Informatikai rendszerek felépítése, modellezése, analízise és megvalósítása

Dr. Sztrik János

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar

Lektorálta:
Dr. Bíró József
MTA doktora, egyetemi tanár

A tanagyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta.
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Jelen jegyzetet feleségemnek ajánlom, aki nélkül ez a munka sokkal hamarabb elkészült volna.

- Ha valami egyszer elromolhat, akkor el is fog romlani.
- A szakértői rendszerek arról ismerhetők fel, hogy abból az ismeretből, miszerint "egy rózsa illatosabb, mint egy káposztafej", azt a következtetést vonják le, hogy a rózsából jobb levest is lehet főzni.
- Minél kevesebb funkciója van egy programnak, annál tökéletesebben hajtja végre azokat.
- Az a vírus, amelyik megtámadta gépedet csak azokat az állományokat fertőzi meg, amelyekről nincsenek biztonsági másolataid.
- Hibátlan program megírása olyan, mint a kör négyszögesítése. Mindenki azt hiszi, hogy lehetséges, de ilyent még senki sem látott.
- Ha egy rövid sor felé haladsz, az orrod előtt hosszú lesz belőle.
- Ha hosszú sorban várakozol, a mögötted állókat új, rövidebb sorba terelik át.
- Ha kilépsz egy pillanatra a rövid sorból, azonnal meghosszabbodik.
- Ha rövid sorban várakozol, az előtted állók beeresztik barátaikat és rokonaikat, így lesz hosszú sor belőle.
- Az, ami rövid sor az épületen kívül, valójában hosszú sor az épületen belül.
- Ha elég hosszú ideig állsz egy helyben, sorbanállást idézel elő.

(Arthur Block: Murphy törvénykönyve)

Tartalomjegyzék

Előszó

A mindennapi élet egyre több cselekvését átszövő modern infokommunikáció állandó fejlesztésre ösztönzi a szakembereket. Az informatikai rendszerek sok alkalmazási területet ölelnek fel, többek között a fent említett infokommunikációs hálózatokat. A kiszolgálási rendszerek hatékonyságának, megbízhatóságának elemzése az alkalmazott matematika egyik legdinamikusabban fejlődő területe. A gyakorlatban felmerülő problémák újabb és újabb módszerek kidolgozását igénylik.

Jelen jegyzetben a megbízhatóság-elméleti és sorbanállási problémákra koncentrálva a legfontosabbnak ítélt eljárásokat és megközelítéseket tárgyalom. Az összeállított anyag csupán alapvető valószínűségszámítási ismereteket tételez fel. Próbálok betekintést nyújtani a modellalkotásba, a képletek származtatásába, kiszámításába és az eredmények kiértékelésébe. A jegyzetben tárgyalt alapok feltétlenül szükségesek az erre épülő, a hálózatok hatékonysági vizsgálataival foglalkozó anyagnak.

A jegyzet elsődleges célja, hogy az olvasókat megismertessem a sztochasztikus modellezés alapvető fogalmaival, eszközeivel és eljárásaival. Fontos szerep jut a szemléletmód kialakításának hiszen értelmes választ csak értelmes kérdésre lehet adni.

Alapvetően az alapképzésben résztvevő mérnök informatikus, programtervező informatikus, gazdaságinformatikus, alkalmazott matematikus hallgatóknak készült, de utolsó fejezeteit mesterszakos hallgatók is jól használhatják. Kiforrott, átszerkesztett összeállítás, hiszen korábbi időszakban több éven át oktattam hasonló tematikát és a módosításokat a 2017-ben induló új képzési program tette szükségessé. Meggyőződésem és tapasztalatom, hogy a jegyzet hiánypótló. Gyakorlati foglalkozások keretében lehetőséget ad az egyszerű számonkérésekre, de bőven tartalmaz feladatokat a jobb képességű hallgatók számára is. Példákon keresztül lehet megérteni a tárgyalt fogalmakat és a Feladatgyűjteményben található problémák házi feladatnak adhatók fel. Segítségképpen a megoldás is adott, de remélhetőleg a hallgatók először maguk próbálják megoldani a feladatokat.

Köszönöm Bíró József egyetemi tanár lelkiismeretes lektori munkáját, amely javította a jegyzet tartalmát és formáját. Az előforduló hibákra vonatkozó észrevételeket és mindenfajta javító szándékú megjegyzést örömmel veszek az alábbi címen:

`sztrik.janos@inf.unideb.hu, http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik`

Debrecen, 2018.

A Szerző

I. rész

Informatikai rendszerek felépítése, modellezése és analízise

1. fejezet

Valószínűségszámítási alapok

Sztochasztikus modellezés elképzelhetetlen valószínűségszámítási módszerek nélkül. Az a tapasztalatom, hogy érdemes a legfontosabb fogalmakról, tételekről egy rövid összefoglalót adni, mert a hallgatók esetleg más szinten és különböző megközelítésben tanulták ezt a tantárgyat. Csak azokat a tételeket sorolom fel, amiket többször használok majd és esetleg az alapozó oktatásnál nem került sor az ismertetésükre. Magyarországon bőséges forrás áll rendelkezésünkre, akár nyomtatott akár pedig digitális anyagokat tekintünk. Úgy gondolom, hogy Prékopa András [9] és Rényi Alfréd [11] klasszikus könyve minden intézményben megtalálható. Digitális formában számos jegyzetet és könyvet lehet letölteni mind magyar, mind pedig angol nyelven.

1.1. Valószínűségszámítási összefoglaló

1. Tétel (Teljes valószínűség tételének főbb alakjai). *Legyen $B_1, B_2, \dots$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, A pedig tetszőleges esemény. Ekkor*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i). \tag{1.1}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F(x|B_i)P(B_i)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x|B_i)P(B_i)$$

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x|y)f_\eta(y)\mathrm{d}y$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi|\eta}(x|y)f_\eta(y)\mathrm{d}y$$

$$P(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(A|\eta = y) f_\eta(y) \mathrm{d}y,$$

ahol

$$f(x, y) \text{ az együttes sűrűségfüggvény,}$$

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)} \text{ a feltételes sűrűségfüggvény,}$$

$$F_{\xi|\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi|\eta}(t|y) \mathrm{d}t \text{ pedig a feltételes eloszlásfüggvény.}$$

2. Tétel (Bayes-tétel). *Legyen $B_1, B_2, \ldots$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, A pedig tetszőleges, pozitív valószínűségű esemény. Ekkor*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $p_k = P(\xi = x_k)$, k=1,2,..., eloszlású ξ valószínűségi változónak van véges várható értéke, ha a $\sum_k p_k x_k$ sor abszolút konvergens. Ekkor a ξ* **várható értéke**

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k.$$

2. Definíció. *Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$. Ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$ véges akkor azt mondjuk, hogy ξ-nek létezik véges* **várható értéke**. *Ekkor az*

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

által meghatározott mennyiség létezik és véges. Az $\mathbb{E}\xi$ számot ξ várható értékének nevezzük.

Bizonyítás nélkül felsoroljuk a várható érték főbb tulajdonságait.
Hogyha $\mathbb{E}\xi, \mathbb{E}\eta < \infty$, akkor

1. $\mathbb{E}(\xi + \eta)$ is létezik, és $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$,
2. $\mathbb{E}(c\xi)$ is létezik, és $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}\xi$,
3. $\mathbb{E}(\xi\eta)$ is létezik, és $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$, ha ξ és η függetlenek,
4. $\mathbb{E}(a\xi + b)$ is létezik, és $\mathbb{E}(a\xi + b) = a\mathbb{E}\xi + b$,
5. $(\mathbb{E}(\xi\eta))^2$ is létezik, és $(\mathbb{E}(\xi\eta))^2 \le \mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2$, ha léteznek a második momentumok,

6. Ha $\xi \geq 0$, akkor $\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F(x))dx, \qquad \mathbb{E}X = \sum_{k=1}^\infty P(\xi \geq k)$.

3. Tétel (A teljes momentum tétel). *A teljes momentum tétel leggyakrabban használt alakja*

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi^n | B_i) P(B_i),$$

ahol $\mathbb{E}(\xi^n|B_i)$ *a feltételes* n *-edik momentum. Használatos még az*

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(\xi^n | \eta = y) f_\eta(y) \mathrm{d}y$$

alak is. $n = 1$ *esetben a teljes várható érték tételét kapjuk.*

3. Definíció (Szórásnégyzet). *Legyen* ξ *valószínűségi változó, tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}\xi = m$ *létezik és véges. A*

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi - m)^2$$

mennyiséget(feltéve, hogy véges) ξ **szórásnégyzetének** *nevezzük.*

Igazak a következőek

1. Ha $\mathbb{D}^2\xi < \infty$ akkor $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi$.
2. $\mathbb{D}^2(a\xi + b) = a^2\mathbb{D}^2\xi$ bármely a,b $\in \mathbb{R}$ esetén.
3. $\mathbb{D}^2\xi \geq 0$; $\mathbb{D}^2\xi = 0$ akkor és csak akkor, ha $P(\xi = \mathbb{E}\xi) = 1$.

4. Definíció (Relatív szórásnégyzet). *A* $C_\xi^2 = \frac{\mathbb{D}^2\xi}{(\mathbb{E}\xi)^2}$ *mennyiséget a* ξ **relatív szórásnégyzetének, vagy szóródási együttható négyzetének** *nevezzük.*

1.2. Nevezetes diszkrét eloszlások

Binomiális eloszlás

A ξ valószínűségi változót n-ed rendű, p paraméterű, vagy (n, p) paraméterű **binomiális eloszlásúnak** nevezzük, ha a k számokat rendre

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$$

valószínűséggel veszi fel. Jelölése: $\xi \in B(n, p)$.
Bebizonyítható, hogy

$$\mathbb{E}\xi = np, \quad \mathbb{D}^2\xi = np(1-p), \quad C_\xi^2 = \frac{1-p}{np}.$$

Ha n=1, akkor ξ-t **Bernoulli-eloszlásúnak** nevezzük.

Poisson-eloszlás

A ξ valószínűségi változót λ paraméterű **Poisson-eloszlásúnak** nevezzük, ha a valószínűségi változó a k számokat rendre

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, \ldots$$

valószínűséggel veszi fel. Jelölése: $\xi \in Po(\lambda)$.
Jól ismert, hogy

$$\mathbb{E}\xi = \lambda, \quad \mathbb{D}^2\xi = \lambda, \quad C_\xi^2 = \frac{1}{\lambda}.$$

Meg lehet mutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0, np\to\lambda} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

vagyis a binomiális eloszlást jól lehet közelíteni a Poisson-eloszlással. Ez a közelítés annál jobb, minél közelebb van a p a nullához. Egy elfogadott szabály a közelítésre $n \geq 20$ és $p \leq 0.05$.

Geometriai eloszlás

A ξ valószínűségi változót p paraméterű **geometriai eloszlásúnak** nevezzük, ha a valószínűségi változó a k számokat rendre

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

valószínűséggel veszi fel. Jelölése: $\xi \in Geo(p)$.
Bebizonyítható, hogy

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1-p}{p^2}, \quad C_\xi^2 = 1 - p.$$

A $\xi^* = \xi - 1$ valószínűségi változót p paraméterű **módosított geometriai eloszlásnak** nevezzük. Ekkor

$$P(\xi^* = k) = p(1-p)^k, k = 0, 1, \ldots$$

$$\mathbb{E}\xi^* = \frac{1-p}{p}, \quad \mathbb{D}^2\xi^* = \frac{1-p}{p^2}, \quad C_{\xi^*}^2 = \frac{1}{1-p}.$$

Konvolúció

5. Definíció. *Legyenek ξ és η független valószínűségi változók $P(\xi = i) = p_i$, $P(\eta = j) = q_j$ eloszlással, $i, j = 0, , 1, 2....$ Ekkor a $\zeta = \xi + \eta$ eloszlása*

$$P(\zeta = k) = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

melyet a fenti eloszlások **konvolúciójának** *nevezünk, vagyis a $\xi + \eta$ eloszlását határozzuk meg ily módon.*

1. Példa. *Mutassuk meg, hogyha* $\xi \in B(n,p)$, $\eta \in B(m,p)$ *függetlenek, akkor* $\xi + \eta \in B(n+m,p)$ *!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}
P(\xi+\eta=l) &= \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \binom{m}{l-k} p^{l-k} (1-p)^{m-l+k} \\
&= p^l (1-p)^{n+m-l} \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = p^l (1-p)^{n+m-l} \binom{n+m}{l} \\
&= \binom{n+m}{l} p^l (1-p)^{n+m-l}.
\end{aligned}$$

■

2. Példa. *Igazoljuk, hogyha* $\xi \in$*Po*(λ), $\eta \in$*Po*(β) *függetlenen, akkor* $\xi + \eta \in Po(\lambda+\beta)$ *!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}
P(\xi+\eta=l) &= \sum_{k=0}^{l} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\beta^{l-k}}{(l-k)!} e^{-\beta} \\
&= e^{-\lambda-\beta} \sum_{k=0}^{l} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\beta^{l-k}}{(l-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\beta)}}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \lambda^k \beta^{l-k} \\
&= \frac{(\lambda+\beta)^l}{l!} e^{-(\lambda+\beta)}.
\end{aligned}$$

■

3. Példa. *Egy forgalmas áruházba* λ *paraméterű Poisson-eloszlással érkeznek látogatók. Mindegyikből a többitől függetlenül* p *valószínűséggel lesz vásárló. Határozzuk meg a vásárlók számának az eloszlását!*

Megoldás:

Legyen $\xi \in Po(\lambda)$ a látogatók száma, η vásárlók száma. Ekkor teljes valószínűség tétele alapján

$$
\begin{aligned}
P(\eta = n) &= \sum_{k=n}^{\infty} P(\eta = n | \xi = k) \cdot P(\xi = k) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= p^n e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} (1-p)^{k-n} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= p^n e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n!(k-n)!} (1-p)^{k-n} \lambda^n \lambda^{k-n} \\
&= p^n e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \lambda^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} ((1-p)\lambda)^l \\
&= \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^l}{l!} = \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p}
\end{aligned}
$$

Vagyis azt láthatjuk, hogy $\eta \in Po(\lambda p)$.

■

1.3. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

Egyenletes eloszlás

A ξ valószínűségi változót az [a,b] intervallumon **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}
$$

Könnyen látható, hogy eloszlásfüggvénye

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } b < x. \end{cases}
$$

Jelölése: $\xi \in E(a, b)$.

$$
\text{Belátható, hogy } \mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad C_\xi^2 = \frac{(b-a)^2}{3(a+b)^2}.
$$

Megmutatható, hogyha $\xi^* \in E(0,1)$, akkor $\xi = a + (b-a)\xi^* \in E(a,b)$.

A véletlen számok generálásánál fontos szerepet játszik, hogyha $F_\xi^{-1}(x)$ létezik, akkor $\eta = F_\xi(\xi) \in E(0,1)$ és így $\xi = F^{-1}(\eta)$.

Ezt az alábbi módon mutathatjuk meg

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(F_\xi(\xi) < x) = F_\xi(F_\xi^{-1}(x)) = x,$$

vagyis $\eta \in E(0,1)$. Ebből $\xi = F_\xi^{-1}(\eta)$.

Exponenciális eloszlás

A ξ valószínűségi változót λ paraméterű **exponenciális eloszlásúnak** nevezzük ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Ebből pedig eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$ rögzített. Jelölése: $\xi \in Exp(\lambda)$.

Belátható, hogy

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad C_\xi^2 = 1.$$

Erlang-eloszlás

A η_n valószínűségi változót (n, λ) paraméterű **Erlang-eloszlásúnak** nevezzük ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Hosszadalmasabb számolással bebizonyítható, hogy eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

ahol n természetes szám, $\lambda > 0$. Jelölése: $\xi \in Erl(n, \lambda)$, vagy $\xi \in E_n(\lambda)$.

Könnyen látható, hogy $n = 1$ esetben az exponenciális eloszlást kapjuk vissza. Megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(\eta_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad \mathbb{D}^2(\eta_n) = \frac{n}{\lambda^2}, \quad C_{\eta_n}^2 = \frac{1}{n}.$$

Gamma-eloszlás

A ξ valószínűségi változót (α, λ) paraméterű **Γ-eloszlásúnak** nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } x < 0 \\ \\ \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & , \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$, $\alpha > 0$,

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

az úgynevezett teljes gamma-függvény.

Az eloszlásfüggvény explicite nem adható meg, kivéve az $\alpha = n$ esetet.

Jelölése: $\xi \in \Gamma(\alpha, \lambda)$.

Megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad C_\xi^2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Az α -t **alak-paraméternek**, λ -t pedig **skála-paraméternek** szokás nevezni.
$\alpha = n$ esetben az (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlást kapjuk vissza.

Weibull-eloszlás

A ξ valószínűségi változót (λ, α) paraméterű **Weibull-eloszlásúnak** nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } x < 0 \\ \\ \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} & , \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Könnyű látni, hogy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } x < 0 \\ \\ 1 - e^{-\lambda x^\alpha} & , \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$ ú.n. **skála-paraméter**, $\alpha > 0$ ú.n. **alak-paraméter**.
Speciálisan $\alpha = 1$ esetben az exponenciális eloszlást kapjuk vissza.

Jelölése: $\xi \in W(\lambda, \alpha)$. Megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

$$C_{\xi^2} = \frac{2\alpha\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)} - 1.$$

Pareto-eloszlás

A ξ valószínűségi változót (k, α) paraméterű **Pareto-eloszlásúnak** nevezzük, ha sűrűség- és eloszlásfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < k \\ \\ \alpha k^\alpha x^{-\alpha-1} & , x \geq k \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < k \\ \\ 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha & , x \geq k \end{cases}$$

ahol $\alpha, k > 0$.

Jelölése: $\xi \in Par(k, \alpha)$, ahol k a **hely-paraméter**, α pedig az **alak-paraméter**.

Megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = \begin{cases} \frac{k\alpha}{\alpha-1} & , \alpha > 1 \\ \\ \infty & , \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \begin{cases} \frac{k^2\alpha}{\alpha-2} & , \alpha > 2 \\ \\ \infty & , \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Így

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{k^2\alpha}{\alpha - 2} - \left(\frac{k\alpha}{\alpha - 1}\right)^2, \quad C_\xi^2 = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha(\alpha - 2)} - 1, \quad \alpha > 2.$$

Pareto-eloszlást követ például: egy általános processz CPU ideje, valamely file mérete egy Internet-szerveren, valamely web-böngésző gondolkodási ideje. α -ra a következő intervallumokat becsülték az előbb említett jelenségeknél: $[1.05, 1.25]$, $[1.1, 1.3]$, $[0.58, 0.9]$.

Normális eloszlás (Gauss-eloszlás)

A ξ valószínűségi változót (m, σ) paraméterű **normális eloszlásúnak** nevezzük, ha sűrűség- és eloszlásfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Jelölése: $\xi \in N(m, \sigma)$. $F(x)$ -re nincs zárt alakú kifejezés.
Speciálisan, ha $m = 0$, $\sigma = 1$, akkor $\xi \in N(0, 1)$, amit **standard normálisnak** nevezünk. Ekkor ennek sűrűség- és eloszlásfüggvénye

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Be lehet bizonyítani, hogy ha $\xi \in N(m, \sigma)$, akkor

$$P(\xi < x) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

továbbá $\phi(-x) + \phi(x) = 1$. Jól ismert, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2, \quad C_\xi^2 = \frac{\sigma^2}{m^2}.$$

Lognormális eloszlás

Legyen $\eta \in N(m, \sigma)$, akkor a $\xi = e^\eta$ valószínűségi változót **lognormális eloszlásúnak** nevezzük, jelölése $\xi \in LN(m, \sigma)$.

Nem nehéz látni, hogy ekkor

$$P(\xi < x) = P(e^\eta < x) = P(\eta < \ln x)$$

és ebből

$$F_\xi(x) = \phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right), \qquad x > 0,$$
$$f_\xi(x) = \phi'\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma x}\varphi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right), \qquad x > 0.$$

Megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1), \quad C_\xi^2 = e^{\sigma^2} - 1.$$

4. Tétel (Markov-egyenlőtlenség). *Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}\xi < \infty$, $\delta > 0$ tetszőleges szám. Ekkor*

$$P(\xi \geq \delta) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{\delta}.$$

5. Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség). *Tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2\xi < \infty$, $\mathbb{E}\xi = m$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Ekkor*

$$P(|\xi - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}^2\xi}{\varepsilon^2}.$$

6. Tétel (Központi (centrális) határeloszlás-tétel). *Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{D}^2(\xi_i) = \sigma^2 < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_i) = m$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} = P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \phi(x).$$

Speciálisan, ha $\xi_i = \chi_i$, akkor $\xi_1 + \ldots + \xi_n \in B(n,p)$ és így

$$P\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n < x\right) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Ennek lokális alakja

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}.$$

Tapasztalatok azt mutatják, hogy ha $n \geq 10$ és $\frac{9}{n+9} \leq p \leq \frac{n}{n+9}$, akkor a normális eloszlás jó közelítést ad a binomiális eloszlásra.

2. fejezet

A sztochasztikus modellezés alapjai

Ebben a fejezetben a Markovi-szintű modellezésben fontos szerepet játszó alapvető eloszlásokat ismerhetjük meg. Szó esik a megbízhatóság-elméletben előforduló rendszerek sztochasztikus viselkedésének leírásáról és módszereket adunk meg a fontos jellemzők meghatározására. Megmutatjuk hogyan tudunk a szimulációs eljárásokhoz szükséges adott eloszlású véletlen számokat generálni.
Az anyag összeállításában főleg Allen [1], Gnyedenko, Beljajev, Szolovjev [2], Haverkort [3], Jain [4], Jereb, Telek [5], Kleinrock [6], Ovcharov [8], Ravichandran [10], Ross [12], Sztrik [14, 15], Tijms [16], Trivedi [17] könyvekre és egyetemi jegyzetekre támaszkodtunk.

2.1. Az exponencális eloszlással kapcsolatos eloszlások

7. Tétel (Örökifjú tulajdonság). *Ha $\xi \in Exp(\lambda)$ akkor teljesülnek a következő, úgynevezett örökifjú (emlékezetnélküliség) tulajdonságok*

$$
\begin{aligned}
P(\xi < x+y|\xi \geq y) &= P(\xi < x), \qquad x>0, y>0,\\
P(\xi > x+y|\xi \geq y) &= P(\xi > x), \qquad x>0, y>0.
\end{aligned}
$$

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
P(\xi < x+y|\xi \geq y) &= \frac{P(y \leq \xi < x+y)}{P(\xi \geq y)}\\
&= \frac{F(x+y)-F(y)}{1-F(y)} = \frac{1-e^{-\lambda(x+y)}-(1-e^{-\lambda y})}{1-(1-e^{-\lambda y})}\\
&= \frac{e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda x})}{e^{-\lambda y}} = 1-e^{-\lambda x} = F(x) = P(\xi < x)
\end{aligned}
$$

A második forma bizonyítása hasonlóan történik.

■

8. Tétel. *$1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$, ahol $o(h)$(kisordó h) olyan mennyiség ami h-nél gyorsabban tart 0-hoz, azaz $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.*

Bizonyítás:
Mint látható az állítás ekvivalens

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h}{h} = 0$$

val, amit a L'Hospital szabály felhasználásával bizonyítunk be, azaz

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda e^{-\lambda h} - \lambda}{1} = 0.$$

■

9. Tétel. *Ha $F(x)$ a $\xi \geq 0$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, melyre $F(0) = 0$, valamint*

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)} = \lambda h + o(h), \text{ ha } x > 0,$$

akkor $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$.

Bizonyítás:
Látható, hogy a feltételekből

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}}{1 - F(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda h + o(h)}{h} = \lambda$$

összefüggést nyerjük, ebből pedig

$$-\frac{F'(x)}{1 - F(x)} = -\lambda \text{ így } \int \frac{-F'(x)}{1 - F(x)}\, dx = \int -\lambda\, dx$$

$$\ln|1 - F(x)| = -\lambda x + \ln c$$

$$1 - F(x) = ce^{-\lambda x}, \text{ azaz } F(x) = 1 - ce^{-\lambda x}.$$

Felhasználva, hogy $F(0) = 0$ kapjuk, hogy $c = 1$, ezzel pedig

$$F(x) = 1 - e^{\lambda x}.$$

■

Az alkalmazások során nagyon fontos szerepet játszanak az úgynevezett **sorosan vagy párhuzamosan kapcsolt rendszerek**. A soros kapcsolású rendszer élettartama a legkorábban meghibásodó elemének az élettartama, más szavakkal a rendszer addig működik amíg minden eleme működik. A párhurhuzamosan kapcsolt rendszerek élettartama a legtovább működő elemének az élettartama, más szavakkal akkor hibásodik meg ha minden eleme meghibásodott.

10. Tétel (Soros kapcsolású rendszerek). *Ha $\xi_i \in Exp(\lambda_i)$ (i=1,2,…,n) függetlenek, akkor*

$$\eta = min(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

szintén exponenciális eloszlású, mégpedig $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ paraméterrel.

Bizonyítás: Jelen esetben felhasználjuk, hogy a komplementer esemény valószínűségéből hogyan határozhatjuk meg a kérdéses esemény valószínűségét, vagyis

$$\begin{aligned} P(\eta < x) &= 1 - P(\eta \geq x) = 1 - P(\xi_1 \geq x, \dots, \xi_n \geq x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - e^{-\lambda_i x})) = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)x} \end{aligned}$$

■

4. Példa. *Legyen ξ λ , η pedig μ paraméterű független exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy $\xi = min(\xi, \eta)$!*

Megoldás:
$\xi = min(\xi, \eta)$ akkor és csak akkor ha $\xi < \eta$. A teljes valószínűség tételét felhasználva kapjuk, hogy

$$P(\xi < \eta) = \int_0^\infty P(\xi < x) f_\eta(x)\, dx,$$

$$\begin{aligned} P(\xi < \eta) &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) f_\eta(x)\, dx = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \mu e^{-\mu x}\, dx \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu x}\, dx - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)x}\, dx = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

■

5. Példa (Párhuzamos kapcsolású rendszerek). *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, valamint $\eta = max(\xi_1, \dots, \xi_n)$.*
Határozzuk meg η eloszlásfüggvényét!

Megoldás:

$$P(\eta < x) = P(\xi_1 < x, \dots, \xi_n < x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i < x) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x)$$

Ha $\xi_i \in Exp(\lambda_i)$, akkor $F_\eta(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i x})$.

Ha pedig $\lambda_i = \lambda, i = 1, \dots, n$, akkor $F_\eta(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n$

■

6. Példa. *Mi lesz a párhuzamos kapcsolású rendszer élettartamának várható értéke, 2 darab inhomogén, exponenciális eloszlású elem esetén?*

Megoldás:
Oldjuk meg először a példát a definíciót követve! Ekkor

$$\begin{aligned} f_{max(\xi_1,\xi_2)}(x) &= \left[\left(1-e^{-\lambda_1 x}\right)\left(1-e^{-\lambda_2 x}\right)\right]' \\ &= \left(1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 x}+e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\right)' \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(max(\xi_1,\xi_2)) &= \int_0^\infty x f_{max(\xi_1,\xi_2)}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}. \end{aligned}$$

Egyszerű számolással látható, hogy ez tovább írható a következő formulába

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(max(\xi_1,\xi_2)) &= \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)} \\ &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{1}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Nézzük most meg, hogyan oldhatjuk meg ezt a példát rövidebben!

Kezdő állapotban mindkét gép jó és az első meghibásodás várható ideje

$$\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2},$$

míg a második meghibásodás az első meghibásodásától számolva akkor történik ha az első elromlott és utána a második is vagy fordítva amiből az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát és a teljes várható érték tételt felhasználva következik, hogy a második meghibásodás várható ideje az első meghibásodás után

$$\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{1}{\lambda_2}}_{\text{1. volt hibás}}+\underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{1}{\lambda_1}}_{\text{2. volt hibás}}$$

Így az átlagos működési idő

$$\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{1}{\lambda_1}.$$

Homogén esetben ebből $\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda}$ lesz, amint ezt a következő példából is látni fogjuk.
■

7. Példa. *Párhuzamos kapcsolású rendszer esetén mi a rendszer élettartamának várható értéke és szórásnégyzete, ha homogének az elemek, vagyis $\xi_i \in Exp(\lambda)\,, i = 1, \ldots, n$, és függetlenek?*

Megoldás:

$$P(max(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i < x) = (1 - e^{-\lambda x})^n.$$

Használjuk fel, hogy ha $\xi \geq 0$ akkor

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^\infty P(\xi \geq x)\, dx = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx!$$

A $t = 1 - e^{-\lambda x}$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(max(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = \int_0^\infty (1 - (1 - e^{-\lambda x})^n\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1 - t^n) \frac{1}{1-t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1 + t + \ldots + t^{n-1})\, dt = \frac{1}{\lambda} \left[t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right]$$
$$= \underbrace{\frac{1}{n\lambda}}_{\text{1. meghibásodás}} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)\lambda}}_{\text{2. - 1. meghibásodás}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{n. - n-1. meghibásodás}}$$
$$= \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right].$$

A exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságából következik, hogy a meghibásodások közötti időtartamok is exponenciális eloszlásúak lesznek. Könnyen látható, hogy a $(k-1)$ -dik és k -dik meghibásodás közötti idő paramétere $(n - k + 1)\lambda$, $k = 1, \ldots, n$, és ezek az időtartamok egymástól függetlenek is az exponenciális eloszlás tulajdonságai miatt. Ezt a tényt nagyon jól tudjuk hasznosítani a k -dik meghibásodás várható értékének és szórásnégyzetének a meghatározásához. Ezek után érthető módon

$$\mathbb{E}(k \text{ -dik meghibásodás ideje}) = \frac{1}{n\lambda} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)\lambda}$$
$$\mathbb{D}^2(k \text{ -dik meghibásodás ideje}) = \frac{1}{(n\lambda)^2} + \ldots + \frac{1}{((n-k+1)\lambda)^2}$$
$$k = 1, \ldots, n.$$

Ebből a párhuzamosan kapcsolt rendszer élettartamának szórásnégyzete

$$\frac{1}{(n\lambda)^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda^2}.$$

■

6. Definíció. *Legyenek ξ és η független valószínűségi változók $f_\xi(x)$ és $f_\eta(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\zeta = \xi + \eta$ sűrűségfüggvénye*

$$f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx,$$

melyet $f_\xi(x)$ és $f_\eta(x)$ **konvolúciójának** *nevezünk.*
Ha $\xi \geq 0$ és $\eta \geq 0$, akkor

$$f_\zeta(z) = \int_0^z f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx.$$

8. Példa. *Legyenek ξ és η független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!*

Megoldás:
Az előző képlet alapján, behelyettesítve az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét kapjuk

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,dx = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z}\,dx \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z 1\,dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} z = \lambda(\lambda z) e^{-\lambda z}, \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy független, azonos paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók összege nem exponenciális eloszlást követ.
■

9. Példa. *Legyenek $\xi_n \ldots \xi_n$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy*

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(z) = \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \quad .$$

Megoldás: A bizonyítást teljes indukcióval fogjuk végezni, ahol felhasználjuk az előző példa eredményeit is. $k = 1$-re és $k = 2$-re láttuk, hogy igaz. Tegyük fel, hogy $k = n-1$-re is igaz és nézzük meg $k = n$-re mi történik!

$$\begin{aligned} f_{\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}+\xi_n}(z) &= \int_0^z \frac{\lambda(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,dx \\ &= \lambda^2 \frac{e^{-\lambda z}}{(n-2)!} \lambda^{n-2} \int_0^z x^{n-2}\,dx = \lambda^2 \frac{e^{-\lambda z}}{(n-2)!} \lambda^{n-2} \frac{z^{n-1}}{(n-1)} \\ &= \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z}, \end{aligned}$$

ami éppen az (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlás sűrűségfüggvénye.
Ez nagyban megkönnyíti a várható érték és a szórásnégyzet meghatározását.

Az Erlang-eloszlás jól használható olyan valószínűségi változók eloszlásának közelítésére, melynél $C_\xi^2 < 1$. Ekkor ha az első 2 momentum adott, akkor az

$$f_\eta(t) = p\frac{\lambda(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda t} + (1-p)\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$$

$(k-1, \lambda)$ és (k, λ) paraméterű Erlang-eloszlások keveréke, ahol

$$p = \frac{1}{1+C_\xi^2}\left(kC_\xi^2 - \sqrt{k(1+C_\xi^2) - k^2C_\xi^2}\right),$$

$$\lambda = \frac{k-p}{\mathbb{E}(\xi)}, \quad \frac{1}{k} \leq C_\xi^2 \leq \frac{1}{k-1},$$

rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi), \quad C_\eta^2 = C_\xi^2.$$

Ezt az η-t szokás $E_{k-1,k}(\lambda)$ szimbólummal is jelölni.

■

Hipo-exponeniális eloszlás

Legyenek $\xi_i \in Exp(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Az $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ valószínűségi változót **hipo-exponenciális** eloszlásúnak nevezzük.
Megmutatható, hogy sűrűségfüggvénye

$$f_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x < 0, \\ (-1)^{n-1}[\prod_{i=1}^n \lambda_i] \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1, k\neq j}^n (\lambda_j - \lambda_k)}, \text{ ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Belátható, hogy

$$\mathbb{E}(\eta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}, \quad \mathbb{D}^2(\eta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}.$$

A hipo-exponenciális eloszlás relatív szórása $C_{\eta_n} = \frac{\mathbb{D}\eta_n}{\mathbb{E}\eta_n} \leq 1$, vagyis

$$C_{\eta_n}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}\right)^2} \leq 1.$$

Hiper-exponeniális eloszlás

Legyenek $\xi_i \in Exp(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ független, exponenciális valószínűségi változók, $p_1, \ldots, p_n$ pedig eloszlás. Az η valószínűségi változót **hiper-exponenciális** eloszlásúnak nevezzük ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye

$$F_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda_i x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Könnyű látni, hogy

$$\mathbb{E}(\eta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i}, \quad \mathbb{E}(\eta_n)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{{\lambda_i}^2}.$$

Megmutatható, hogy a hiper-exponenciális eloszlás relatív szórásnégyzete mindig nagyobb vagy egyenlő mint 1, vagyis

$$C^2_{\eta_n} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right)^2} \geq 1.$$

Abban az esetben, ha $C^2_{\eta_n} > 1$, akkor 2 momentum alapján az alábbi illeszkedés ajánlatos

$$f_\eta(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t},$$

vagyis η 2-drendű hiper-exponenciális eloszlású. Mivel η sűrűségfüggvényében 3 paraméter szerepel és az illeszkedés csak 2 momentum alapján történik, ezért végtelen sok megoldás lehetséges.

