A logika és a számítástudomány alapjai mérnök informatikus hallgatóknak

9. előadás, elsőrendű logika, szemantika

Mihálydeák Tamás, Aszalós László

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

2019. november 4.

1. Szemantika

Interpretáció

Definíció

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ elsőrendű nyelv egy interpretációjának nevezzük, ha

- $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
- $Dom(\varrho) = Con$, azaz a ϱ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
  - Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n) \quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $\varrho(f) : U^{(n)} \to U)$;
  - Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n) \quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$.

Értékelés

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\langle U, \varrho \rangle$ pedig a nyelv egy interpretációja.
Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelésen egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

- $Dom(v) = Var$;
- Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

Megjegyzés

Az értékelésen egy $v : Var \to U$ függvényt értünk.

Módosított értékelés

Definíció

Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v[x:u](y) = \begin{cases} u, & \text{ha } y = x; \\ v(y), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyzés

Az módosított értékelésen egy olyan $v[x:u] : Var \to U$ függvényt értünk, amely legfeljebb az x változóhoz rendelt értékben különbözik a v értékeléstől. Az x változóhoz az u értéket rendeli, azaz $v[x:u](x) = u$.

Példa

Tipikus kérdés, hogy mit ír ki az alábbi program. Itt a *k* változó két példánya jelenik meg, és semmi közük egymáshoz. A belső változó értéke független a külsőtől, így ha a zárójelben szereplő kifejezés (*k*) értékét kívánjuk kiszámítani, akkor a (belső) változó értékét kell figyelembe venni, így a szimbólumtáblában szereplő bejegyzések erre utalnak. A (rejtett) cikluson kívül természetesen már a külső változó értéke számít.

```
k = 3
s=sum([k for k in range(5)])
print(k,s)
```

Elsőrendű szemantikai szabályok

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form\rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\langle U, \varrho\rangle$ a nyelv egy interpretációja, v pedig az $\langle U, \varrho\rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

- Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $|a|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(a)$.
- Ha $x \in Var$, akkor $|x|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = v(x)$.
- Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, \ldots)$, és $t_1, \ldots, t_n \in Term$, akkor

$$|f(t_1, \ldots, t_n)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(f)(|t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle}, \ldots, |t_n|_v^{\langle U,\varrho\rangle})$$

- Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $|p|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(p)$
- Ha $t_1,\ t_2 \in Term$, akkor

$$|(t_1 = t_2)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |t_2|_v^{\langle U,\varrho\rangle} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Elsőrendű szemantikai szabályok - 2

Definíció (folytatás)

- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathit{Term}$, akkor

$$|P(t_1, \ldots, t_n)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \langle |t_1|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, \ldots, |t_n|_v^{\langle U, \varrho \rangle} \rangle \in \varrho(P); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $A \in \mathit{Form}$, akkor $|\neg A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1 - |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle}$.

Elsőrendű szemantikai szabályok - 3

Definíció (folytatás)

- Ha $A, B \in Form$, akkor
  - $$|(A \supset B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
  - $$|(A \wedge B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
  - $$|(A \vee B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
  - $$|(A \equiv B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle}; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Elsőrendű szemantikai szabályok - 4

Definíció (folytatás)

- Ha $A \in Form, x \in Var$, akkor
  - $$|\forall x A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{ha van olyan } u \in U \text{, hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
  - $$|\exists x A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan } u \in U \text{, hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Elsőrendű szemantika alaptételei

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form\rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho\rangle$ egy elsőrendű interpretáció és v egy $\langle U, \varrho\rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.
Ekkor az $|A|_v^{\langle U,\varrho\rangle}$ érték egyértelműen meghatározott.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form\rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \varrho\rangle$ egy elsőrendű interpretáció és v_1, v_2 két $\langle U, \varrho\rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.
Ha minden $x \in FreeVar(A)$ esetén $v_1(x) = v_2(x)$, akkor $|A|_{v_1}^{\langle U,\varrho\rangle} = |A|_{v_2}^{\langle U,\varrho\rangle}$.

Következmény

A zárt formulák értéke független az értékelés megválasztásától, azaz zárt formulák értékét az interpretáció egyértelműen meghatározza.

Modell

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
Az $\langle U, \varrho, v \rangle$ rendezett hármas elsőrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha

- $\langle U, \varrho \rangle$ egy interpretációja az $L^{(1)}$ nyelvnek;
- v egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés;
- minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$.

Megjegyzés

Az elsőrendű nyelv egy adott formulahalmazának a(z elsőrendű) modellje a nyelv egy (elsőrendű) interpretációjának és az interpretációra támaszkodó értékelésnek olyan együttese, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.

Modell

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az *A formula modelljén* az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

Kielégíthetőség

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
A Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van (elsőrendű) modellje.

Megjegyzés

- A Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van olyan (elsőrendű) interpretáció és az interpretációra támaszkodó értékelés, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.
- Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.
- Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.

Kielégíthetőség - 2

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az *A* formula kielégíthető, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

Megjegyzés

- Az A formula kielégíthető, ha van olyan (elsőrendű) interpretáció és az interpretációra támaszkodó értékelés, amelyben a formula igaz.
- Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.

Kielégíthetetlenség

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz.
A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz nincs modellje.

Megjegyzés

- A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nincs olyan (elsőrendű) interpretáció és az interpretációra támaszkodó értékelés, amelyben a formulahalmaz **minden** eleme igaz.
- Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak.

Kielégíthetetlenség

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Az A formula kielégíthetetlen, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

Megjegyzés

Ha az A formula kielégíthetetlen, ha nincs olyan (elsőrendű) interpretáció és az interpretációra támaszkodó értékelés, amelyben a formula igaz, azaz minden (elsőrendű) interpretáció és az interpretációra támaszkodó minden értékelés esetén a formula hamis értékű.

Logikai következmény

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz, és $A \in Form$ egy formula.
A Γ formulahalmaznak logikai következménye az A formula, ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.
Jelölés: $\Gamma \models A$

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Term, Con, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv és $A, B \in Form$ két tetszőleges formula.
Az A formulának logikai következménye a B formula, ha a $\{A\} \models B$.
Jelölés: $A \models B$

Érvényes

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.
Az *A formula érvényes*, ha $\emptyset \models A$, azaz ha az A formula logikai következménye az üres halmaznak.
Jelölés: $\models A$

Ekvivalens

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form\rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A, B \in Form$ két formula.

Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \models B$ és $B \models A$.

Jelölés: $A \Leftrightarrow B$