \neg A$ (modus tollens: indirekt cáfolás sémája)
- $\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$ (láncszabály)
- $\{A \supset B, A \supset \neg B\} \models \neg A$ (redukció ad abszurdum)
- $\neg A \models A \supset B$
- $B \models A \supset B$

Kielégíthetőség, kielégíthetetlenség

Legyen $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \in Form$!

- Az $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthető, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ formula kielégíthető.
- Az $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\}$ formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\} \models A$ akkor és csak akkor, ha $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models A$.
- Az $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\} \models A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \neg A$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\} \models A$ akkor és csak akkor, ha az $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset A$ formula érvényes.

A bevezetett logikai műveletek egymással való kifejezhetősége

- $A \supset B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \supset B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

Igazságfunktorok és negáció

- $\neg(A \supset B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \equiv B) \Leftrightarrow \neg((A \supset B) \wedge (B \supset A)) \Leftrightarrow \neg(A \supset B) \vee \neg(B \supset A) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$

Normálformák - 1

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv.

- Ha $p \in Con$, akkor a $p, \neg p$ formulákat literálnak nevezzük.
- A $p, \neg p$ literálok esetén a p paramétert a literál alapjának nevezzük.

Elemi konjunkció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv.
Ha az $A \in Form$ formula literál vagy különböző alapú literálok konjunkciója, akkor A-t elemi konjunkciónak nevezzük.

Diszjunktív normálforma

Egy elemi konjunkciót vagy elemi konjunkciók diszjunkcióját diszjunktív normálformának nevezzük.

Normálformák - 2

Elemi diszjunkció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv.
Ha az $A \in Form$ formula literál vagy különböző alapú literálok diszjunkciója, akkor A-t elemi diszjunkciónak nevezzük.

Konjunktív normálforma

Egy elemi diszjunkciót vagy elemi diszjunkciók konjunkcióját konjunktív normálformának nevezzük.

Normálforma tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy nulladrendű nyelv és $A \in Form$ egy formula.
Ekkor létezik olyan $B \in Form$, hogy

- $A \Leftrightarrow B$
- B diszjunktív vagy konjunktív normálformájú.

Megjegyzés

- Egy formula diszjunktív (konjunktív) normálformáján egy vele logikailag ekvivalens diszjunktív (konjunktív) normálformájú formulát értünk.
- Minden kielégíthető formulának van diszjunktív normálformája (azaz vele logikailag ekvivalens diszjunktív normálformájú formula).
- Minden nem érvényes formulának van konjunktív normálformája (azaz vele logikailag ekvivalens konjunktív normálformájú formula).
- Az elektronikában a következő kifejezések elterjedtek:
  - minterm (elemi konjunkció),
  - maxterm (elemi diszjunkció, későbbiekben klóz)
  - Sum-Of-Product, azaz SOP (diszjunktív normálforma)
  - Product-Of-Sums, azaz POS (konjunktív normálforma)

Minimalizálás

Mind az áramkörök megvalósításánál, mind programok írásakor javasolt adott formulák minél egyszerűbb implementációja. Erre több módszer is létezik:

- Boole-algebra azonosságai
- Kifejtés módszere (Shannon)
  - $f(x_1, \dots, x_n) = \neg x_1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n) \vee x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n)$
- Karnaugh táblák
- Normálformák (ekvivalens átalakítások)
- Számjegyes minimalizálás (Quine-McCluskey)

Karnaugh táblák

Grafikus módszer, csak néhány nemlogikai konstans esetén.
(Bell Labs, 1952-1954; Edward Veitch, Maurice Karnaugh)

- A formula különböző igazságértékeit egy téglalapba írjuk be, ahol az egymás melletti mezőkhöz tartozó interpretációk csak egy helyen különböznek.
  - A Karnaugh tábla az igazságtáblázat ekvivalens ábrázolási módja
- DNF esetben az egyeseket fedjük le minél nagyobb kettőhatvány mezőt $(1, 2, 4, \dots)$ letakaró téglalapokkal, és a leírásban a téglalapot meghatározó közös jellemzőket adjuk meg.
- KNF esetben a nullásokat fedjük le hasonló téglalapokkal, viszont a leírásban a jellemző ellentettjét szerepeltetjük.
- a téglalapok *átlapolása* lehetséges, de egyik téglalap sem tartalmazhat másikat.