Tekintsük az úgynevezett kiegyensúlyozott várható értékek esetét, vagyis amikor

$$\frac{p}{\lambda_1} = \frac{1-p}{\lambda_2}.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(\eta) = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2} = \mathbb{E}(\xi)$$
$$\mathbb{E}(\eta^2) = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} = \mathbb{E}(\xi^2)$$

melyből a megoldás

$$p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{C_\xi^2 - 1}{C_\xi^2 + 1}}\right), \quad \lambda_1 = \frac{2p}{\mathbb{E}(\xi)}, \quad \lambda_2 = \frac{2(1-p)}{\mathbb{E}(\xi)}.$$

Ha az m_1, m_2, m_3 momentumok alapján szeretnénk ezt a hiper-exponenciális eloszlást illeszteni, akkor ez csak az $m_3 \geq \frac{3}{2}m_2^2$ feltétel mellett lehetséges és ekkor egyértelmű. Meg lehet mutatni, hogy a feltétel teljesül a Gamma és lognormális eloszlásra is. Ebben az esetben

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right), \quad p = \frac{\lambda_1(1 - \lambda_2 m1)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

ahol

$$a_2 = (6m_1^2 - 3m_2)/\left(\frac{3}{2}m_2^2 - m_1 m_3\right), \quad a_1 = \left(1 + \frac{1}{2}m_2 a_2\right)/m_1.$$

2.2. Megbízhatóság-elméleti alapok

7. Definíció. *Jelölje ξ valamely elem élettartamát.*
Ekkor az $R(t) = P(\xi > t)$ -t **megbízhatósági-függvénynek** *nevezzük.*

Könnyű látni, hogy $R'(t) = -f_\xi(t)$, valamint $\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$.
A megbízhatósági-függvény nagyon hasznos a különböző rendszerek megbízhatósági vizsgálatában. Az előzőek alapján könnyű látni, hogy

- Sorosan kapcsolt rendszerek esetén

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

- Párhuzamosan kapcsolt rendszerek esetén

$$R_P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$$

Másik fontos jellemző a **meghibásodási intenzitás-függvény (megbízhatósági rátafüggvény)**, amelyet a következőképpen értelmezünk

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{x\to 0} \frac{P(\xi < t + x | \xi \geq t)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{P(t \leq \xi < t + x)}{xP(\xi \geq t)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{F(t+x) - F(t)}{xR(t)} = \lim_{x\to 0} \frac{R(t) - R(t+x)}{xR(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogyan fejezhető ki $R(t)$ a $h(t)$ segítségével!

$$\int_0^t h(x)\mathrm{d}x = \int_0^t -\frac{R'(x)}{R(x)}\mathrm{d}x$$
$$\int_0^t h(x)\mathrm{d}x = [-\ln R(x)]_0^t = -\ln R(t),$$

mivel $R(0) = 1$. Így

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(x)\mathrm{d}x}.$$

Legyen $H(t) = \int_0^t h(x)\mathrm{d}x$ úgynevezett **kumulatív megbízhatósági intenzitás-függvény**. Ekkor

$$R(t) = e^{-H(t)}.$$

Az alábbiakban nevezetes eloszlásokra írjuk fel az $R(t)$, $h(t)$, $H(t)$ függvényeket ahol lehet, melyek az érintett függvények definíciójából számolással következnek.
Azt is megmutatjuk milyen kapcsolat van a $h(t)t$ függvény és a relatív szórásnégyzet C_ξ^2 között.

- Exponenciális eloszlás

$$\xi \in Exp(\lambda), \quad R(t) = e^{-\lambda t}, \quad h(t) = \lambda, \quad H(t) = \lambda t, \quad C_\xi^2 = 1.$$

- Erlang-eloszlás

$$\xi \in Erl(n, \lambda)$$
$$R(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$
$$h(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}} = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}}$$

amely monoton növekvő és értékkészlete a $[0, \lambda]$ intervallum.

$$C_\xi^2 = \frac{\frac{n}{\lambda^2}}{\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{n} \leq 1.$$

- Weibull-eloszlás

$$\xi \in W(\lambda, \alpha), \quad R(t) = e^{-\lambda t^\alpha}, \quad h(t) = \frac{\lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}}{e^{-\lambda t^\alpha}} = \lambda \alpha t^{\alpha-1}.$$

Vagyis $\alpha > 1$ -nél $h(t)$ monoton növekvő, $\alpha < 1$ -nél monoton csökkenő és $\alpha = 1$ -nél $h(t) = \lambda$, $H(t) = \lambda t^\alpha$.

$$\begin{aligned} C_\xi^2 &= \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)}{\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} - 1 \\ &= \frac{2\alpha\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)} - 1. \end{aligned}$$

Megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} C_\xi^2 &> 1 \quad &&\text{, ha } 0 < \alpha < 1, \\ C_\xi^2 &< 1 \quad &&\text{, ha } \alpha > 1. \end{aligned}$$

- Pareto-eloszlás

$$\xi \in Par(k, \alpha), \quad R(t) = \left(\frac{t}{k}\right)^\alpha, \quad h(t) = \frac{\lambda}{t}, \quad H(t) = \alpha \ln\left(\frac{t}{k}\right), t \geq k.$$

$$C_\xi^2 = \frac{\frac{k^2\alpha}{\alpha-1} - \left(\frac{k\alpha}{\alpha-1}\right)^2}{\left(\frac{k\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = \frac{\frac{k^2\alpha}{\alpha-1}}{\left(\frac{k\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2}\cdot\frac{1}{\alpha} - 1 > 1, \qquad \alpha > 2.$$

A fenti esetek azt támasztják alá, hogyha $h(t)$ monoton növekedő (csökkenő) az értelmezési tartományán, akkor $C_\xi^2 < 1 (> 1)$.
Azonban ez fordítva nem igaz, mert például a lognormális eloszlás esetén $h(t)$ először monoton növekedő, majd utána monoton csökkenő.

2.3. Véletlen számok generálása

Mint már korábban is láttuk a véletlen számok generálásánál fontos szerepet játszik az alábbi képlet

$$\eta = F_\xi(\xi) \in E(0,1), \text{ és így } \xi = F^{-1}(\eta).$$

A következő részben nevezetes eloszlású véletlen számokat fogunk előállítani.

10. Példa. *Mutassuk meg hogyan generáljunk λ paraméterű exponenciális eloszlást követő véletlen számokat!*

Megoldás:
Ha $\xi \in Exp(\lambda)$ és $\eta \in E(0,1)$ akkor $1 - e^{-\lambda\xi} = \eta$ így ha tudunk [0,1]-en egyenletest generálni akkor a λ paraméterű exponenciális eloszlást követő véletlen számokat a

$$\xi = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\eta)$$

képlet segítségével generálhatunk.
■

11. Példa. *Mutassuk meg hogyan generáljunk (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlást követő véletlen számokat!*

Megoldás:
Hasonlóan az előző példához, ha tudunk [0,1]-en egyenletest generálni akkor a (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlást követő véletlen számokat a

$$\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n = -\frac{1}{\lambda} \ln(\prod_{i=1}^{n}(1 - \eta_i)), \text{ ahol } \eta_i \in E(0,1)\,, i = 1, \ldots, n$$

képlet segítségével generálhatunk.
■

12. Példa. *Mutassuk meg hogyan generáljunk hipo-exponenciális eloszlást követő véletlen számokat!*

Megoldás:
Hasonlóan az előző példához, ha tudunk [0,1]-en egyenletest generálni akkor a hipo-exponenciális eloszlást követő véletlen számokat a

$$\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n = -\frac{1}{\lambda_1} \ln(1 - \eta_1) - \ldots - \frac{1}{\lambda_n} \ln(1 - \eta_n)$$

képlet segítségével generálhatunk.
■

13. Példa. *Mutassuk meg hogyan generáljunk hiper-exponenciális eloszlást követő véletlen számokat!*

Megoldás:
Először generáljuk le $[0, 1]$-en egyenletes eloszlás szerint η-t, majd válasszuk ki azt az i-t amelyre teljesül, hogy

$$\sum_{j=1}^{i-1} p_j < \eta < \sum_{j=1}^{i} p_j\,!$$

Második lépésként pedig generáljunk λ_i paraméterű exponenciális eloszlást követő véletlen számot a már ismert képlet szerint!
■

14. Példa. *Mutassuk meg hogyan generáljunk Weibull-eloszlású véletlen számokat!*

Megoldás:

$$\eta = 1 - e^{-\lambda\xi^{\alpha}}, \text{ ebből}$$

$$\xi = \left[-\frac{1}{\alpha} ln(1 - \eta)\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

■

3. fejezet

Analitikus eszközök

A transzformáció fogalma teljesen megszokott a vizsgálatok során. Ennek a hatékony módszernek tömören az a lényege, hogyha az eredeti problémát nem tudjuk, vagy csak körülményesen tudnánk megoldani, akkor alkalmas transzformációval átvisszük egy másik feladatba, majd ennek megoldásából megpróbálunk az eredeti problémára választ adni. A transzformáció fajtája függ a probléma jellegétől. Ebben a fejezetben 2 nagyon bevált módszert mutatunk meg, amelyek lényegében a diszkrét és folytonos esetet ölelik fel. Természetesen rajtuk kívül számos más transzformáció is létezik. Gyakran előfordul, hogy ugyanannak a transzformációnak különböző nevet adnak az eltérő tudományterületek. A tematika összeállításában főleg Allen [1], Gnyedenko, Beljajev, Szolovjev [2], Kleinrock [6], Ovcharov [8], Tijms [16], Trivedi [17] könyvekre támaszkodtunk.

3.1. Generátorfüggvény

8. Definíció. *Legyen ξ nemnegatív diszkrét valószínűségi változó*
$P(\xi = n) = p_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ eloszlással.
A $G_\xi(s)$ függvényt az ξ **generátorfüggvényének** *nevezzük, ahol*

$$G_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = \mathbb{E}s^\xi.$$

$G_\xi(s)$ akkor és csak akkor létezik ha a sor konvergens.

11. Tétel. *A generátorfüggvényekre a következő tulajdonságok teljesülnek:*

1. $G_\xi(1) = 1$,
2. $|G_\xi(s)| \leq 1$, *ha* $|s| \leq 1$,
3. $\mathbb{E}\xi = G'_\xi(1)$,
4. $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1)$,
5. $p_k = \frac{G_\xi^k(0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Bizonyítás:

1. $G_\xi(1) = \sum_k 1^k p_k = \sum_k p_k = 1.$

2. $|G_\xi(s)| \le \sum_k |s^k p_k| = \sum_k |s|^k p_k \le \sum_k 1 p_k \le 1.$

3. $G'_\xi(s) = \sum_k (s^k)' p_k = \sum_k k s^{k-1} p_k$ innen pedig $G'_\xi(1) = \sum_k k p_k = \mathbb{E}\xi.$

4. $G''_\xi(s)\big|_{s=1} = \sum_k (s^k)'' p_k = \sum_k (k s^{k-1})' p_k\big|_{s=1} = \sum_k k(k-1)s^{k-2} p_k\big|_{s=1} = \sum_k k^2 p_k - \sum_k k p_k = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi$

   Ebből pedig átrendezés után

$$\mathbb{D}^2\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2.$$

■

12. Tétel. *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek, akkor $G_{\xi_1+\dots+\xi_n}(s) = \prod_{i=1}^n G_{\xi_i}(s)$.*

Bizonyítás:
A bizonyítás során a harmadik lépésben felhasználjuk, hogy független valószínűségi változók szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékük szorzatával.

$$G_{\xi_1+\dots+\xi_n}(s) = \mathbb{E}s^{\xi_1+\dots+\xi_n} = \mathbb{E}(s^{\xi_1} \dots s^{\xi_n}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}s^{\xi_i} = \prod_{i=1}^n G_{\xi_i}(s).$$

■
Az alkalmazások során nagyon fontosak az alábbi tételek.

13. Tétel. *Ha nemnegatív, egész értékű változók egy $\xi_1, \dots, \xi_n$ sorozata azzal a tulajdonsággal bír, hogy eloszlásaik egy határeloszláshoz konvergálnak, azaz bevezetve a $p_{nk} = P(\xi_n = k), (k = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots)$ jelöléseket, léteznek a $\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k\ (k = 0, 1, \dots)$ határértékek és $\sum_{k=0}^\infty p_k = 1$, akkor a ξ_n változók generátorfüggvényei a $[-1, 1]$ minden pontjában konvergálnak a $\{p_k\}$ eloszlás generátorfüggvényéhez, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G(s), (|s| \le 1),$$

ahol

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^\infty p_{nk} s^k = G_{\xi_n}(s)$$
$$G(z) = \sum_{k=0}^\infty p_k s^k.$$

Ha a $\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k$ határértékek léteznek, de $\sum p_k \ne 1$, akkor a generátorfüggvények konvergenciája csak az intervallum belsejében érvényes.

1. Megjegyzés. *A tétel utolsó állítását illusztrálja a következő példa: Legyen* $\xi \equiv n$*, azaz* $p_{nn} = 1$*, és* $p_{nk} = 0$*, ha* $k \neq n$*, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = 0\,(k = 0, 1, \ldots).$$

Azonban

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = \lim_{n\to\infty} s^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |s| < 1 \\ 1, & \text{ha } s = 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } s = -1 \end{cases}.$$

14. Tétel. *Ha a* ξ_n *változók generátorfüggvényei konvergálnak egy* $G(s)$ *függvényhez, ha* $|s| \leq 1$*, akkor a* ξ_n *változók eloszlásai konvergálnak ahhoz a valószínűségeloszláshoz, melynek a* $G(s)$ *a generátorfüggvénye.*

2. Megjegyzés. *Ha csak azt tesszük fel, hogy* $\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G(s)$ *létezik, ha* $|s| < 1$*, akkor még nem következik, hogy* $G(s)$ *generátorfüggvény.*

15. Példa. *Ha* ξ_n *a* 0 *és* n *értékeket egyforma valószínűséggel veszi fel, akkor* $G_n(s) = \frac{1+s^n}{2}$ *és* $\lim_{n\to\infty} G_n(s) = \frac{1}{2}$*, vagyis nem érvényes, hogy* $\sum p_k = 1$*, mivel*

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } k = 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ezeket a generátorfüggvény **folytonossági tételének** is szokás nevezni, és nagyon jól alkalmazhatóak a határeloszlás-tételek bizonyításánál.

Nevezetes eloszlások generátorfüggvénye

16. Példa. *Határozzuk meg a Bernoulli-eloszlás generátorfüggvényét, majd ennek segítségével a várható értéket és s szórásnégyzetet!*

Megoldás:

$$G_{\chi(A)}(s) = s^0(1-p) + s^1 p = sp + 1 - p = 1 + p(s-1),$$
$$G'_{\chi(A)}(s)\Big|_{s=1} = p \text{ , } \mathbb{E}\chi(A)^2 = 0 + p \text{ , } \mathbb{D}^2\chi(A) = p - p^2 = p(1-p).$$

■

17. Példa. *Határozzuk meg a* λ *paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvényét, majd ennek segítségével a várható értéket és s szórásnégyzetet!*

Megoldás:

$$G_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{-s\lambda} = e^{-\lambda(1-s)}.$$
$$G'_\xi(s)\Big|_{s=1} = e^{-\lambda(1-s)}\lambda\Big|_{s=1} = \lambda,$$
$$G''_\xi(s)\Big|_{s=1} = e^{-\lambda(1-s)}\lambda\lambda\Big|_{s=1} = \lambda^2 \text{ , } \mathbb{D}^2\xi = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda.$$

■

18. Példa. *Határozzuk meg független Poisson-eloszlások konvolúcióját generátorfüggvény segítségével!*

Megoldás:
Mivel független valószínűségi változók összegének generátorfüggvény a generátorfüggvények szorzata, valamint ismerve a Poisson-eloszlás generátorfüggvényét, kapjuk

$$G_{\xi+\eta}(s) = e^{-\lambda(1-s)}e^{-\mu(1-s)} = e^{-(\lambda+\mu)s},$$

amely éppen a $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye.
■

19. Példa. *Mutassuk meg a generátorfüggvények segítségével, hogy* $B(n, p) \to Po(\lambda)$, *ha* $n \to \infty$,$p \to 0$ *úgy, hogy* $np \to \lambda$*!*

Megoldás:
Használjuk fel, hogy ha $a_n \to A$ akkor $(1 + \frac{a_n}{n})^n \to e^A$!
Azt fogjuk megmutatni, hogy a binomiális eloszlás generátorfüggvénye tart a Poisson-eloszlás generátorfüggvényéhez, azaz

$$G_{\xi_n}(s) = (1 - p(1-s))^n = (1 - \frac{np(1-s)}{n})^n \to e^{-\lambda(1-s)}$$

amely a λ paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye.
■

20. Példa. *Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert*

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\dots$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$$

k=1,2,...

$$P_k(0) = \begin{cases} 1, & ha\ k = 0, \\ 0, & ha\ k \neq 0. \end{cases}$$

kezdeti feltétel mellett!

Megoldás:
Az egyenletek mindkét oldalát s megfelelő hatványival megszorozva kapjuk

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{sdP_1(t)}{dt} = (-\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t))s$$

$$\ldots$$

$$\frac{s^k dP_k(t)}{dt} = (-\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t))s^k = -\lambda s^k P_k(t) + \lambda s s^{k-1} P_{k-1}(t)$$

Bevezetve a

$$G(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P_k(t)$$

genetátorfüggvényt, láthatjuk, hogy a deriváltak generátorfüggvényét kapjuk a bal oldalon ha összeadjuk az egyenleteket. Ezért

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{dP_k(t)}{dt}$$

$$= \underbrace{-\lambda \sum_{k=0}^{\infty} s^k P_k(t)}_{G(t,s)} \underbrace{+\lambda s \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} P_{k-1}(t)}_{G(t,s)}.$$

A kezdeti feltétel pedig

$$G(0,s) = \sum_k s^k P_k(0) = 1.$$

Végül a differenciálegyenlet-rendszerből egyetlen egyenletet kaptunk, nevezetesen

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = -\lambda(1-s)G(t,s),$$

a kezdeti feltétel pedig

$$G(0,s) = 1.$$

Átrendezve az egyenletet kapjuk

$$\frac{\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}}{G(t,s)} = -\lambda(1-s)$$

ennek megoldása pedig

$$\ln|G(t,s)| = -\lambda t(1-s) + \ln C.$$

Mivel $G(t,s) = Ce^{-\lambda t(1-s)}$ és $G(0,s) = 1$, így $G(0,s) = Ce^{-0} = 1$ azaz $C = 1$.

