A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

8. előadás, elsőrendű logika, szintaxis

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

Nulladrendű nyelv korlátai

Noha az eddig tanult logika néhány helyen nagyon jól használható, sok korlátja van.
Jó lenne logikát használni az aritmetikában, gráfok, adatbázisok esetén, programok specifikációjának megadásakor, valamint a helyességének vizsgálatánál.
Viszont hogyan lehetne nulladrendben kifejezni, hogy *minden prímszám páratlan* vagy hogy az adatbázisban *valamely felhasználónak nincs megadva telefonszáma*?
Sajnos körülményesen, ezért a nulladrendű nyelvünket ki kell terjeszteni.

Szükségünk van

- tartományokra: számok, rekordok, programállapotok (objektumok halmaza)
- konstansokra: névvel rendelkező objektumok (0, π, Józsi)
- tulajdonságokra és relációkra: x prím, $x \leq y$, Bodri bolhás, Jancsi öregebb mint Józsi
- függvényekre: $\sin x$, $x + y$, x anyja
- változókra: $x^2 \geq 0$, $x + x = x^2$
- kvantorokra: Minden szám prím. Van olyan madár, mely nem tud repülni.
- típusokra?
  - ez is lehetséges alternatíva, de mi most nem követjük

Klasszikus elsőrendű nyelv

Definíció (klasszikus elsőrendű nyelv)

Klasszikus elsőrendű nyelven az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ rendezett ötöst értjük, ahol

- $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- $Var = \{x_n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \bigcup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
  - $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
  - $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú $(n = 1, 2, \ldots)$ függvényjelek (műveleti jelek),
  - $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
  - $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú $(n = 1, 2, \ldots)$ predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.

Megjegyzés

A névparaméterek, függvényjelek, állításparaméterek, predikátumparaméterek csak elnevezések. Azt, hogy pontosan mely konkrét konstanst, függvényt, állítást és tulajdonságot/relációt jelölik, majd csak az interpretáció megadásakor derül ki.
Ez hasonló ahhoz, mint amikor egy változót vezet be az ember a programjában, mert ekkor egy elnevezéssel hivatkozunk rá, és majd a program futásakor derül ki, hogy mi az adott változó aktuális értéke.

Klasszikus elsőrendű nyelv - 2

- Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ páronként diszjunktak.
- A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a $Term$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $Var \bigcup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Term$.
- A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
  - $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
  - Ha $t_1,\ t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Form$.
  - Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
  - Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B) \in Form$.
  - Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A, \exists x A \in Form$.

Megjegyzés

A terminusok/termek *elneveznek* egy objektumot, így például számok esetén term lesz a 0, x, $x+2$, vagy a $\sin(x)$.
A formulák pedig *állítanak* valamit ezekről a termekről: $P(x), f(x, g(x)) = 0$ vagy $x + 2 \geq y$.
Természetesen, az hogy melyek ezek a megnevezett objektumok, illetve hogy igazak az előbbi állítások, csak az interpretáció ismeretében eldönthető. Amíg nem tudjuk, hogy mit jelöl a P (páros, vagy esetleg prím), és nem tudjuk, hogy mennyi az x, nem lehet megmondani, hogy érvényes erre a x-re a P tulajdonság, vagy sem.

Elsőrendű atomi formula

Definíció

Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$), akkor az elsőrendű atomi formulák halmazát (jelölés: *AtForm*) az alábbi induktív definíció adja meg:

- $\mathcal{P}(0) \subseteq AtForm$
- Ha $t_1,\ t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in AtForm$
- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, \ldots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, \ldots, t_n) \in AtForm$.

Megjegyzés:

- Az elsőrendű jelzőt, ha félreértést nem okoz, akkor gyakran elhagyjuk, s csak atomi formulákról vagy prímformulákról beszélünk.
- *AtForm* halmaz elemeit elsőrendű atomi formuláknak vagy elsőrendű prímformuláknak nevezzük.