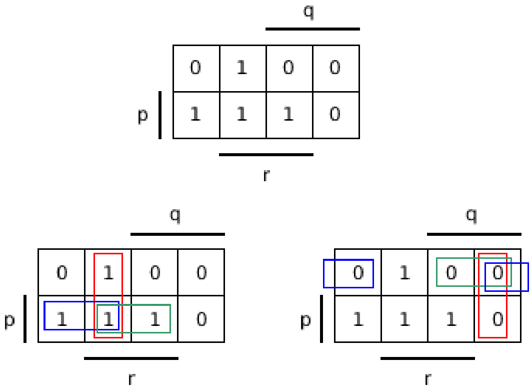
Interpretációk

$\neg p,\ \neg q$	$\neg p,\ q$
$p,\ \neg q$	$p,\ q$

$\neg p,\ \neg q,\ \neg r$	$\neg p,\ \neg q,\ r$	$\neg p,\ q,\ r$	$\neg p,\ q,\ \neg r$
$p,\ \neg q,\ \neg r$	$p,\ \neg q,\ r$	$p,\ q,\ r$	$p,\ q,\ \neg r$

$\neg p,\ \neg q,\ \neg r,\ \neg s$	$\neg p,\ \neg q,\ \neg r,\ s$	$\neg p,\ \neg q,\ r,\ s$	$\neg p,\ \neg q,\ r,\ \neg s$
$\neg p,\ q,\ \neg r,\ \neg s$	$\neg p,\ q,\ \neg r,\ s$	$\neg p,\ q,\ r,\ s$	$\neg p,\ q,\ r,\ \neg s$
$p,\ q,\ \neg r,\ \neg s$	$p,\ q,\ \neg r,\ s$	$p,\ q,\ r,\ s$	$p,\ q,\ r,\ \neg s$
$p,\ \neg q,\ \neg r,\ \neg s$	$p,\ \neg q,\ \neg r,\ s$	$p,\ \neg q,\ r,\ s$	$p,\ \neg q,\ r,\ \neg s$

Példa



DNF: $(\neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$
KNF: $(\neg q \vee r) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee \neg q)$

Példa - ekvivalens átalakítások

Egyszerűsítsük a következő formulát: $p \vee q \supset r \equiv (p \supset q) \supset (p \supset r)$!

- $(\neg(p \vee q) \vee r) \equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r))$
- $(\neg(p \vee q) \vee r) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r))$
- $(\neg(p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$
- $(\neg(p \vee q) \vee r) \equiv (\neg q \vee \neg p \vee r)$
- $((\neg(p \vee q) \vee r) \supset (\neg q \vee \neg p \vee r)) \wedge ((\neg q \vee \neg p \vee r) \supset (\neg(p \vee q) \vee r))$
- $(\neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg(\neg q \vee \neg p \vee r) \vee \neg(p \vee q) \vee r)$
- $(((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge ((q \wedge p \wedge \neg r) \vee \neg(p \vee q) \vee r)$
- $((p \vee q \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg p \vee r)) \wedge ((q \wedge p \wedge \neg r) \vee \neg(p \vee q) \vee r)$
- $((q \wedge p \wedge \neg r) \vee \neg(p \vee q) \vee r)$
- $(q \vee \neg(p \vee q) \vee r) \wedge (p \vee \neg(p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg(p \vee q) \vee r)$
- $(q \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (p \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r)$
- $(q \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee r) \wedge (p \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p \vee r)$
- $(q \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p \vee r) \Leftrightarrow r \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Példa - Karnaugh táblázat

Egyszerűsítsük a következő formulát: $p \vee q \supset r \equiv (p \supset q) \supset (p \supset r)$!

1	1	1	0
0	1	1	1

$r \vee \neg p \wedge \neg q \vee p \wedge q$