Így $G(t,s) = e^{-\lambda t(1-s)}$ amelyből láthatjuk, hogy $G(t,s)$ egy λt paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye, ezért keresett megoldás

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

■

3.2. Laplace-transzformált

9. Definíció. *Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó $f_\xi(x)$ sűrűségfüggvénnyel. A $L_\xi(s)$ függvényt az ξ* **Laplace-transzformáltjának** *nevezzük, ahol*

$$L_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_\xi(x)\,dx = \mathbb{E}(e^{-s\xi}) = f_\xi^*(s).$$

15. Tétel. *A Laplace-transzformáltra a következő tulajdonságok teljesülnek*

1. $L_\xi(0) = 1,$

2. $0 \leq L_\xi(s) \leq 1,$ *ha* $s \geq 0,$

3. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *független valószínűségi változók, akkor*

$$L_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(s) = \prod_{i=1}^n L_{\xi_i}(s).$$

4. $\mathbb{E}(\xi^n) = (-1)^n L_\xi^{(n)}(0).$

Bizonyítás:

1. $L_\xi(0) = \int_0^\infty e^{-0\cdot x} f_\xi(x)\,dx = \int_0^\infty f_\xi(x)\,dx = 1.$

2. $0 \leq L_\xi(s) \leq 1$ első része úgy látható be, hogy $e^{-sx} f_\xi(x)$ nemnegatív és nemnegatív függvények integrálja is nemnegatív. A második részt pedig úgy bizonyíthatjuk be, hogy az e^{-sx} felülről becsülhető az 1 konstans függvénnyel a $[0, \infty[$ intervallumon amiből azt kapjuk, hogy

$$L_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_\xi(x)\,dx \leq \int_0^\infty 1 f_\xi(x)\,dx = 1.$$

3. $L_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(s) = \mathbb{E}(e^{-s(\xi_1+\ldots+\xi_n)}) = \mathbb{E}(e^{-s\xi_1} \cdot \ldots \cdot e^{-s\xi_n}) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^n e^{-s\xi_i}$ ami $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlensége miatt $\prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{-s\xi_i})$, így $\prod_{i=1}^n L_{\xi_i}(s)$.

4.

$$\begin{aligned} L_\xi^{(n)}(0) &= \int_0^\infty (e^{-sx})^{(n)} f_\xi(x)\,dx\Big|_{s=0} \\ &= \int_0^\infty (-x)^n e^{-sx}\Big|_{s=0} f_\xi(x)\,dx = (-1)^n \underbrace{\int_0^\infty x^n f_\xi(x)\,dx}_{\mathbb{E}(\xi^n)} \end{aligned}$$

amiből következik, hogy $\mathbb{E}(\xi^n) = (-1)^n L_\xi^{(n)}(0)$.

■

A gyakorlati alkalmazások miatt még függvények Laplace-transzformáltjaival is kell foglalkoznunk, hiszen sok esetben differenciálegyelenteket tudunk megoldani a segítségükkel.

16. Tétel. *Függvények Laplace-transzformáltjára igazak az alábbiak*

1. $(af(x) + bg(x))^*(s) = af^*(s) + bg^*(s)$
2. $(f'(x))^*(s) = sf^*(s) - f(0), \qquad$ ha $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{sx}} = 0.$

Bizonyítás:

1. $(af(x)+bg(x))^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}(af(x) + bg(x))\mathrm{d}x = a\int\limits_0^\infty e^{-sx}f(x)\mathrm{d}x + b\int\limits_0^\infty e^{-sx}g(x)\mathrm{d}x = af^*(s) + bg^*(s)$
2. Parciális integrálást alkalmazva

$$(f'(x))^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)e^{-sx}]_0^\infty + s\int\limits_0^\infty e^{-sx}f(x)\mathrm{d}x = sf^*(s) - f(0).$$

■

Bizonyítás nélkül közöljük a gyakorlati alkalmazásoknál fontos alábbi állításokat.

17. Tétel. *$f^*(s)$-re teljesülnek a következő határértékek*

- **Kezdetiérték-tétel**

$$\lim_{s\to\infty} sf^*(s) = \lim_{t\to 0} f(t)$$

- **Határérték-tétel**

$$\lim_{s\to 0} sf^*(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

18. Tétel (POST-WIDDER-féle inverziós formula). *Ha $f(x)$ folytonos és korlátos $(0,\infty)$-n, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} L(f)(s)\Big|_{s=\frac{n}{y}}}{y^n(n-1)!} = f(y)$$

19. Tétel (Folytonossági-tétel). *Tekintsük a $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók sorozatát, melyeknek eloszlásfüggvénye $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$. Ha $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, ahol $F(x)$ valamely ξ eloszlásfüggvénye, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-s\xi_n}) = \mathbb{E}(e^{-s\xi}),$$

és fordítva.
Azaz, ha a Laplace-transzformáltak sorozata konvergál valamely ξ valószínűségi változó Laplace-transzformáltjához, akkor $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

21. Példa. *$\xi \in Exp(\lambda)$ esetén*

$$L_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda+s}\underbrace{\int_0^\infty (\lambda+s)e^{-(\lambda+s)x}\,dx}_{1} = \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

22. Példa. *$\xi \in Erl(n, \lambda)$ esetén*

$$L_\xi(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$$

hiszen ξ független, azonos paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók összege.

23. Példa. *Határozzuk meg hipo-exponenciális eloszlás esetén a Laplace-transzformáltat!*

Megoldás:
Az előzőekhez hasonlóan, csak most különböző paraméterek is lehetnek, ezért

$$L_{\eta_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}\right).$$

■

A következő példa arra szolgál, hogyan tudjuk viszonylag egyszerűen meghatározni egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó n-edik momentumát. Ha ezt sűrűségfüggvény segítségével kellene megtennünk, akkor elég sokat kellene számolnunk.

24. Példa. *Mutassuk meg Laplace-transzformált segítségével,*
hogyha $\xi \in Exp(\lambda)$, akkor

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi^n) &= (-1)^n L_\xi^{(n)}(0) = (-1)^n \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{(n)} \Big|_{s=0} \\
&= (-1)^n \lambda((\lambda + s)^{-1})^{(n)}\Big|_{s=0} = (-1)^n \lambda((-1)(-2)\dots(-n)(\lambda + s))^{-n-1}\Big|_{s=0} \\
&= (-1)^n \lambda (-1)^n \frac{n!}{\lambda^{n+1}} = (-1)^{2n} \lambda \frac{n!}{\lambda^{n+1}} = \frac{n!}{\lambda^n}.
\end{aligned}$$

■

20. Tétel. *Keverékek Laplace-transzformáltja a Laplace-transzformáltak keveréke.*

Bizonyítás:
Legyen

$$f_\eta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f_{\xi_i}(x).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
L_\eta(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i f_{\xi_i}(x)\right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \underbrace{\int_0^\infty e^{-sx} f_{\xi_i}(x) dx}_{L_{\xi_i}(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i L_{\xi_i}(s).
\end{aligned}$$

■

25. Példa. *Határozzuk meg a $g(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ függvény Laplace-transzformáltját!*

Megoldás:

$$g^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{\lambda + s} \underbrace{\int_0^\infty (s+\lambda) t^k e^{-(s+\lambda)t}\, dt}_{\mathbb{E}\xi^k = \frac{k!}{(\lambda+s)^k}}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{\lambda + s} \frac{k!}{(\lambda + s)^k} = \frac{1}{\lambda + s} \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k.$$

■

26. Példa. *Oldjuk meg Laplace-transzformált segítségével a következő differenciálegyenlet-rendszert*

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\dots$$

$$P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$$

k=1,2,...

$$P_k(0) = \begin{cases} 1, & ha\ k = 0, \\ 0, & ha\ k \neq 0. \end{cases}$$

kezdeti feltételek mellett!

Megoldás:
Vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját! Ekkor

$$(P_0'(t))^*(s) = -\lambda (P_0(t))^*(s)$$

$$\dots$$

$$(P_k'(t))^*(s) = -\lambda (P_k(t))^*(s) + \lambda (P_{k-1}(t))^*(s)$$

k=1,2,... A helyettesítéses integrálás szabályát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} P_k'(t)\, dt = [e^{-st} P_k(t)]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} P_k(t)\, dt.$$

Ha $P_k(t)$ korlátos azaz $|P_k(t)| < K$ akkor

$$[e^{-st} P_k(t)]_0^\infty = -P_k(0).$$

Így azt kapjuk, hogy

$$(P_k'(t))^*(s) = -P_k(0) + sP_k^*(s).$$

Így a mi esetünkben

$$(P_0')^*(s) = -1 + sP_0^*(s)$$

valamint
$$(P_k')^*(s) = sP_k^*(s) \text{ ha } k \geq 1.$$
Az előbbieket kihasználva kapjuk, hogy
$$-1 + sP_0^*(s) = -\lambda P_0^*(s)$$
amiből rögtön következik, hogy
$$P_0^*(s) = \frac{1}{\lambda + s}.$$
Valamint
$$sP_k^*(s) = -\lambda P_k^*(s) + \lambda P_{k-1}^*(s),$$
így
$$P_k^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} P_{k-1}^*(s),$$
amiből könnyen belátható, hogy
$$P_k^*(s) = \frac{1}{\lambda + s} \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k.$$
Ebből pedig előző számításunkat felhasználva kapjuk, hogy
$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, 2 \ldots$$

■

4. fejezet

Sztochasztikus rendszerek

Az alapozás után lehetőségünk nyílik az időben dinamikusan változó rendszerek sztochasztikus modellezésére is. Bevezetjük az alapvető fontosságú Poisson-folyamatot és megmutatjuk milyen kapcsolatban áll más ismert eloszlásokkal. Az egyszerűbb rendszerek vizsgálatával szinte építőköveket gyártunk a bonyolultabb esetekre. Megismerkedhetünk a főbb rendszerjellemzők meghatározásának a módszereivel is. Számos példán keresztül mutatjuk meg az egyes paramétereknek a rendszer hatékonysági mutatóira gyakorolt hatását. A példákat főleg Allen [1], Ovcharov [8], Trivedi [17] könyvekre támaszkodva válogattuk össze.

4.1. Poisson-folyamat

10. Definíció. *Legyenek a $\tau_1, \tau_2 \dots$ egymástól független, azonos eloszlású, nemnegatív valószínűségi változók. A*

$$\nu(t) = \begin{cases} 0, & ha\ \tau_1 > t, \\ max \quad \left(n : \sum_{i=1}^{n} \tau_i < t\right), & ha\ \tau_1 < t, \end{cases}$$

valószínűségi változót **felújítási folyamatnak** *nevezzük, az $m(t) = \mathbb{E}(\nu(t))$-t pedig* **felújítási függvénynek**.

21. Tétel. *Ha $\tau_1, \tau_2 \dots$ egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor $P(\nu(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.*

Bizonyítás:
A konstrukcióból látszik, hogy $S_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$ (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlású valószínűségi változó, vagyis

$$P(S_n < x) = F_{S_n}(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}.$$

Számolásunknál felhasználjuk majd, hogyha az A eseményből következik a B esemény azaz $A \subset B$, akkor $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Látható, hogy a mi esetünkben az A esemény $\{S_{n+1} < t\}$ és a B esemény$\{S_n < t\}$. A következő lépésben azt használjuk ki, hogy k esemény pontosan akkor következett be, ha $S_k < t, S_{k+1}$. Tehát

$$\begin{aligned} P(\nu(t) = k) &= P(S_k < t, S_{k+1} \geq t) = F_{S_k}(t) - F_{S_{k+1}}(t) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} - \left(1 - \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}\right) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Ahogy láthatjuk az események száma egy λt paraméterű Poisson-eloszlást követ, ezt a folyamatot nevezzük λ paraméterű Poisson-folyamatnak.

■

Könnyű látni, hogy a Poisson-folyamat esetén

1. $P(\nu(h) = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$,
2. $P(\nu(h) = 1) = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h(1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h + (\lambda h)^2 + \lambda h o(h) = \lambda h + o(h)$,
3. $P(\nu(h) \geq 2) = 1 - [(1 - \lambda h + o_1(h)) + \lambda h + o_2(h)] = o(h)$.

11. Definíció. *Ritkasági feltétel*

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(\nu(h) \geq 2)}{P(\nu(h) = 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{\lambda h + o(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{o(h)}{h}}{\lambda + \frac{o(h)}{h}} = 0.$$

Jelölje $\nu(t, t+h)$ a $(t, t+h)$ idő intervallumban bekövetkezett események számát. A konstrukcióból szintén következik, hogy $\nu(t, t+h)$ csak a h-tól függ és nem attól, hol helyezkedik el. Továbbá, egymásba nem metsző idő intervallumokban vett események száma egymástól független valószínűségi változók.

A Poisson-folyamatot mint számláló folyamatot vezettük be, és levezettünk a $P_k(t)$ mennyiségekre egy adott t hosszúságú időintervallum alatt bekövetkező érkezések számának valószínűségeloszlására egy formulát.
Vizsgáljuk most meg a beérkezések időpillanatainak együttes eloszlását, ha előre ismert, hogy éppen k igény érkezett ebben az intervallumban. Osszuk fel a $(0, t)$ intervallumot $2k + 1$ diszjunkt részre a következőképpen. Az α_i hosszúságú intervallumok előzzék meg a β_i hosszúságú intervallumokat $(i = 1, \ldots, k)$, és az utolsó intervallum α_{k+1} hosszúságú legyen, továbbá

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i = t.$$

Jelentse A_k azt az eseményt, hogy éppen egy beérkezés fordul elő minden egyes β_i intervallumban $(i = 1, 2, ..., k)$, az α_i intervallumban pedig egy sem. A_k valószínűségét akarjuk kiszámolni, feltéve, hogy éppen k beérkezés történik a $(0, t)$ intervallumban.

A feltételes valószínűség definíciójából

$$P(A_k|\text{pontosan } k \text{ beérkezés a } (0,t) \text{ alatt})$$

$$= \frac{P(A_k \text{ és pontosan } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt})}{P(\text{pontosan } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt})}.$$

Amikor a Poisson-folyamat szerinti beérkezéseket vizsgáljuk diszjunkt időintervallumokban, akkor független eseményeket vizsgálunk, azaz ezek együttes valószínűségét az egyes valószínűségek szorzataként lehet kiszámolni. Könnyű látni, hogy

$$P(\text{egyetlen beérkezés egy } \beta_i \text{ hosszúságú intervallum alatt}) = \lambda\beta_i e^{-\lambda\beta_i}$$

és

$$P(\text{nincs beérkezés egy } \alpha_i \text{ hosszúságú intervallum alatt}) = e^{-\lambda\alpha_i}.$$

Kihasználva ezt, azonnal kapjuk a következőt

$$P(A_k|\text{éppen } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt}) =$$

$$\frac{(\lambda\beta_1\lambda\beta_2...\lambda\beta_k e^{-\lambda\beta_1}e^{-\lambda\beta_2}...e^{-\lambda\beta_k})(e^{-\lambda\alpha_1}e^{-\lambda\alpha_2}...e^{-\lambda\alpha_k})}{((\lambda t)^k/k!)e^{-\lambda t}}$$
$$= \frac{\beta_1\beta_2...\beta_k}{t^k}k!.$$

Másrészt tekintsünk egy olyan folyamatot, amely a $(0,t)$ intervallumban k darab pontot választ ki egymástól függetlenül, mégpedig mindegyiket az intervallumon egyenletes eloszlás szerint. Könnyen belátható, hogy

$$P(A_k|\text{éppen } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt}) = \left(\frac{\beta_1}{t}\right)\left(\frac{\beta_2}{t}\right)...\left(\frac{\beta_k}{t}\right)k!,$$

ahol a $k!$ tényező amiatt jelenik meg, mert nem különböztetjük meg a k pont permutációit. Észrevehetjük, hogy az előző összefüggésekben megadott két feltételes valószínűség megegyezik, és ennek alapján arra gondolhatunk, hogy ha a Poisson-folyamatban t idő alatt k beérkezés történik, akkor a beérkezések eloszlása ugyanaz, mint k darab ugyanazon az intervallumon egyenletes eloszlású pont eloszlása.

27. Példa. *Mi lesz az események intenzitása?*

Megoldás:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}\nu(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda t}{t} = \lambda = \frac{1}{\mathbb{E}\tau_1}.$$

■

12. Definíció. *(Sztochasztikus konvergencia)*

$$\xi_n \Rightarrow \xi \ ha \ \lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi|) \geq \varepsilon) = 0$$

22. Tétel. *Bizonyítsuk be, hogy $\frac{\nu(t)}{t}$ sztochasztikusan konvergál λ-hoz!*

Bizonyítás: Felhasználva a Csebisev-egyenlőtlenséget valamint, hogy

$$\mathbb{E}\left(\frac{\nu(t)}{t}\right) = \frac{\lambda t}{t} = \lambda, \mathbb{D}^2\left(\frac{\nu(t)}{t}\right) = \frac{\lambda t}{t^2} = \frac{\lambda}{t}$$

kapjuk

$$0 \leq P(|(\frac{\nu(t)}{t} - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lambda}{t\varepsilon^2}$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P(|(\frac{\nu(t)}{t} - \lambda| \geq \varepsilon) = 0.$$

■

13. Definíció. *A felújítási folyamat esetén az események* **intenzitásán** *a* $\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}$ *határértéket értjük.*

A gyakorlati problémáknál sokszor szükségünk van az igények beérkezési és kiszolgálási intenzitására, amely speciális esete az alábbi bizonyítás nélkül közölt tételnek.

23. Tétel. *(Elemi felújítási-tétel) [12, 13].*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\tau_1}.$$

A differenciálegyenlet-rendszer származtatása

Jelentse $P_k(t)$ annak valószínűségét, hogy a t időpillanatig k esemény történt. A Poisson-folyamat tulajdonságai alapján ekkor felírhatjuk a következő egyenletrendszert

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) &= P_0(t)(1-\lambda h + o(h))\\
P_1(t+h) &= P_1(t)(1-\lambda h + o(h)) + P_0(t)(\lambda h + o(h))\\
P_k(t+h) &= P_k(t)(1-\lambda h + o(h)) + P_{k-1}(t(\lambda h + o(h))\\
&\quad \underbrace{+\sum_{j=2}^{k} P_{k-j}(t)P(\text{h alatt j darab történt})}_{o(h)}\\
P_0(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Az első egyenlet átalakítható a következő alakba

$$P_0(t+h) - P_0(t) = -\lambda h P_0(t) + o(h),$$

amelyből pedig a jól ismert módszerek alapján kapjuk, hogy

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

A többi egyenlettel is elvégezve a hasonló átalakításokat az egyenletrendszer az alábbi formában írható fel

$$
\begin{aligned}
&P_0'(t) = -\lambda P_0(t)\\
&P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)\\
&P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)\\
&P_0(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Előző fejezetből ismerhetjük, hogy ennek a megoldása

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k = 1, 2, \ldots$$

4.2. Egyszerűbb rendszerek vizsgálata

A következő részben több viszonylag egyszerű rendszer működését modellezzük, mert ezek megértése után rátérhetünk majd a bonyolultabbak analízisére.