Megjegyzés

Ha $Con = \langle \{0\}, \{+, f\}, \emptyset, \{\leq\} \rangle$, akkor a következő kifejezések atomi formulák: $(0 = 0)$, $(f(x) = 0), f(x) \leq f(y), f(f(x)) \leq y$.

Részformula

Definíció (részformula az elsőrendű nyelvben)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form\rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája.
Az A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz (jelölés: $RF(A)$), amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
- ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
- ha $\forall x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
- ha $\exists x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$.

Definíció (közvetlen részformula az elsőrendű nyelvben)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv.

- Ha A elsőrendű atomi formula, akkor nincs közvetlen részformulája;
- $\neg A$ egyetlen közvetlen részfomulája A;
- Az $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.
- $\forall x A$ egyetlen közvetlen részformulája A;
- $\exists x A$ egyetlen közvetlen részformulája A.

Részformula definíciója közvetlen részformulák segítségével elsőrendű nyelv esetén)

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája.
Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz (jelölés: $RF(A)$), amelyre teljesül, hogy

- $A \in RF(A)$, (azaz az A formula részformulája önmagának);
- ha $B \in RF(A)$ és C közvetlen részformulája B-nek, akkor $C \in RF(A)$ (azaz, ha egy B formula részformulája A-nak, akkor B összes közvetlen részformulája is részformulája A-nak).

Szerkezeti fa elsőrendű nyelv esetén

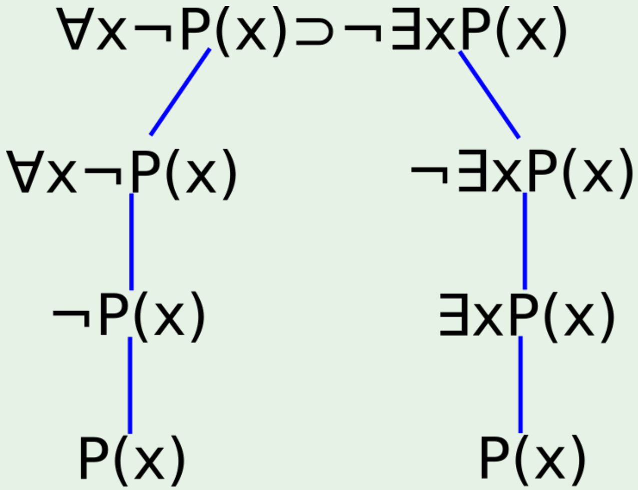
Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája.
Az *A* formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk,

- amelynek csúcsai formulák,
- gyökere az A formula,
- $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $(B \supset C), (B \wedge C), (B \vee C), (B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B, illetve a C formulák alkotják,
- $\forall x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $\exists x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- levelei prímformulák (atomi formulák).

Szerkezeti fa

Példa



Szabad változók halmaza

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.
Az A formula szabad változóinak $FreeVar(A)$-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $FreeVar(A)$ halmaz elemei az A formulában előforduló változók.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B)$.
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B) \bigcup FreeVar(C)$.
- Ha az A formula $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B) \setminus \{x\}$.

Szabad változók halmaza - 2

Megjegyzés

- Az induktív definíció bázisát az első szabály adja meg.
- A szabad változónak van legalább egy szabad előfordulása a formulában.
- Egy formula szabad illetve kötött változóinak a halmazai nem feltétlenül diszjunkt halmazok.
  Például:
  $FreeVar((P(x) \wedge \exists x R(x))) = \{x\} = BoundVar((P(x) \wedge \exists x R(x)))$

Példa

A $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ kifejezésben i és j szabadon megválasztható. A k értékére nincs befolyásunk. Ezért ebben a kifejezésben i és j szabad, míg k kötött.
Hasonlóképpen az alábbi programrészletben a ciklusmagban az i és j értéke szabadon módosítható, viszont a k (mint ciklusváltozó) értékének megváltoztatása ellenjavallt.

```
for k in range(10):
    s += a[i][k] * b[k][j]
```

Kötött változók halmazai

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.

