A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

7. előadás, szekvent kalkulus

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

Szekvent kalkulus

Az igazságtáblák segítségével meghatározhatóak az érvényes formulák, viszont ha a túl sok a nemlogikai konstans, akkor ezek megkonstruálása még a számítógépek számára is körülményes.
Vizsgáljunk meg egy **szintaxison** alapuló módszert!

Definíció

Ha Γ és Δ két (esetleg üres) formulahalmaz, akkor a $\Gamma \vdash \Delta$ egy szekvent.
A szekvent kalkulus axiómái a következő alakúak: $\Gamma \cup \{A\} \vdash \Delta \cup \{A\}$, ahol A egy atomi formula, Γ és Δ pedig formulahalmazok.
Legyen S a $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent, ahol $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ és $\Delta = \{B_1, \ldots, B_m\}$;
Az S szekvent érvényes, ha minden olyan ϱ interpretáció esetén, ahol $|A_1|_\varrho = \cdots = |A_n|_\varrho = 1$ akkor $|B_i|_\varrho = 1$ valamely i-re.

Megjegyzés

Ha egy szekvent nem érvényes – azaz *cáfolható* –, akkor van olyan ϱ interpretáció, melyre $|A_1|_\varrho = \cdots = |A_n|_\varrho = 1$, míg $|B_1|_\varrho \cdots = |B_m|_\varrho = 0$.

Levezetési szabályok

Az egyszerűség kedvéért a $\Gamma \cup \{A\}$ jelölés helyett a „Γ, A” rövidítést használjuk a későbbiekben. A felső szekventre/szekventekre, mint a levezetés szabály premisszájára/premisszáira, míg az alsó szekventre, mint a levezetési szabály konklúziójára hivatkozunk.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta,\ A \qquad \Gamma \vdash \Delta,\ B}{\Gamma \vdash \Delta,\ A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma,\ A,\ B \vdash \Delta}{\Gamma,\ A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta,\ A,\ B}{\Gamma \vdash \Delta,\ A \vee B} \qquad \frac{\Gamma,\ A \vdash \Delta \qquad \Gamma,\ B \vdash \Delta}{\Gamma,\ A \vee B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash \Delta,\ B}{\Gamma \vdash \Delta,\ A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta,\ A \qquad \Gamma,\ B \vdash \Delta}{\Gamma,\ A \supset B \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta,\ \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta,\ A}{\Gamma,\ \neg A \vdash \Delta}$$

Helyes levezetési szabályok

Tétel

Ha a levezetési szabály premisszája/premisszái érvényes(ek), akkor a konklúziója is.

Lemma

Ha egy ϱ interpretáció cáfolja a levezetési szabály konklúzióját, akkor cáfolja a levezetési szabály valamely premisszáját is.

Tétel

A szekvent kalkulus axiómái érvényesek.

Bizonyítás

Ha a ϱ modellje a szekvent első formulahalmazának, akkor az abban szereplő atomi formulák halmazának is modellje. Ezek közül egy definíció szerint a szekvent második formulahalmazában is szerepel, így a szekvent érvényes.

Levezetési fa

A levezetési fa egy olyan fa, melynek csúcsaiban szekventek állnak, és a levezetési szabályok szerint épül a fa.

Definíció

- Legyen $\Gamma \vdash \Delta$ egy szekvent. Ez a szekvent egyben egy levezetési fa is, melynek ez a szekvent a gyökere, sőt egyetlen levele is.
- Legyen F egy levezetési fa, melynek egyik levele a $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent. Tegyük fel, hogy van egy olyan levezetési szabály, melynek a konklúziója ez a szekvent, míg a premisszái a $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ szekventek. Bővítsük az F levezetési fát a $\Gamma \vdash \Delta$ szekvent felett a $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ szekventekkel, így kapjuk a F' levezetési fát, melynek a gyökere az F gyökere, leveleit pedig az F levelei (mínusz $\Gamma \vdash \Delta$) és a $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ szekventek alkotják.

Definíció

A levezetési fa bizonyítás, ha minden levele axióma.

Helyesség

Tétel (helyesség)

A bizonyítás gyökérszekventje érvényes.

Bizonyítás

Tegyük fel indirekt, hogy van egy bizonyítás cáfolható gyökérszekventtel.

- Mivel a gyökér cáfolható, legalább az egyik premisszája cáfolható.
- Strukturális indukcióval belátható, hogy egy cáfolható gyökerű levezetési fának van cáfolható levele.
- Levezetési fa cáfolható levéllel nem bizonyítás.
- Ellentmondáshoz jutottunk, így a gyökérnek érvényesnek kell lenni.

Teljesség

Tétel (teljesség)

Ha az S szekvent érvényes, akkor létezik olyan bizonyítás, melynek a gyökérszekventje S.

Lemma

Ha a szekvent csak atomi formulákat tartalmaz, akkor pontosan akkor érvényes, ha axióma.

Lemma

Bármely levezetési fa kiterjeszthető olyan levezetési fává, melynek levelei csak atomi formulákat tartalmaznak.

Lemma

Bármely érvényes gyökerű levezetési fának csak érvényes levelei vannak.

Teljesség - 2

Bizonyítás

- Legyen S egy érvényes szekvent!
- Terjesszük ki ebből a gyökérből álló levezetési fát maximális levezetési fává!
- A maximális levezetési fa minden levele érvényes és csak atomi formulát tartalmaz.
- Így a levezetési fa minden levele axióma, tehát a levezetési fa bizonyítás.

Cáfoló modell létezése

Tétel

Ha az S szekvent nem bizonyítható, akkor létezik egy interpretáció, mely cáfolja.

Bizonyítás

- Készítsük el S egy maximális levezetési fáját!
- Mivel S nem bizonyítható, létezik egy nem axióma levélszekvent: $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, ahol $A_i \neq B_j$ bármely i, j esetén.
- Definiáljuk a ϱ interpretációt úgy, hogy legyen $|A_i|_\varrho = 1$ és $|B_j|_\varrho = 0$.
- ϱ cáfolja a levél szekventjét, s így a gyökérszekventet is.