28. Példa. *Tekintsünk egy gépet, amelynek 2 állapota van (0 ha működik, 1 ha a gép rossz) és a 0-dik időpillanatban a 0 állapotban tartózkodik! Mi a valószínűsége annak, hogy a t-edik időpillanatban az 1 állapotban lesz feltéve, hogy a működési idők λ paraméterű exponenciális míg a javítási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású, egymástól független valószínűségi változók?*

Megoldás:
Legyenek τ_i-k a működési idők, amelyek független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségű változók, és ξ_i-k a javítási idők amelyek független, μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségű változók, valamint tegyük fel továbbá, hogy τ_i-k és ξ_j-k is függetlenek egymástól!
Az egyszerűbb matematikai leírás végett vezessük be a következő jelöléseket!
Legyen

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha a t-edik időpillanatban a gép működik} \\ 1, & \text{ha a t-edik időpillanatban a gép hibás} \end{cases}$$

valamint

$$P_i(t) = P(X(t) = i), i = 0, 1$$

ezen állapotok eloszlása.

Ekkor a teljes valószínűség tétele alapján kihasználva az exponenciális eloszlás emlékezet nélküliségét az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel

$$
\begin{aligned}
P_0(t+h) &= P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + P_1(t)(\mu h + o(h)) + o(h)\\
P_0(t) + P_1(t) &= 1, \text{ amelyet normalizáló egyenletnek nevezünk}\\
P_0(0) &= 1, \text{ pedig a kezdeti feltétel.}
\end{aligned}
$$

Könnyű látni, hogy átalakítással és behelyettesítéssel kapjuk

$$P_0(t+h) - P_0(t) = -\lambda h P_0(t) + o(h) + (1 - P_0(t))\mu h + o(h) + o(h).$$

Innen

$$P_0(t+h) - P_0(t) = -(\lambda+\mu)hP_0(t) + \mu h + o(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -(\lambda+\mu)P_0(t) + \mu$$

$$P_0'(t) = -(\lambda+\mu)P_0(t) + \mu.$$

Tehát a megoldandó egyenletünk

$$P_0'(t) + (\lambda+\mu)P_0(t) = \mu\,, P_0(0) = 1,$$

amely egy elsőrendű, inhomogén, konstans együtthatós, lineáris differenciálegyenlet és amelynek megoldását például a Laplace-transzformáltak segítségével határozhatjuk meg. A számolás során felhasználjuk a Laplace-transzformáltaknál tanultakat nevezetesen, hogy

$$(P'(t))^*(s) = -P(0) + sP^*(s)$$

valamint, hogy a konstans c függvény Laplace-transzformáltja $\frac{c}{s}$.
Ezek után kapjuk, hogy

$$-1 + sP_0^*(s) + (\lambda+\mu)P_0^*(s) = \frac{\mu}{s}$$

Innen a parciális törtekre bontás módszerét alkalmazva haladunk tovább, nevezetesen

$$P_0^*(s) = \frac{\mu+s}{s}\frac{1}{s+\lambda+\mu} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda+\mu} = \frac{(A+B)s + A(\lambda+\mu)}{s(s+\lambda+\mu)},$$

vagyis

$$A + B = 1, \quad A(\lambda+\mu) = \mu$$

ahonnan

$$A = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad B = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Így

$$P_0^*(s) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{s+\lambda+\mu}.$$

Felhasználva, hogy

$$(\delta e^{-\delta t})^*(s) = \frac{\delta}{s+\delta}, \quad (e^{-\delta t})^*(s) = \frac{1}{s+\delta}$$

kapjuk a megoldást, amely

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Ha a kezdeti feltétel $P_1(0) = 1$, akkor szimmetria okokból a megoldás

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

■

Egyensúlyi (stacionárius) eloszlás

Legyen $P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t), i = 0, 1$. A megfelelő egyenleteknél határértéket véve könnyen láthatjuk, hogy

- $P_0(0) = 1$ kezdeti feltétel esetén a megoldás

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

- $P_1(0) = 1$ kezdeti feltétel esetén a megoldás pedig

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Vegyük észre, hogy a rendszerünk egyensúlyi állapotban elveszti a kezdeti állapottól való függését!

29. Példa. *Határozzuk meg a P_0, P_1-t a stacionárius állapotegyenletek segítségével !*

Megoldás:
Stacionárius állapotban az időtől való függés eltűnik, így a baloldalon álló deriváltak nullák lesznek. Ezek után egyszerű átrendezéssel és a normalizáló feltétel kihasználásával kapjuk a kívánt értékeket, vagyis

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

■

30. Példa. *Határozzuk meg a P_0-t az átlagok segítségével!*

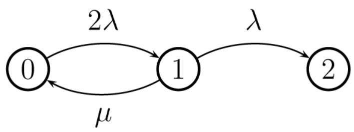
Megoldás:
Az idő folyamán az állapotok váltják egymást és a működési idők + a javítási idők úgynevezett ciklusokat alkotnak, amelyek ráadásul még függetlenek is egymástól. Nem csak exponenciális eloszlás, hanem általános eloszlás esetén is igaz, hogy a stacionárius valószínűségeket úgy kaphatjuk meg, hogy megnézzük az átlagos ciklushossz hányad részét adja az érintett állapotban való átlagos tartózkodási idő.
Esetünkben

$$\frac{\mathbb{E}\tau_1}{\mathbb{E}\tau_1 + \mathbb{E}\xi_1} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{\mu+\lambda}{\lambda\mu}} = \frac{\frac{\lambda\mu}{\lambda}}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = P_0.$$

■
A megbízhatóság-elméletben nagyon fontos szerepet játszanak a rendszer első meghibásodásáig eltelt idők. Ezek eloszlása nyilvánvalóan függ attól, hogy milyen kezdeti állapotból indulunk ki. Az alábbi példa ezt a probléma kört érinti.

31. Példa. *Tegyük fel, hogy van egy két, λ paraméterű exponenciális működési időközökkel rendelkező gépből álló rendszerünk és egy μ paraméterű javítási idővel rendelkező szerelőnk. Tegyük fel még azt, hogyha mindkét gép elromlik akkor a rendszer végérvényesen leáll és nincs több szerelés. Jelentse* $0, 1, 2$, *hogy hány gép rossz és a rendszer induljon a 0 állapotból. Legyenek a működési és javítási idők függetlenek. Határozzuk meg az első meghibásodásig eltelt átlagos időt!*

Megoldás:
Mint ahogyan az előző példánál is tettük jelentse i azt az állapotot, hogy hány gép rossz, $i = 0, 1, 2$. Mivel a 2-es állapotnál a rendszer meghibásodik, ezért onnan nincs visszatérés. Az exponenciális eloszlás tulajdonságai miatt, könnyű látni, hogy az állapotok közötti átmenetek intenzitását az alábbi ábrával szemléltethetjük



4.1. ábra. A 31. példa állapot átmenetei

A már jól ismert módon az állapotegyenletekre az alábbi differenciálegyenlet-rendszert kapjuk

$$
\begin{aligned}
P_0'(t) &= -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\
P_1'(t) &= -(\lambda + \mu) P_1(t) + 2\lambda P_0(t) \\
P_2'(t) &= \lambda P_1(t) \\
P_0(0) &= 1,
\end{aligned}
$$

kezdeti feltétel mellett.
Elég $P_0(t)$ és $P_1(t)$ meghatározása mivel

$$P_2(t) = 1 - (P_0(t) + P_1(t)).$$

A Laplace-transzformáltat véve mindkét oldalon, majd a megfelelő átalakításokat elvégezve kapjuk

$$
\begin{aligned}
sP_0^*(s) - 1 &= -2\lambda P_0^*(s) + \mu P_1^*(s) \\
sP_1^*(s) &= -(\lambda + \mu) P_1^*(s) + 2\lambda P_0^*(s) \\
P_1^*(s) &= \frac{2\lambda}{s + \lambda + \mu} P_0^*(s) \\
(s + 2\lambda) P_0^*(s) &= \frac{2\lambda\mu}{s + \lambda + \mu} P_0^*(s) + 1 \\
(2\lambda + s)(s + \lambda + \mu) P_0^*(s) &= 2\lambda\mu P_0^*(s) + s + \lambda + \mu \\
[(2\lambda + s)(s + \lambda) + s\mu] P_0^*(s) &= s + \lambda + \mu.
\end{aligned}
$$

Így

$$P_0^*(s) = \frac{s+\lambda+\mu}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2}$$
$$P_1^*(s) = \frac{2\lambda}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2}.$$

Hibamentes működési idő eloszlása

Jelölje Y a rendszer hibamentes működési idejét.
Könnyű látni, hogy

$$P(Y<t) = P_2(t) = 1-(P_0(t)+P_1(t)).$$

A jól ismert képlet alapján ezért

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty P(Y>t)\,dt = \int_0^\infty (P_0(t)+P_1(t))\,dt = P_0^*(0)+P_1^*(0)$$

mivel $P_i^*(0) = \int_0^\infty P_i(t)\,dt$.
Tehát

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda+\mu}{2\lambda^2}+\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda+\mu+2\lambda}{2\lambda^2} = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2} = \frac{3}{2\lambda}+\frac{\mu}{2\lambda^2}$$

$\mu = 0$-nál nincs javítás és ekkor a képletünk egyszerűsödik, vagyis

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda}$$

mint ahogyan ezt a párhuzamosan kapcsolt elemekből álló nem javítható rendszernél láttuk.

Természetesen magát a sűrűségfüggvényt is meghatározhatjuk, ha többet szeretnénk megtudni és nem csak az átlagra vagyunk kíváncsiak. Ezt megtehetjük az alábbi módon.

$f_Y(t)$ meghatározása

Ha az $f_Y(t)$-t akarjuk kiszámítani, akkor nyilvánvalóan $f_Y(t) = P_2'(t)$. Ezért a Laplace-transzformált tulajdonságai alapján a következő összefüggéseket írhatjuk fel

$$f_Y^*(s) = (P_2')^*(s) = sP_2^*(s) - P_2(0)$$

$$= sP_2^*(s) = s(1-P_0(t)-P_1(t))^*(s) = s\left(\frac{1}{s} - P_0^*(s) - P_1^*(s)\right).$$

Vagy másképpen

$$P_2'(t) = \lambda P_1(t)$$

vagyis

$$f_Y^*(s) = \lambda P_1^*(s) = \frac{2\lambda^2}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2} = \frac{2\lambda^2}{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{1}{s+\alpha_2} - \frac{1}{s+\alpha_1}\right)$$

ahol

$$s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2 = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2)$$
$$\alpha_{1,2} = \frac{(3\lambda + \mu) \pm \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}.$$

Így

$$f_Y(t) = \frac{2\lambda^2}{\alpha_1 - \alpha_2}(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}).$$

Ezért

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty y f_Y(y)\, dy = \frac{2\lambda^2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[\frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_1^2}\right] = \frac{2\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1\alpha_2)^2}$$
$$= \frac{2\lambda^2(3\lambda + \mu)}{(2\lambda^2)^2} = \frac{3}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}.$$

■

32. Példa. *Módosítsuk az előző példát annyiban, hogy a rendszer most az 1-es állapotból induljon! Határozzuk meg ebben az esetben is a hibamentes működés idő várható értékét!*

Megoldás:
Az előző példához viszonyítva csak a kezdeti feltétel változott meg, vagyis most azt az egyenletrendszert kell megoldani, csak kiinduló értékkel. Vagyis

$$\begin{aligned}
P_0'(t) &= -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\
P_1'(t) &= -(\lambda + \mu)P_1(t) + 2\lambda P_0(t) \\
P_2'(t) &= \lambda P_1(t) \\
P_1(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Ezek után hasonló gondolatmenetet követve, mint az előbb

$$sP_0^*(s) = -2\lambda P_0^*(s) + \mu P_1^*(s)$$
$$sP_1^*(s) - 1 = -(\lambda + \mu)P_1^*(s) + 2\lambda P_0^*(s)$$
$$P_1^*(s) = \frac{s + 2\lambda}{\mu} P_0^*(s)$$
$$[(s + \lambda + \mu)(\frac{s + 2\lambda}{\mu}) + 2\lambda]P_0^*(s) = 1$$

Így

$$\begin{aligned}
P_0^*(s) &= \frac{\mu}{(s + \lambda + \mu)(s + 2\lambda) + 2\lambda\mu} = \frac{\mu}{s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda\mu} \\
&= \frac{\mu}{s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda(\lambda + 2\mu)} \\
P_1^*(s) &= \frac{s + 2\lambda}{\mu} \\
P_0^*(s) &= \frac{s + 2\lambda}{s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda(\lambda + 2\mu)}.
\end{aligned}$$

Ebből az átlag

$$\mathbb{E}(Y) = P_0^*(0) + P_1^*(0) = \frac{\mu}{2\lambda(\lambda+2\mu)} + \frac{2\lambda}{2\lambda(\lambda+2\mu)} = \frac{2\lambda+\mu}{2\lambda(\lambda+2\mu)}.$$

Speciálisan a nem javítható rendszernél $\mu = 0$ esetben $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$, ami nyilvánvaló és a jó számítást bizonyítja.

Legyen $\mathbb{E}(Y_i)$ az i-edik állapotból való indulás esetén az első meghibásodás átlagos ideje. Ekkor az előző eredmények alapján

$$\mathbb{E}(Y_0) = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}, \mathbb{E}(Y_1) = \frac{2\lambda+\mu}{2\lambda(\lambda+2\mu)}.$$

Látható, hogy $\mathbb{E}(Y_0) > \mathbb{E}(Y_1)$, hiszen

$$\frac{\mathbb{E}(Y_0)}{\mathbb{E}(Y_1)} = \frac{\frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}}{\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda(\lambda+2\mu)}} = \frac{(3\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda(2\lambda+\mu)} = \frac{3\lambda^2+7\lambda\mu+2\mu^2}{2\lambda^2+\lambda\mu}$$

$$= 1 + \frac{\lambda^2+6\lambda\mu+2\mu^2}{2\lambda^2+\lambda\mu} > 1.$$

■

33. Példa. *Mi annak a valószínűsége, hogy egyensúlyi állapotban n független elemből álló rendszernél kdarab működik?*

Megoldás:
A megoldás kulcsa a $B(n, \frac{\mu}{\lambda+\mu})$ eloszlás, hiszen egyensúlyi állapotban a működés valószínűsége $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ és n elemből k darabnak kell jónak lennie, vagyis

$$P_k = \binom{n}{k}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

■

A párhuzamos rendszer átlagos működési idejének a meghatározása

Jelöljük A-val a **rendelkezésre állás (készenléti tényezőt)**, ami annak a valószínűsége, hogy egyensúlyi állapotban a rendszer működik. Az n független, párhuzamosan kapcsolt elemből álló rendszer pontosan akkor működik ha legalább egy eleme működik, tehát akkor nem működik ha mindegyik eleme hibás, amelynek a valószínűsége $(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^n$.
Így

$$A = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n.$$

Jelentse $\mathbb{E}(S)$ a hibás állapotban való átlagos tartózkodási időt, míg $\mathbb{E}(O)$ a működő állapotban való átlagos tartózkodási időt. Ekkor a rendszerre vonatkozóan

$$A = \frac{\mathbb{E}(O)}{\mathbb{E}(O)+\mathbb{E}(S)} = 1 - \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}}\right)^n.$$

Ebből

$$A(\mathbb{E}(O)+\mathbb{E}(S)) = E(O), \mathbb{E}(O) = \frac{A}{1-A}\mathbb{E}(\mathbb{S}).$$

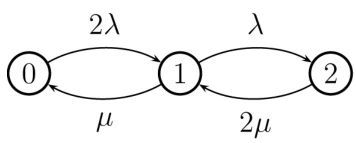
Párhuzamosan kapcsolt rendszer esetén

$$\mathbb{E}(O) = \frac{1-\left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}}\right)^n}{\left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}}\right)^n} \cdot \frac{1}{n\mu}.$$

Az $\frac{1}{n\mu}$ értéket onnan kaptuk, hogy a hibás állapotban való tartózkodási idő $(n\mu)$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, hiszen ez éppen n darab μ paraméterű exponenciális eloszlású javítási idő minimuma.

34. Példa. *Vegyünk egy olyan rendszert ahol két gép és két szerelő van! Az előbbiekhez hasonlóan jelöljük 0-val azt az állapotot amikor mind a két gép jó, 1-el amikor az egyik gép jó, a másik nem, míg 2-vel amikor mind a két gép hibás. A működési idők λ paraméterű, míg a javítási idők μ paraméterű független exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Írjuk fel a megfelelő egyenleteket!*

Megoldás:
Érthető módon az átmenetek intenzitását az alábbi ábra mutatja, melyből az egyenletek és a kezdeti feltétel a szokásos módon könnyen felírhatók. Nevezetesen



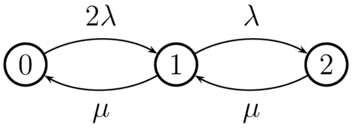
4.2. ábra. 2 gép, 2 szerelő.

$$\begin{aligned}
P_0'(t) &= -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\
P_1'(t) &= -(\lambda+\mu)P_1(t) + 2\lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t) \\
P_2'(t) &= -2\mu P_2(t) + \lambda P_1(t) \\
P_0(t)+P_1(t)+P_2(t) &= 1 \\
P_0(0) &= 1.
\end{aligned}$$

■

35. Példa. *Változtassuk meg az előző példát annyival, hogy nem 2 hanem 1 szerelő van! Határozzuk meg egyensúlyi valószínűségeket, a rendszer hibamentes működési idejének átlagát valamint azt, hogy a szerelő átlagosan mennyi ideig lesz foglalt!*

Megoldás:
Értelemszerűen módosítjuk az átmenetintenzitásokat, melyet az alábbi ábra mutat, majd ezt követően írhatjuk fel a kívánt egyensúlyi egyenleteket és a normalizáló feltételt. Nevezetesen



4.3. ábra. 2 gép, 1 szerelő.

$$\begin{aligned} 2\lambda P_0 &= \mu P_1 \\ (\lambda+\mu)P_1 &= 2\lambda P_0 + \mu P_2 \\ \mu P_2 &= \lambda P_1 \\ P_0 + P_1 + P_2 &= 1 \end{aligned}$$

Rövid számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2\lambda}{\mu} P_0, \\ P_2 &= \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \frac{2\lambda^2}{\mu^2} P_0, \\ {P_0}^{-1} &= 1 + \frac{2\lambda}{\mu} + \frac{2\lambda^2}{\mu^2}. \end{aligned}$$

A második kérdés megválaszolásánál használjuk fel, hogy

$$\mathbb{E}(O) = \frac{A}{1-A}\mathbb{E}(S).$$

Mivel a rendszer addig lesz a 2-es állapotban amíg a javítás be nem fejeződik, ezért $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\mu}$, hiszen a javítási idő μ paraméterű exponenciális. A készenléti tényező pedig ebben az esetben $1 - P_2$.
A harmadik kérdés megválaszolásához vezessük be a következő jelölést: $\mathbb{E}(i)$ az átlagos tétlenségi idő, míg $\mathbb{E}(\delta)$ az átlagos foglaltsági idő. Ekkor

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}(i)}{\mathbb{E}(i) + \mathbb{E}(\delta),}$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\delta) = \frac{1-P_0}{P_0}\mathbb{E}(i).$$

Jelen esetben $\mathbb{E}(i) = \frac{1}{2\lambda}$, n gép esetén $\mathbb{E}(i) = \frac{1}{n\lambda}$.