Az A formula kötött változóinak $BoundVar(A)$-val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $BoundVar(A) = \emptyset$.
- Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B)$.
- Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \bigcup BoundVar(C)$.
- Ha az A formula $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \bigcup \{x\}$.

Kötött változók halmazai - 2

Megjegyzés

- Az induktív definíció bázisát az első szabály adja meg.
- Kötött változók a formula azon változói lesznek, amelyek előfordulnak kvantort közvetlenül követő pozícióban.
- A kötött változónak van legalább egy kötött előfordulása a formulában.
- Egy formula szabad illetve kötött változóinak a halmazai nem feltétlenül diszjunkt halmazok.
  Például:
  $FreeVar((P(x) \wedge \exists x R(x))) = \{x\} = BoundVar((P(x) \wedge \exists x R(x)))$

Változó előfordulások

Definíció (változó szabad előfordulása)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.
Az x változó valamely A-beli előfordulását szabadnak nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall xB$ vagy $\exists xB$ alakú részformulájába.

Definíció (változó kötött előfordulása)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.
Az x változó valamely A-beli előfordulását kötöttnek nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

Nyílt és zárt formula

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.
Ha $FreeVar(A) \neq \emptyset$, akkor az A formulát nyílt formulának nevezzük.
Ha az A formula nem nyílt, akkor zárt formulának nevezzük.

Megjegyzés

- A nyílt formulákat nyitott formuláknak is szokták nevezni.
- Ha A nyílt formula, akkor legalább egy változó legalább egy helyen szabadon fordul elő benne.
- Ha A zárt formula, akkor $FreeVar(A) = \emptyset$.
- Ha A zárt formula, akkor egyetlen változó sem fordul elő benne szabadon, minden változó minden előfordulása kötött.

Példa

Az alábbi programrészlet összegzi az `a` kétdimenziós tömb elemeit. Ha ez a tömb nem változik, a rutin minden végrehajtása ugyazt az eredményt adja.

```
s = 0
for i in range(10):
    for j in range(10):
        s += a[i][j]
return s
```

Az alábbi rutin a `b` tömb egyik oszlopában szereplő értékeket összegzi. Ha más és más az l változó értéke, akkor a rutin más és más értékeket szolgáltathat.

```
z = 0
for k in range(10):
    z += b[k][l]
return z
```

Zárójelelhagyási konvenciók

Az elsőrendű logikában alkalmazott zárójelelhagyási konvenciók a nulladrendű logikában alkalmazott zárójelelhagyási konvenciók kibővítése a következő szabályokkal:

- a kvantorok erősebbek bármely állításlogikai műveletnél,
- az univerzális és az egzisztenciális kvantor egyenrangú (azaz erősségben egyik sem előzi meg a másikat).

Formulaátalakítás – behelyettesíthetőség

Az elsőrendű nyelvben is lehetőség van arra, hogy a formulákat könnyebben kezelhető alakra hozzuk.
Az alábbi definíciókban legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula, $x, y \in Var$ két változó és $t \in Term$ egy terminus.

Definíció - változó változóval való helyettesíthetősége

Az A formulában az x változó behelyettesíthető y változóval, ha az A formulában az x változó egyetlen szabad előfordulása sem esik az A formula valamely $\forall yB$ vagy $\exists yB$ alakú részformulájába.

Definíció - változó terminussal való helyettesíthetősége

Az A formulában az x változó behelyettesíthető a t terminussal, ha az A formulában az x változó behelyettesíthető minden olyan változóval, amely a t terminusban előfordul.

