A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

6. előadás, Boole-függvények, Post tétele

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

Boole-függvény

Az $f : \{0,\ 1\}^n \to \{0,\ 1\}$ függvényt Boole függvénynek nevezzük.
Boole függvények száma:

0	1	2	3	4
2	4	16	256	65536

az igazságtáblázat minden mezőjébe 2 érték kerülhet: 2^{2^n}

egyargumentumú függvények

x	a	b	c	d
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

a: $\perp$ (azonosan hamis)
b: azonosság
c: **negáció**
d: $\top$ (azonosan igaz)

kétargumentumú függvények

x	y	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f: konjunkció
k: XOR (kizáró vagy, $\oplus$)
l: diszjunkció
m: NOR (Pierce nyila)
n: ekvivalencia
r: implikáció
s: NAND (Sheffer vonás)

Függvényosztályok

Legyen $\mathbf{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ és $\mathbf{y} = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$.
Azt mondjuk, hogy $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, ha $x_i \leq y_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

Lineáris

Azt mondjuk, hogy az $f : \{0,\ 1\}^n \to \{0,\ 1\}$ függvény lineáris, ha $f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \wedge x_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \wedge x_n$ valamely α esetén, ahol $\alpha_i \in \{0,\ 1\}$.
Lineáris függvények: a, b, c ($\neg$), d, e ($\perp$), h, j, k (XOR), n ($\equiv$), o, q, t ($\top$)

Monoton

Az $f : \{0,\ 1\}^n \to \{0,\ 1\}$ függvényt monotonnak nevezzük, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,\ 1\}^n$ és $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ esetén $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$
Monoton függvények: a, b, d, e ($\perp$), f ($\wedge$), h, j, l ($\vee$), t ($\top$)

Függvényosztályok

Konstans-őrzők

Azt mondjuk, hogy az $f : \{0,\ 1\}^n \to \{0,\ 1\}$ függvény
megőrzi a 0 konstanst, ha $f(0, \ldots, 0) = 0$.
0 konstanst őrző függvények: a, b, e($\bot$), f ($\wedge$), g, h, i, j, k (XOR), l ($\vee$)
Azt mondjuk, hogy az $f : \{0,\ 1\}^n \to \{0,\ 1\}$ függvény
megőrzi az 1 konstanst, ha $f(1, \ldots, 1) = 1$.
1 konstanst őrző függvények: b, d, f ($\wedge$), h, j, l ($\vee$), n ($\equiv$), p, r ($\supset$), t ($\top$),

Önduális

Azt mondjuk, hogy az $f : \{0,\ 1\}^n \to \{0,\ 1\}$ függvény önduális,
ha $\neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$.
Önduális függvények: b, c, h, j, o, q.

Funkcionális teljesség

Definíció

Boole-függvények egy halmaza funkcionálisan teljes, ha ezen függvények szuperpozíciójaként (értsd: tetszőleges kompozíciójaként) minden Boole-függvény
($n \geq 1$) előállítható.

Post teljességi kritérium (1941)

Függvények egy osztálya pontosan akkor funkcionálisan teljes, ha nem része a lineáris, a monoton, az önduális, a 0 konstanst és az 1 konstanst őrző függvényosztályok egyikének sem.

Minimális teljes függvényosztályok (bázis)

- egyelemű: $\{\text{NAND}\}$, $\{\text{NOR}\}$
- kételemű: $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \supset\}$, $\{\perp, \supset\}$
- háromelemű: $\{\vee, \equiv, \perp\}$, $\{\wedge, \equiv, \perp\}$

DNF átalakítása