■

36. Példa. *Hasonlítsuk össze 1 és 2 szerelő esetén az átlagos működési időket a rendszerre vonatkozóan! Jelölje $\mathbb{E}(O_1)$ 1 szerelő esetén, $\mathbb{E}(O_2)$ 2 szerelő esetén az átlagos működési időt.*

Megoldás:

Két szerelő esetén

$$\mathbb{E}(O_2) = \frac{1-(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^2}{(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^2}\cdot\frac{1}{2\mu} = \frac{\mu}{2\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}.$$

Az előzőekben megmutattuk, hogy ha a rendszer a 0 állapotból indul akkor az első meghibásodás átlagos ideje

$$\bar{T}_0 = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}.$$

Könnyű látni, hogy

$$\bar{T}_0 > \mathbb{E}(O_2).$$

Egy szerelő esetén

$$\mathbb{E}(O_1) = \frac{1-\frac{2\lambda^2}{\mu^2}P_0}{\frac{2\lambda^2}{\mu^2}P_0}\cdot\frac{1}{\mu}, \text{ ahol } P_0 = \frac{1}{1+\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{2\lambda^2}{\mu^2}} = \frac{\mu^2}{\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2}.$$

Tehát

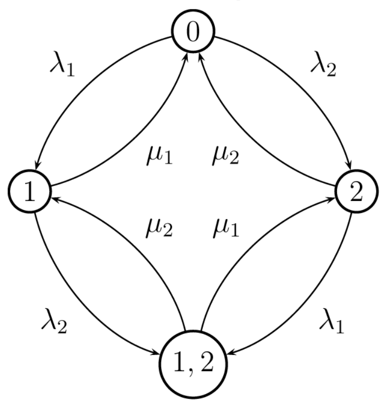
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(O_1) &= \frac{1-\dfrac{2\lambda^2}{\mu^2}\dfrac{\mu^2}{\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2}}{\dfrac{2\lambda^2}{\mu^2}\dfrac{\mu^2}{\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{\dfrac{\mu^2(\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2)-2\lambda^2\mu^2}{\mu^2(\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2)}}{\dfrac{2\lambda^2\mu^2}{\mu^2(\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2)}}\cdot\frac{1}{\mu}\\ &= \frac{\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2-2\lambda^2}{2\lambda^2}\frac{1}{\mu} = \frac{\mu^2+2\lambda\mu}{2\lambda^2}\frac{1}{\mu} = \frac{2\lambda+\mu}{2\lambda^2}\\ &= \frac{\mu}{2\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Mint látható ebben az esetben nem lehet különbséget tenni, hogy az a jó ha 1 vagy ha 2 szerelő van.

■

37. Példa. *Vegyünk egy heterogén 2 szerelős rendszert ahol az i-edik elem λ_i és μ_i intenzitásokkal jellemezhető, azaz a működési idők λ_i paraméterű, a javítási idők μ_i paraméterű, független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, i=1,2.*
Határozzuk meg az időtől függő eloszlást, ha kezdetben mindkét gép működött! Mi lesz stacionárius esetben az átlagos működési ideje a párhuzamosan kapcsolt rendszernek?
Mi lesz az átlagos működési ideje ha nincs javítás?

Megoldás:
A rendszer működésének a leírására az eddigiekhez hasonlóan be kell vezetni néhány jelölést, ügyelve, hogy heterogén gépekkel van dolgunk! Éppen ezért jelölje 0 azt az állapot amikor mindkét gép jó, 1 amikor az 1-es indexű hibás, 2 amikor a 2-es indexű rossz, és végül $1,2$ amikor mindkettő rossz. Látható, hogy ekkor az állapotok átmenetének intenzitása kicsit bonyolultabb, mint ahogyan az alábbi ábra mutatja. A szokásos módon az időtől függő eloszlásra az alábbi differenciálegyenlet-rendszert írhatjuk fel



4.4. ábra. A 37. példa állapot átmenet diagramja

Időtől függő eloszlás

$$\begin{aligned}
P_0'(t) &= -(\lambda_1+\lambda_2)P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t)\\
P_1'(t) &= -(\lambda_2+\mu_1)P_1(t) + \lambda_1 P_0(t) + \mu_2 P_{1,2}(t)\\
P_2'(t) &= -(\lambda_1+\mu_2)P_2(t) + \lambda_2 P_0(t) + \mu_1 P_{1,2}(t)\\
P_{1,2}'(t) &= -(\mu_1+\mu_2)P_{1,2}(t) + \lambda_2 P_1(t) + \lambda_1 P_2(t)\\
P_0(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása pedig

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}\right)\left(\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}\right)\\
P_1(t) &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}\right)\left(\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}\right)\\
P_2(t) &= \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}\right)\\
P_{1,2}(t) &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}\right)
\end{aligned}$$

A további rendszerjellemzők pedig

$$R(t) = 1 - P_{1,2}(t), \quad A = 1 - P_{1,2}, \quad \mathbb{E}(O) = \frac{1-P_{1,2}}{P_{1,2}}\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$$

Stacionárius eset

Jelentse $Q_i = P($ i darab gép rossz $)$! Mint korábbról tudjuk

$$P(\text{i-edik gép működik}) = \frac{\frac{1}{\lambda_i}}{\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\mu_i}}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$Q_0 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$$

$$Q_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}$$

$$Q_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$$

Ezek után az átlagos működési idő

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(O) = \frac{1 - Q_2}{Q_2} \mathbb{E}(S) &= \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}}{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}} \cdot \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \\
&= \frac{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \\
&= \frac{\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}.
\end{aligned}$$

■

38. Példa. *Vegyünk egy heterogén elemekből álló* 1 *szerelős rendszert ahol az i-edik elem* λ_i *és* μ_i *intenzitásokkal jellemezhető, azaz a működési idők* λ_i *paraméterű, a javítási idők* μ_i *paraméterű, független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, i=1,2.*
Határozzuk meg különböző kiszolgálási elvek mellett a rendszer egyensúlyi jellemzőit!
Párhuzamos kapcsolást feltételezve számítsuk ki a rendszer első meghibásodásának a várható idejét, ha kezdetben mindkét gép működött!

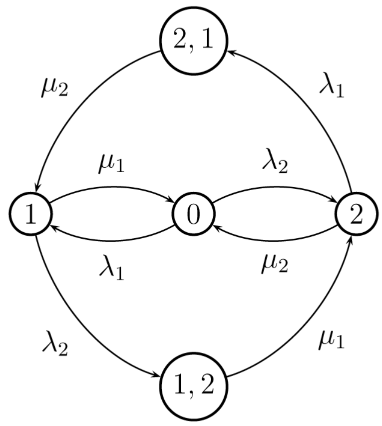
FIFO kiszolgálási elv

Először vezessük be az alábbi állapotokat, amelyek azt jelölik, hogy melyik gép és milyen sorrendben hibásodott meg! A rendszer értelemszerűen a javító egységet jelenti.

- 0 - nincs gép a rendszerben
- 1 – 1-es gép van a rendszerben
- 2 – 2-es gép van a rendszerben

- $1,2$- mindkét igény a rendszerben van, de az 1-es érkezett korábban
- $2,1$ - mindkét igény a rendszerben van, de a 2-es érkezett korábban

Az állapotok átmenetintenzitását az alábbi ábra mutatja. Ebből a szokásos módon felírhatók a egyensúlyi egyenletek.



4.5. ábra. FIFO kiszolgálási elv

Egyensúlyi állapotban az egyenletek és a normalizáló feltétel

$$\begin{aligned}
(\lambda_1+\lambda_2)P_0 &= \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 \\
(\mu_1+\lambda_2)P_1 &= \lambda_1 P_0 + \mu_2 P_{2,1} \\
(\mu_2+\lambda_1)P_2 &= \lambda_2 P_0 + \mu_1 P_{1,2} \\
\mu_1 P_{1,2} &= \lambda_2 P_1 \\
\mu_2 P_{2,1} &= \lambda_1 P_2 \\
P_0 + P_1 + P_2 + P_{1,2} + P_{2,1} &= 1
\end{aligned}$$

Megoldásuk

$$\begin{aligned}
P_0^{-1} &= 1 + \frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2+\mu_1(\lambda_1+\mu_2)} + \frac{\lambda_2(\lambda_2+\lambda_1+\mu_1)}{\lambda_1\mu_1+\mu_2(\lambda_2+\mu_1)} \\
&\quad + \frac{\lambda_2}{\mu_1}\frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2+\mu_1(\lambda_1+\mu_2)} + \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_2(\lambda_2+\lambda_1+\mu_1)}{\lambda_1\mu_1+\mu_2(\lambda_2+\mu_1)} \\
P_1 &= \frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2+\mu_1(\lambda_1+\mu_2)}P_0 \\
P_2 &= \frac{\lambda_2(\lambda_2+\lambda_1+\mu_1)}{\lambda_1\mu_1+\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}P_0 \\
P_{1,2} &= \frac{\lambda_2}{\mu_1}P_1 \\
P_{2,1} &= \frac{\lambda_1}{\mu_2}P_2
\end{aligned}$$

Az előző példa jelölését megtartva, a rendszerben tartózkodó igények számának eloszlása

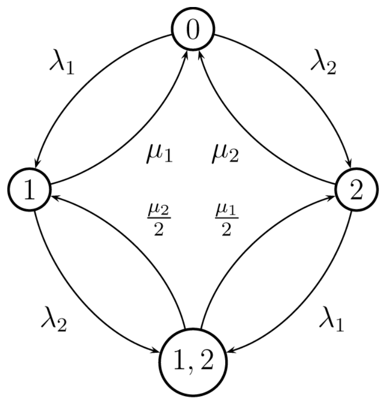
$$Q_0 = P_0\,, Q_1 = P_1 + P_2\,, Q_2 = P_{1,2} + P_{2,1}$$

A rendszerjellemzők

$$\mathbb{E}(\delta) = \frac{(1 - P_0)}{P_0} \cdot \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$
$$\mathbb{E}(O) = \frac{1 - Q_2}{Q_2}\left(\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{P_{1,2}}{Q_2} + \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{P_{2,1}}{Q_2}\right).$$

Processor-sharing kiszolgálási elv

Ezen kiszolgálási elvnél, ha több igény van a rendszerben a kiszolgálási intenzitás egyenletesen oszlik meg az igények között, vagyis 2 igény esetén feleződik. Az állapotok lényegében ugyanazok maradnak, kivéve, hogy most nem számít melyen sorrendben jöttek be az igények.
Az állapotok átmenetintenzitását az alábbi ábra mutatja



4.6. ábra. Processor-sharing kiszolgálási elv

Könnyű látni, hogy egyensúlyi állapotban az egyenletek és a normalizáló feltétel

$$(\lambda_1 + \lambda_2)P_0 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$$
$$(\lambda_2 + \mu_1)P_1 = \lambda_1 P_0 + \frac{\mu_2}{2} P_{1,2}$$
$$(\lambda_1 + \mu_2)P_2 = \lambda_2 P_0 + \frac{\mu_1}{2} P_{1,2}$$
$$\left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}\right) P_{1,2} = \lambda_2 P_1 + \lambda_2 P_2$$
$$P_0 + P_1 + P_2 + P_{1,2} = 1$$

$$Q_0 = P_0\,, Q_1 = P_1 + P_2\,, Q_2 = P_{1,2}$$

Ennek megoldása

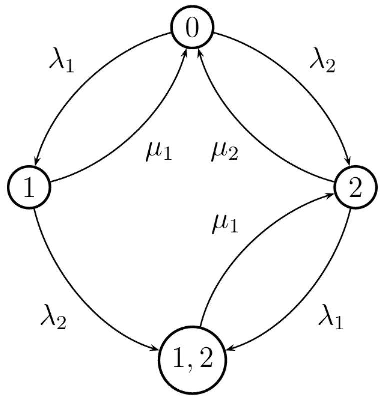
$$P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_0 \, , P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} P_0 \, , P_{1,2} = 2\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2} P_0$$
$$P_0^{-1} = 1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + 2\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2}$$

Rendszerjellemzők

$$\mathbb{E}(\delta) = \frac{(1-P_0)}{P_0} \cdot \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mathbb{E}(O) = \frac{1-Q_2}{Q_2} \frac{2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Abszolút prioritásos kiszolgálási elv

Ezen elv mellett ha mindkét gép hibás, akkor az 1-es indexűt javítja a szerelő, mert az a fontosabb. Hiába szolgálta ki a 2-es indexűt, ha a fontosabb igény beérkezik, akkor az éppen folyamatban levő kiszolgálása megszakad és a fontosabbat szolgálják ki. Az állapotok ugyanazok maradnak, de az átmenetintenzitások értelemszerűen változnak, mint ahogyan a következő ábrán láthatjuk.



4.7. ábra. Abszolút prioritásos kiszolgálási elv

Könnyű látni, hogy egyensúlyi állapotban az egyenletek és a normalizáló feltétel

$$(\lambda_1 + \lambda_2) P_0 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$$
$$(\lambda_2 + \mu_1) P_1 = \lambda_1 P_0$$
$$(\lambda_1 + \mu_2) P_2 = \lambda_2 P_0 + \mu_1 P_{1,2}$$
$$\mu_1 P_{1,2} = \lambda_2 P_1 + \lambda_1 P_2$$
$$P_0 + P_1 + P_2 + P_{1,2} = 1$$

valamint a hibás gépek számának eloszlása

$$Q_0 = P_0 \, , Q_1 = P_1 + P_2 \, , Q_2 = P_{1,2}.$$

Megoldás

$$
\begin{aligned}
P_0^{-1} &= 1+\frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1}{\lambda_2+\mu_1}+2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2}{\lambda_2+\mu_1}\\
P_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_2}P_0\\
P_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1}{\lambda_2+\mu_1}P_0\\
P_{1,2} &= 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}\frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2}{\lambda_2+\mu_1}P_0.
\end{aligned}
$$

A rendszerjellemzők

$$
\mathbb{E}(\delta)=\frac{1-P_0}{P_0}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2},\quad \mathbb{E}(O)=\frac{1-Q_2}{Q_2}\frac{1}{\mu_1}.
$$

Egyszerű behelyettesítéssel látható, hogy homogén esetben mindhárom kiszolgálási elvnél a hibás gépek számának eloszlása ugyanaz lesz, nevezetesen

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{2\lambda}{\mu}P_0,\\
Q_2 &= \frac{\lambda}{\mu}P_1=\frac{2\lambda^2}{\mu^2}P_0,\\
{Q_0}^{-1} &= {P_0}^{-1}=1+\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{2\lambda^2}{\mu^2},
\end{aligned}
$$

mint ahogyan a korábbi példáknál is láttuk.

A rendszer első meghibásodásának az átlagát a Laplace-transzformált kiszámítása nélkül, a teljes várható érték és az exponenciális eloszlás tulajdonságainak a felhasználásával határozhatjuk meg. Ehhez szükségünk van a következő jelölésekre.
Jelölje $\mathbb{E}(T_i)$ a rendszer első meghibásodásának az átlagát ha az i állapotból indulunk ki, $i=0,1,2$. Ekkor felírhatjuk az alábbi egyenleteket

$$
\mathbb{E}(T_1)=\frac{1}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{\mu_1+\lambda_2}+\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_2}\mathbb{E}(T_0),\quad \mathbb{E}(T_2)=\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2+\lambda_1}+\frac{\mu_2}{\mu_2+\lambda_1}\mathbb{E}(T_0)
$$

$$
\mathbb{E}(T_0)=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\mathbb{E}(T_1)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mathbb{E}(T_2).
$$

Ebből a megoldás
Megoldás:

$$
\mathbb{E}(T_1)=\frac{1}{\mu_1+\lambda_2}+\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_2}\mathbb{E}(T_0),\quad \mathbb{E}(T_2)=\frac{1}{\mu_2+\lambda_1}+\frac{\mu_2}{\mu_2+\lambda_1}\mathbb{E}(T_0)
$$

$$\mathbb{E}(T_0) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\mu_2}\right)/$$
$$/\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\mu_2}{\mu_2+\lambda_2}\right).$$

Speciálisan a $\mu_1 = \mu_2 = 0$ esetben, vagyis amikor nincs javítás a 6. Példa eredményeit kapjuk vissza, azaz

$$\mathbb{E}(T_0) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right).$$

■

5. fejezet

Folytonos idejű Markov-láncok

A rendszerek időbeli változását különböző eszközökkel adhatjuk meg, erre szolgálnak pl. a differenciálegyenletek. Ha azonban még a véletlenszerűséget is bevesszük, akkor bonyolultabb módszereket kell alkalmazni. Ebben a részben nem célunk a precíz matematikai tárgyalásmód, ezt nehezen is tudnánk megtenni hiszen ennek a témának nagyon szerteágazó területei vannak és a jegyzet célja nem a véletlen folyamatok ismertetése. A Markov-folyamatok legegyszerűbb osztályát vezetjük be, melyekre később a sorbanállási rendszerek vizsgálatánál szükségünk lesz. Bőséges nyomtatott és digitális irodalom áll az olvasó rendelkezésére, említésképpen felsorolunk néhányat: Allen [1], Gnyedenko, Beljajev, Szolovjev [2], Kleinrock [6], Ovcharov [8], Sztrik [14], Trivedi [17] Tijms [16].