Formulaátalakítás – behelyettesíthetőség

Definíció behelyettesítés eredménye

Tegyük föl, hogy az A formulában az x változó behelyettesíthető a t terminussal. Ekkor az $[A]_x^t$ kifejezéssel jelöljük azt a formulát, amely úgy keletkezik az A formulából, hogy benne az x változó *minden szabad* előfordulását a t terminussal helyettesítjük.
Más jelölés: $A^{t/x}, A(x\|t), A(^x_t)$

Megjegyzés

A behelyettesítés során a behelyettesítés eredményeként létrejött formula általában nem logikailag ekvivalens az eredeti formulával.

Formulaátalakítás – átnevezés

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A, B, C \in Form$ három formula, $x, x_1, y, y_1, z, z_1 \in Var$ hat változó.

- Ha az A formula $\forall x A_1$ alakú ($A_1 \in Form$), valamint az A_1 formulában az x változó behelyettesíthető az x_1 változóval, és $x_1 \notin FreeVar(A_1)$, akkor a $\forall x_1 [A_1]_x^{x_1}$ formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.
- Ha az A formula $\exists x A_1$ alakú ($A_1 \in Form$), valamint az A_1 formulában az x változó behelyettesíthető az x_1 változóval, és $x_1 \notin FreeVar(A_1)$, akkor a $\exists x_1 [A_1]_x^{x_1}$ formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.

Definíció - átnevezés (folytatás)

Ha

- a $\forall yB$ formula egy olyan részformulája az A formulának, amely különbözik A-tól,
- a $\forall y_1[B]_y^{y_1}$ formula a $\forall yB$ formula szabályosan végrehajtott átnevezése (következésképpen teljesül, hogy a B formulában a y változó behelyettesíthető az y_1 változóval, és $y_1 \notin FreeVar(B)$),
- az A' formula úgy keletkezik az A formulából, hogy A-ban a $\forall yB$ formula valamely előfordulását a $\forall y_1[B]_y^{y_1}$ formulával helyettesítjük,

akkor az A' formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.

Definíció - átnevezés (folytatás)

Ha

- a $\exists zC$ formula egy olyan részformulája az A formulának, amely különbözik A-tól,
- a $\exists z_1[C]_z^{z_1}$ formula a $\forall zC$ formula szabályosan végrehajtott átnevezése (következésképpen teljesül, hogy a C formulában a z változó behelyettesíthető az z_1 változóval, és $z_1 \notin FreeVar(C)$),
- az A'' formula úgy keletkezik az A formulából, hogy A-ban a $\exists zC$ formula valamely előfordulását a $\exists z_1[C]_z^{z_1}$ formulával helyettesítjük,

akkor az A'' formula az A formula szabályosan végrehajtott átnevezése.

Kongruens formulák

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy formula.
Az A formulával kongruens formulák $Cong(A)$-val jelölt halmazát az alábbi induktív szabályrendszer adja meg:

- $A \in Cong(A)$ (minden formula kongruens saját magával)
- ha $B \in Cong(A)$ és B' formula a B szabályosan végrehajtott átnevezése, akkor $B' \in Cong(A)$;

Kongruens formulák

A $Cong(A)$ halmaz segítségével értelmezhetjük a formulák közötti kongruencia relációt.

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula.
Ha $B \in Cong(A)$, akkor az A formula kongruens a B formulával.

Szintaktikai szinonima

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két formula.
Ha $B \in Cong(A)$, akkor a B formulát az A formula szintaktikai szinonimájának nevezzük.

Tétel

A formulák között értelmezett kongruencia reláció ekvivalencia reláció, azaz:

- reflexív: $A \in Cong(A)$;
- szimmetrikus: ha $B \in Cong(A)$, akkor $A \in Cong(B)$;
- tranzitív: ha $B \in Cong(A)$ és $C \in Cong(B)$, akkor $C \in Cong(A)$.

Tétel

A kongruens formulák logikailag ekvivalensek, azaz ha $B \in Cong(A)$, akkor $A \Leftrightarrow B$.