Jelen fejezetben a gyakorlat szempontjából egyik legfontosabb sztochasztikus-folyamattal foglalkozunk, vagyis amikor minden időpillanathoz egy $0, 1, ...$ értékeket felvevő valószínűségi változót rendelünk. Hogy megmutassuk milyen kapcsolat van az egyes időpillanatban felvett értékek között, a jövő és a múlt viszonyát írjuk fel matematikai formában. Az egyik legegyszerűbb kapcsolat, amit leegyszerűsítve úgy mondunk, hogy a jövő a múlttól csak a jelenen keresztül függ, az alábbi tulajdonság.

14. Definíció. *(Markov-tulajdonság) Ha fennáll minden n-re és a változók összes lehetséges értékére, hogy*

$$P(X(t_{n+1}) = i_{n+1}|X(t_1) = i_1, \cdots, X(t_n) = i_n) = P(X(t_{n+1}) = i_{n+1}|X(t_n) = i_n)$$

*akkor az $X(t)$ folyamatot **Markov-láncnak** nevezzük.*

Jelöljük a $P(X(t+h) = j|X(t) = i)$ valószínűséget $P_{ij}(t, t+h)$-vel, míg időben homogén esetben $P_{ij}(h)$-val. A formula azt jelenti, hogy h idő alatt az i állapotból a j állapotba megy át a folyamat.

Nyilván

$$\sum_j P_{ij}(t, t+h) = 1.$$

Hogy az állapotvalószínűségek időbeli változását felírjuk szükségünk van az átmenetvalószínűségek ismeretére, hiszen a teljes valószínűség tételét szeretnénk használni. Ezért vezetjük be a következő definíciót

15. Definíció. *(Intenzitás-mátrix) Jelöljük Q-val a a folyamathoz tartozó* **intenzitás-mátrixot**, *melynek elemei q_{ij} és őket az alábbi módon értelmezzük*

$$q_{ij} = \begin{cases} \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h}, & \text{ha } i \neq j, \\ \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)-1}{h}, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}, \text{ azaz } q_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h}$$

Vagyis az átmenetvalószínűségek

$$P_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$$
$$P_{ii}(h) = 1 + q_{ii}h + o(h)$$

Ezek után az állapotegyenleteket akarjuk felírni, melyhez szükségünk lesz a már jól megszokott jelölésre, azaz, legyen

$$P_j(t) = P(X(t) = j), \quad j = 0, 1, 2 \ldots.$$

Ekkor az állapotegyenleteink a következők

$$P_j(t+h) = P_j(t) \cdot P_{jj}(h) + \sum_{i\neq j} P_i(t)P_{ij}(h), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Ezek átírhatóak az alábbi formákba

$$P_j(t+h) - P_j(t) = P_j(t) \cdot (P_{jj}(h) - 1) + \sum_{i\neq j} P_i(t)P_{ij}(h), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{P_j(t+h) - P_j(t)}{h} = \frac{P_j(t) \cdot (P_{jj}(h) - 1)}{h} + \sum_{i\neq j} \frac{P_i(t)P_{ij}(h)}{h}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Ebből határértéket véve a keresett differenciálegyenlet-rendszer

$$P_j'(t) = q_{jj}P_j(t) + \sum_{i\neq j} q_{ij}P_i(t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\sum_j P_j(t) = 1, \text{ normalizáló feltétel}$$
$$P_j(0) = \delta_{jk}, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots \text{ kezdeti feltétel.}$$

Egyensúlyi (stacionárius) eloszlás

Mint már biztosan észrevettük az előző viszonylag egyszerű példák min speciális esetei ennek az általános egyenletrendszernek. Láttuk, hogy időtől függő megoldásuk eléggé bonyolult és sokszor zárt alakban nem is adható meg, de numerikusan esetleg meghatározhatjuk őket. Hogy jól használható formulákat kapjunk lemondunk az időtől való függésről és csak a határeloszlásra felírt egyenletek érdekelnek bennünket.

Nevezetesen a $P_k = \lim_{k\to\infty} P_k(t)$ határátmenet végrehajtása után a stacionárius esetben az állapotegyenletek a következők

$$q_j P_j = \sum_{i\neq j} q_{ij} P_i, \quad \sum_j P_j = 1, \quad q_j = -q_{jj}.$$

A modellezésnél bevezetett folyamatokról el kell döntenünk, hogy melyik osztályba tartoznak, mert azután a rájuk vonatkozó tételeket tudjuk alkalmazni. Mivel a Markov-láncok elmélete a legjobban kidolgozott, a gyakorlat szempontjából legérthetőbben tudjuk kezelni problémáinkat, nagyon hasznos az alábbi, bizonyítás nélkül közölt tétel.

24. Tétel. *Az $X(t)$ akkor és csak akkor folytonos idejű Markov-lánc, ha bármely j állapotban a tartózkodási ideje q_j paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.*

5.1. Születési-halálozási folyamatok

További egyszerűsítést jelent, ha a folyamat csak szomszédos állapotokba mehet. Ezt az esetet írják le az alábbi speciális intenzitások

$$\begin{aligned}
q_{ii+1} &= \lambda_i \ , P_{ii+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad i = 0,1,\dots \\
q_{ii-1} &= \mu_i \ , P_{ii-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad i = 1,\dots \\
q_{ii} &= -(\lambda_i + \mu_i), \quad P_{ii}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i = 0,1,\dots \\
q_{ij} &= 0 \ , P_{ij} = o(h) \text{ ha } |i-j| > 1 \quad , i,j = 0,1,\dots \\
\mu_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Ekkor a λ_i -ket **születési**, míg μ_i-ket **halálozási intenzitásoknak** nevezzük. Ekkor az egyenletek is egyszerűsödnek, nevezetesen

$$P_j'(t) = -(\lambda_j + \mu_j)P_j(t) + \lambda_{j-1}P_{j-1}(t) + \mu_{i+1}P_{j+1}(t), \quad j = 0,1,\dots$$

Ezekből egyensúlyi helyzetben az alábbit nyerjük

$$\begin{aligned}
(\lambda_j + \mu_j)P_j &= +\lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{i+1}P_{j+1}, \quad j = 0,1,\dots \\
\sum_j P_j &= 1 \\
\mu_0 &= 0
\end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszer megoldásához vegyük észre, hogy minden j-re igaz a

$$D_j = \lambda_j P_j - \mu_{j+1}P_{j+1} = 0,$$

összefüggés hiszen könnyen látható, hogy

$$D_0 = \lambda_0 P_0 - \mu_1 P_1 = 0,$$

$$D_j = \lambda_j P_j - \mu_{j+1}P_{j+1} = \lambda_{j-1}P_{j-1} - \mu_j P_j = D_{j-1}, \quad j = 1,\dots.$$

Ezen tulajdonság felhasználásával rögtön kapjuk, hogy

$$P_{j+1} = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} P_j,$$

így

$$(5.1) \qquad P_i = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} P_0, \quad i = 1, 2, \cdots, \quad {P_0}^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i},$$

amely nagy szerepet játszik majd különböző sorbanállási rendszerek modellezésében. Végtelen számosságú állapottér esetén a normalizáló feltételt biztosító összegzés nem biztos, hogy konvergens sort ad, ezért annak konvergenciáját biztosítanunk kell, és ezután a megoldás egyértelmű lesz.

Erre nézzük meg az alábbi egyszerű példát!

39. Példa. *Legyen* $\lambda_i = \lambda, \quad i = 0, 1, \ldots$ *és* $\mu_i = \mu \quad i = 1, 2, \ldots$.
Ekkor

$$P_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0, \quad {P_0}^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i,$$

ami pontosan akkor konvergál ha $\lambda < \mu$.

Tiszta születési-folyamat

Ha $\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, \ldots$ és $\mu_i = 0, i = 1, 2, \ldots$, akkor **tiszta születési-folyamatról** beszélünk és akkor a már jól ismert Poisson-folyamatra vonatkozó differenciálegyenletrendszert kapjuk

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$
$$P_j'(t) = -\lambda P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t)$$
$$P_k(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 0, \\ 0, & \text{ha } k \neq 0. \end{cases}$$

II. rész

Feladatgyűjtemény

6. fejezet

Valószínűségszámítási alapok

6.1. Diszkrét eloszlások

1. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $\xi \in B(n,p)$ akkor $\mathbb{E}\xi = np$, valamint $\mathbb{D}^2\xi = np(1-p)$!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n} p\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \\
&= np\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j}}_{\text{Binomiális tétel}} = np(p+1-p)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{np} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-2-(k-2)} + np \\
&= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{n-2-j} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np = np((n-1)p+1) = np(np-p+1).
\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = np(np-p+1) - (np)^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

■

2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $\xi \in Po(\lambda)$, akkor $\mathbb{E}\xi = \lambda$, valamint $\mathbb{D}^2\xi = \lambda$!*

Megoldás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}_{\lambda}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

■

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $\xi \in Geo(p)$, akkor $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{p}$, valamint $\mathbb{D}^2\xi = \frac{q}{p^2}$!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}(q^k)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)'\\ &= p\frac{1(1-q)-(-1)q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

A levezetésnél felhasználtuk, hogy abszolút konvergens sor esetén a deriválás és az összegzés sorrendje felcserélhető.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi^2 &\sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)q^{k-1}\\ &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} + \underbrace{p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}}_{\frac{1}{p}} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}q + \frac{1}{p} = pq\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'' + \frac{1}{p}\\ &= pq\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'' + \frac{1}{p} = pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'' + \frac{1}{p} = pq\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' + \frac{1}{p} = pq\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p}\\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{D}^2\xi = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Nézzük meg hogyan számolhatók ki ezek a mennyiségek egy kicsit egyszerűbben kihasználva a geometriai eloszlás tulajdonságait!

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p(1-p)^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\\ &= (1-p)\mathbb{E}(\xi) + 1.\end{aligned}$$

Ebből $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}$. Hasonlóan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}((k-1)^2 + 2k - 1)p(1-p)^{k-1}\\ &= (1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2 p(1-p)^{k-2} + 2\mathbb{E}(\xi) - 1\\ &= (1-p)\mathbb{E}(\xi^2) + \frac{2}{p} - 1.\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= (1-p)\mathbb{E}(\xi^2) + \frac{2-p}{p}\\ \mathbb{E}(\xi^2) &= \frac{2-p}{p^2}.\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

■

4. Feladat. *Határozzuk meg a ξ^* p paraméterű módosított geometriai eloszlás várható értéket és szórásnégyzetét!*

Megoldás:
Mint tudjuk $P(\xi^* = k) = pq^k\,, k = 0, 1\ldots$ és $\xi^* = \xi - 1$, ahol $\xi \in Geo(p)$ amiből következik, hogy

$$\mathbb{E}\xi^* = \mathbb{E}(\xi - 1) = \mathbb{E}\xi - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}.$$

$$\mathbb{D}^2\xi^* = \mathbb{D}^2\xi.$$

■

5. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a geometriai eloszlásra teljesül a*

$$P(\xi = k + l | \xi > k) = P(\xi = l),$$

úgynevezett ***örökifjú tulajdonság!***

Megoldás:

$$P(\xi = k + l | \xi > k) = \frac{P(\xi = k + l)}{P(\xi > k)} = \frac{p(1-p)^{k+l-1}}{\sum_{j=k+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1}} = \frac{(1-p)^{k+l-1}}{\sum_{j=k+1}^{\infty} (1-p)^{j-1}}$$
$$= \frac{(1-p)^{k+l-1}}{\frac{(1-p)^k}{1-1+p}} = \frac{(1-p)^{k+l-1}}{\frac{(1-p)^k}{p}} = \frac{p(1-p)^{k+l-1}}{(1-p)^k} = p(1-p)^{l-1} = P(\xi = l).$$

■

6. Feladat. *Legyen $\xi \in B(n, \rho)$, $\eta \in B(m, \rho)$ és egymástól függetlenek. Határozzuk meg a $P(\xi = i | \xi + \eta = k)$ -t!*

Megoldás:

$$P(\xi = i | \xi + \eta = k) = \frac{P(\xi = i, \xi + \eta = k)}{P(\xi + \eta = k)} = \frac{P(\xi = i, \eta = k - i)}{P(\xi + \eta = k)}.$$

Mivel ξ és η függetlenek és ξ és η összegre szintén binomiális az egyenlőség az alábbi alakot ölti

$$P(\xi = i | \xi + \eta = k) = \frac{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}}{\binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}$$

vagyis hipergeometriai eloszlást kapunk.

■

7. Feladat. *Legyen $\xi \in Po(\lambda)$ és $\eta \in Po(\beta)$ függetlenek! Mivel egyenlő $P(\xi = k | \xi + \eta = n)$?*

Megoldás:

$$P(\xi = k | \xi + \eta = n) = \frac{P(\xi = k, \eta = n - k)}{P(\xi + \eta = n)} = \frac{P(\xi = k) P(\eta = n - k)}{P(\xi + \eta = n)}$$
$$= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\beta}}{\frac{(\lambda+\beta)^n}{n!} e^{-(\lambda+\eta)}} = \frac{\frac{\lambda^k}{k!} \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda+\beta)^n}{n!}} = \frac{\binom{n}{k} \lambda^k \beta^{n-k}}{(\lambda+\eta)^n} = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{(\lambda+\beta)^k} \frac{\beta^{n-k}}{(\lambda+\beta)^{n-k}}$$
$$= \binom{n}{k} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)}_{p}^{k} \underbrace{\left(\frac{\beta}{\lambda+\beta}\right)}_{1-p}^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \in B(n, p).$$

■

8. Feladat. *Egy forgalmas áruházba λ paraméterű Poisson-eloszlás szerint érkeznek vásárlók, majd azok p_i valószínűségekkel választják az i-edik pénztárat $(i = 1, \dots, n, \sum_i p_i = 1)$. Határozzuk meg, hogy az i-edik pénztárnál a vásárlók száma milyen eloszlást követ!*

Megoldás:
Végezzünk el kísérletet N-szer és jelentse $\xi_i, i = 1, \dots, n$ az i-edik kimenetel (amelynek valószínűsége p_i) bekövetkezéseinek a számát. Ekkor $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ együttes eloszlása N és $p_1, \dots, p_n$ paraméterű polinomiális eloszlás, ezért

$$P(\xi_1 = k_1, \dots \xi_n = k_n | \xi_1 + \dots + \xi_n = N) = \frac{N!}{k_1! \dots k_n!} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$$

Mivel $\xi_1 + \dots + \xi_n = \xi \in Po(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = k_1, \dots \xi_n = k_n) &= P(\xi_1 = k_1, \dots \xi_n = k_n | \xi_1 + \dots + \xi_n = N) P(\xi = N) \\ &= \frac{N!}{k_1! \dots k_n!} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \frac{\lambda^N}{N!} e^{-\lambda} = \frac{p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} \lambda^{k_1 + \dots + k_n} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n p_i)} \\ &= \frac{(p_1 \lambda)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda p_n} \dots \frac{(p_n \lambda)^{k_n}}{k_n!} e^{-\lambda p_n}. \end{aligned}$$

Amiből következik, hogy $\xi_i \in Po(\lambda p_i), i = 1, \dots, n$, és függetlenek.
■

6.2. Folytonos eloszlások

9. Feladat. *Legyen*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t \qquad , \quad \alpha > 0$$

az úgynevezett teljes Gamma-függvény ($\Gamma(\alpha)$ függvény). Mutassuk meg, hogy

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1), \qquad \alpha > 1\ !$$

Megoldás:
A bizonyításhoz parciális integrálást fogunk használni, így

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \left[-t^{\alpha-1} e^{-t}\right]_0^\infty + (\alpha - 1) \int_0^\infty t^{\alpha-2} e^{-t} \mathrm{d}t \\ &= (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \end{aligned}$$

mivel az első tag értéke 0, amit a szokásos L'Hospital-szabály alkalmazásával láthatunk be.
Könnyű látni, hogy $\Gamma(1) = 1$, és ezért $\Gamma(n) = (n-1)!$ vagyis $\Gamma(\alpha)$ -t a faktoriális függvény általánosításának is tekinthetjük.
■

10. Feladat. *Mutassuk meg, hogy* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$!

Megoldás:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

A $t = \frac{x^2}{2}$ helyettesítést bevezetve $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = x$, így

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

■

11. Feladat. *Határozzuk meg az* (α, λ) *paraméterű* Γ *-eloszlás várható értékét, szórásnégyzetét és k-dik momentumát !*

Megoldás:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^\infty x \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}x,$$

ahol

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Az $u = \lambda x$ helyettesítést bevezetve

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^\infty \frac{u^\alpha \cdot e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

mivel $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
Hasonlóan

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\alpha+1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty u^{\alpha+1} e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}.$$

Ebből

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Vagyis a szóródási együttható négyzete $C_\xi^2 = 1/\alpha$, ami lehet 1 -nél nagyobb és kisebb is.

Ezek után

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^k) &= \int_0^\infty x^k \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^{k-1}}\int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{k+\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda^k\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty u^{k+\alpha-1}e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1}{\lambda^k}.\end{aligned}$$

Speciálisan $\alpha = n$ esetben az (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlást kapjuk és ekkor

$$\mathbb{E}(\xi^k) = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1}{\lambda^k}.$$

Ebből $n = 1$-nél az exponenciális eloszlást nyerjük, amelyre $\mathbb{E}(\xi^k) = \dfrac{k!}{\lambda^k}$.

■

12. Feladat. *Határozzuk meg az (α, k) paraméterű Pareto-eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_k^\infty x\alpha k^\alpha x^{-\alpha-1}\mathrm{d}x = \int_k^\infty \alpha k^\alpha x^{-\alpha}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\alpha k^\alpha x^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\right]_k^\infty = \begin{cases} \frac{k\alpha}{\alpha-1} & ,\ \alpha > 1 \\ \infty & ,\ \alpha \le 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_k^\infty \alpha k^\alpha x^{-\alpha+1}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{k^2\alpha}{\alpha-2} & ,\ \alpha > 2 \\ \infty & ,\ \alpha \le 2 \end{cases}$$

Így

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{k^2\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{k\alpha}{\alpha-1}\right)^2 \quad , \quad \alpha > 2$$

■

13. Feladat. *Legyen* $\xi \in Exp(\lambda)$, *és* $\eta = c \cdot e^{\alpha\xi}$, *ahol* $\alpha, c > 0$. *Határozzuk meg* η *eloszlásfüggvényét!*

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
P(\eta < x) &= P(ce^{\alpha\xi} < x) = P\left(\alpha\xi < \ln\left(\frac{x}{c}\right)\right) = P\left(\xi < \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{x}{c}\right)\right) \\
&= 1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}\ln\left(\frac{x}{c}\right)} = 1 - e^{\ln\left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}}} = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}},
\end{aligned}
$$

vagyis $\left(c, \frac{\lambda}{\alpha}\right)$ paraméterű Pareto-eloszlást kapunk.
$\blacksquare$

7. fejezet

A sztochasztikus modellezés alapjai

7.1. Az exponenciális eloszlás és a belőle származtatott eloszlások

14. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az exponenciális eloszlásra teljesül a*

$$P(\xi > x + y | \xi > x) = P(\xi > y),$$

úgynevezett ***örökifjú tulajdonság!***

Megoldás:

$$P(\xi > x + y | \xi > x) = \frac{P(\xi > x + y)}{P(\xi > x)} = \frac{1 - P(\xi < x + y)}{1 - P(\xi < x)}$$
$$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(x+y)})}{1 - (1 - e^{-\lambda x})} = e^{-\lambda y} = P(\xi > y).$$

■

15. Feladat. *Határozzuk meg a* λ *paraméterű exponenciális eloszlás* n *-dik momentumát!*

Megoldás:

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \left[-x^n e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x.$$

A L'Hospital-szabály alkalmazásával látható, hogy az első tag értéke 0 és így

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \frac{n}{\lambda} \mathbb{E}(\xi^{n-1}).$$

Ebből a rekurziót figyelve

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

következik.

■

16. Feladat. *$t = 0$-ban két független exponenciális eloszlású ideig tartó tevékenység kezdődik. Az egyik X ideig tart, ahol X λ paraméterű exponenciális eloszlású, a második Y ideig, ahol Y μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Legyen $V = min(X, Y)$, $Z = max(X, Y)$, $W = Z - V$.*
Ezek után határozzuk meg

1. *az első (azaz a rövidebb ideig tartó) tevékenység idejének az eloszlását és várható értékét (V eloszlását és várható értékét)*
2. *annak a valószínűségét, hogy az X esemény fejeződik be előbb ($P(X < Y)$)*
3. *az első és a második esemény befejezése közti idő eloszlását és várható értékét(W eloszlását, várható értékét)*
4. *annak a valószínűségét, hogy egy tetszőleges t időpillanatban*
   - *az X esemény már befejeződött és az Y esemény még nem ($P(X < t < Y)$)*
   - *az első esemény már befejeződött és a második még nem ($P(V < t < Z)$)*
   - *mindkét esemény befejeződött ($P(X < t, Y < t)$)*
5. *az a) és c) pontokban kapott valószínűségi változók összegének ($W + V$) eloszlását*
6. *X eloszlását, ha tudjuk, hogy $X < \tau$ ($P(X < t|X < \tau)$)*
7. *X eloszlását, ha tudjuk, hogy $X < Y$ ($P(X < t|X < Y)$)*
8. *X eloszlását, ha tudjuk, hogy $X > Y$ ($P(X < t|X < Y)$)!*

Megoldás:

1. a rövidebb ideig tartó tevékenység befejezésének idejére
$$\begin{aligned}P(V < t) &= 1 - P(V > t) = 1 - P(X > t, Y > t)\\ &= 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t}e^{-\mu t} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\end{aligned}$$
azaz, V $\lambda + \mu$ paraméterű exponenciális eloszlású, $\mathbb{E}(V) = \frac{1}{\lambda+\mu}$
2. az X esemény fejeződik be előbb
$$P(X < Y) = \int_{y=0}^{\infty} P(X < y)f_Y(y)\,dy = \int_{y=0}^{\infty}(1-e^{-\lambda y})\mu e^{-\mu y}\,dy = 1-\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$
3. az első és második esemény befejezése közti idő
$$P(W < t) = P(W < t|X < Y)P(X < Y) + P(W < t|X > Y)P(X > Y)$$
az $(X < Y)$ feltétel mellett W az Y hátralévő időtartama lesz, ami viszont az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt
$$\begin{aligned}&P(W < t|X < Y)P(X < Y) + P(W < t|X > Y)P(X > Y)\\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-\mu t}) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{\lambda t})\end{aligned}$$
$$\mathbb{E}(W) = \frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}$$

4. az X esemény már befejeződött az Y még nem

$$P(X < t < Y) = P(X < t)P(Y > t) = (1 - e^{-\lambda t})e^{-\mu t}$$

az első esemény már befejeződött a második még nem

$$\begin{aligned}
&P(V < t < Z) = \\
&\quad = P(V < t < Z|X < Y)P(X < Y) + P(V < t < Z|X > Y)P(X > Y) \\
&\quad = P(X < t < Y|X < Y)P(X < Y) + P(Y < t < X|X > Y)P(X > Y) \\
&\quad = P(X < T < Y, X < Y) + P(Y < t < X, X > Y) = P(X < t < Y) + P(Y < t < X) \\
&\quad = (1 - e^{-\lambda t})e^{-\mu t} + (1 - e^{-\mu t})e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

mindkét esemény befejeződött már

$$P(X < t, Y < t)P(Z < t) = P(X < t)P(Y < t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})$$

5. a W és a V valószínűségi változók összegének eloszlása
Mivel összefüggő valószínűségi változókról van szó nem lehet konvolúciót alkalmazni, hanem egyszerűen

$$P(W + V < t) = P(Z < t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})$$

6. X eloszlása, ha $X < \tau$

$$P(X < t|X < \tau) = \frac{P(X < t, X < \tau)}{P(X < \tau)} = \begin{cases} \frac{P(X<t)}{P(X<\tau)} = \frac{1-e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda \tau}} & \text{ha } 0 < t < \tau \\ 1 & \text{ha } t > \tau. \end{cases}$$

7. X eloszlása ha $X < Y$

$$\begin{aligned}
P(X < t|X < Y) &= \frac{P(X < t, X < Y)}{P(X < Y)} = \frac{\int\limits_{y=0}^{\infty} P(X < t, X < y) f_Y(y)\,dy}{P(X < Y)} \\
&= \frac{\int\limits_{y=0}^{t} P(X < y) f_Y(y)\,dy}{P(X < Y)} + \frac{\int\limits_{y=t}^{\infty} P(X < t) f_Y(y)\,dy}{P(X < Y)} \\
&= 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}$$

azaz $\lambda + \mu$ paraméterű exponenciális eloszlás

8. X eloszlása ha $X > Y$

$$P(X < t|X > Y) = \frac{P(X < t, X > Y)}{P(X > Y)} = \frac{\int_{y=0}^{\infty} P(X < t, X > y) f_Y(y)\,dy}{P(X > Y)}$$

$$= \frac{\int_{y=0}^{t} P(y < X < t) f_Y(y)\, dy}{P(X > Y)} + \frac{\int_{y=0}^{t} (F_X(t) - F_X(y)) f_Y(y)\, dy}{P(X > Y)}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t})$$

■

17. Feladat. *Mi a valószínűsége, hogy $\xi_i = min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, ha $\xi_k \in Exp(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, n$ függetlenek?*

Megoldás:
A teljes valószínűség tétele alapján

$$P(\xi_i < min(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)) = \int_0^\infty P(\xi_i < x) f_{min(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)}(x)\, dx$$
$$= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_i x}) \cdot \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j \right) e^{-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j x}\, dx = \int_0^\infty \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j \right) e^{-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j x}\, dx$$
$$- \int_0^\infty \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j \right) e^{-\lambda_i x} e^{-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j x}\, dx = 1 - \int_0^\infty e^{-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x} \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j \right) dx$$
$$1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j \underbrace{\int_0^\infty e^{-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) dx}_{1} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} = 1 - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}.$$

■

18. Feladat. *Határozzuk meg a sorbakapcsolt rendszer várható élettartamát, ha a független elemek élettartama exponenciális eloszlást követ!*

Megoldás:
Sorbakapcsolt rendszer esetén ez éppen

$$\mathbb{E}(min(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mathbb{E}\xi_j}} \leq min(\mathbb{E}\xi_1, \ldots, \mathbb{E}\xi_n).$$

■

19. Feladat. *Legyenek $\xi_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, független valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy*

$$\mathbb{E}(max(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \geq max(\mathbb{E}(\xi_1), \ldots, \mathbb{E}(\xi_n))$$
$$\mathbb{E}(min(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \leq min(\mathbb{E}(\xi_1), \ldots, \mathbb{E}(\xi_n))!$$

Megoldás:

$$P(max(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i < x) \leq P(\xi_i < x)$$

miatt

$$P(max(\xi_1,\dots,\xi_n) \geq x) \geq P(\xi_i \geq x)$$

így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(max(\xi_1,\dots,\xi_n)) &= \int\limits_0^\infty P(max(\xi_1,\dots,\xi_n) \geq x)\mathrm{d}x \\ &\geq \int\limits_0^\infty P(\xi_i \geq x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}(\xi_i), \qquad i = 1,\dots,n,\end{aligned}$$

melyből következik az állítás.
Hasonlóan

$$P(min(\xi_1,\dots,\xi_n) \geq x) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \geq x) \leq P(\xi_i \geq x),$$

így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(min(\xi_1,\dots,\xi_n)) &= \int\limits_0^\infty P(min(\xi_1,\dots,\xi_n) \geq x)\mathrm{d}x \\ &\leq \int\limits_0^\infty P(\xi_i \geq x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}(\xi_i), \qquad i = 1,\dots,n,\end{aligned}$$

melyből következik az állítás.
■

20. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az (n,λ) paraméterű Erlang-eloszlás eloszlásfüggvénye*

$$F_{\eta_n}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} \ .$$

Megoldás:

$$F_{\eta_n}(x) = \int_0^x \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}e^{-\lambda t}\, dt$$

Parciális integrálást alkalmazva, ahol $g(x) = t^{n-1}$, $f(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$ kapjuk, hogy

$$\underbrace{\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}e^{-\lambda t}\, dt}_{I_n(x)} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}([-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}t^{n-1}]_0^x - \int_0^x (-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t})(n-1)t^{n-2}\, dt)$$

$$= -\frac{\lambda x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} + \underbrace{\int_0^x \frac{\lambda(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda t}\, dt}_{I_{n-1}(x)} = -\frac{\lambda x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} - \frac{\lambda x^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda x} + I_{n-2}(x)$$

$$= \dots = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x}.$$

Következményként láthatjuk, hogy

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} = \int_x^{\infty} \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\, dt.$$

■

21. Feladat. *Legyen $\xi \in Exp(\lambda)$ és $\eta \in Exp(\mu)$ függetlenek. Határozzuk meg a konvolúciójukat.*

Megoldás:

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(z-x)}\, dx = \lambda\mu \int_0^z e^{-\lambda x - \mu(z-x)}\, dx = \lambda\mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{-x(\lambda-\mu)}\, dx \\ &= \lambda\mu e^{-\mu z} [\frac{-1}{\lambda-\mu} e^{-x(\lambda-\mu)}]_0^z = \frac{\lambda\mu e^{-\mu z}}{-(\lambda-\mu)}(e^{-z(\lambda-\mu)} - 1) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\lambda z} - \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\mu z} \\ &= \frac{\mu}{\mu-\lambda} \lambda e^{-\lambda z} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \mu e^{-\mu z}. \end{aligned}$$

■

22. Feladat. *Határozzuk meg az előző példában meghatározott eloszlás várható értékét a sűrűségfüggvény felhasználásával.*

Megoldás:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi+\eta) &= \int_0^{\infty} x(\frac{\mu}{\mu-\lambda} \lambda e^{-\lambda x} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \mu e^{-\mu x})\, dx \\ &= \frac{\mu}{\mu-\lambda} \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx + \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \int_0^{\infty} x\mu e^{-\mu x}\, dx = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\frac{1}{\mu} = \frac{\mu^2-\lambda^2}{\lambda\mu(\mu-\lambda)} \\ &= \frac{(\lambda+\mu)(\mu-\lambda))}{\lambda\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}, \end{aligned}$$

amit az $\mathbb{E}(\xi+\eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ összefüggésből is megkaphattunk volna, de ezzel a sűrűségfüggvény helyességét ellenőriztük.

■

23. Feladat. *A 2-fázisú hipo-exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényéből származtassuk a $(2, \lambda)$ paraméterű Erlang-eloszlás sűrűségfüggvényét!*

Megoldás:
Mint láttuk

$$f_{\xi+\eta}(x) = \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \mu e^{-\mu x} + \frac{\mu}{\mu-\lambda} \lambda e^{-\lambda x}.$$

Ebből $\mu \to \lambda$ határértékkel nyerjük a kívánt sűrűségfüggvényt.

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\mu e^{-\mu x} + \frac{\mu}{\mu-\lambda}\lambda e^{-\lambda x} = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{\lambda\mu\left(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}\right)}{\mu-\lambda} = \frac{0}{0},$$

ezért alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt! Ekkor $\lambda^2 \cdot xe^{-\lambda x}$-et kapunk, ami éppen a kívánt eredmény.

■

24. Feladat. *Határozzuk meg a 2-fázisú hipo-exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}
F_{\xi+\eta}(x) &= \int_0^x f_{\xi+\eta}(y)\mathrm{d}y = \int_0^x \left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu}\mu e^{-\mu x} + \frac{\mu}{\mu-\lambda}\lambda e^{-\lambda x}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\left(1-e^{-\mu x}\right) + \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left(1-e^{-\lambda x}\right) \\
&= \frac{\lambda - \lambda e^{-\mu x} - \mu + \mu e^{-\lambda x}}{\lambda-\mu} \\
&= 1 + \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\mu e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\mu x}\right).
\end{aligned}$$

Ebből $\mu \to \lambda$ határátmenettel a L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}$$

-et kapunk, ami éppen a $(2, \lambda)$ paraméterű Erlang-eloszlás eloszlásfüggvénye.

■

25. Feladat. *Legyenek $\xi \in Exp(\lambda)$, $\eta \in Exp(\mu)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg az $f_{\xi|\xi+\eta}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvényt!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}
f_{\xi|\xi+\eta}(x|y) &= \frac{f_\xi(x)\cdot f_\eta(y-x)}{f_{\xi+\eta}(y)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mu\cdot e^{-\mu(y-x)}}{\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu y} - e^{-\lambda y}\right)} \\
&= (\lambda-\mu)\frac{e^{-(\lambda-\mu)x}}{1-e^{-(\lambda-\mu)y}} \qquad , \quad 0 < x < y.
\end{aligned}$$

Ha $\lambda = \mu$, akkor L'Hospital-szabállyal $z = \lambda - \mu$ helyettesítéssel

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\cdot e^{-z\cdot x}}{1-e^{-z\cdot y}} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^{-z\cdot y}} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{y\cdot e^{-z\cdot y}} = \frac{1}{y} \qquad ,$$

vagyis egyenletes eloszlást kapunk.
Ha eleve a $\lambda = \mu$ feltételből indulunk, akkor

$$f_{\xi|\xi+\eta}(x|y) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(y-x)}}{\lambda(\lambda y)e^{-\lambda y}} = \frac{1}{y} \qquad ,$$

mivel $\xi + \eta$ $(2, \lambda)$ paraméterű Erlang-eloszlást követ.
■

26. Feladat. *Mi az (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlás szóródási együtthatója?*

Megoldás:

$$C_{\eta_n} = \frac{\mathbb{D}\eta_n}{\mathbb{E}\eta_n} = \frac{\mathbb{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{\mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = \frac{\sqrt{\mathbb{D}^2\xi_1 + \ldots + \mathbb{D}^2\xi_n}}{\mathbb{E}\xi_1 + \ldots + \mathbb{E}\xi_n} = \frac{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}{\frac{n}{\lambda}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

■

27. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a hiper-exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye valóban sűrűségfüggvény!*

Megoldás:
A nemnegativitás egyből látható, valamint

$$\int_0^\infty f_{\eta_n}(x)\, dx = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}\, dx = \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{\int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i x}\, dx}_{1} = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

■

28. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a hiper-exponenciális eloszlás szóródási együtthatója mindig legalább 1!*

Megoldás:
Ehhez azt kell belátnunk, hogy

$$C^2_{\eta_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \frac{2}{\lambda_i^2} - (\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{\lambda_i})^2}{(\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{\lambda_i})^2} \geq 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{\lambda_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2,$$

ami éppen a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz-egyenlőtlenség

$$y_i = \sqrt{p_i}\,, x_i = \frac{\sqrt{p_i}}{\lambda_i}$$

értékekkel.
■

29. Feladat. *Legyenek $\xi_i \in W(\lambda_i, \alpha)$, $i = 1, \ldots, n$, független valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy*

$$min(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in W\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \alpha\right)!$$

Megoldás:
Jól ismert, hogy

$$P\left(min(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P(\xi_i < x)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\lambda_i x^\alpha}\right)$$
$$= 1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x^\alpha},$$

amely az állításunkat igazolja.
Az $\alpha = 1$ speciális esetben az exponenciális eloszlásra kapott összefüggéseket kapjuk.
■

7.2. Megbízhatóság-elméleti alapok

30. Feladat. *Határozzuk meg a hiper-exponenciális eloszlás meghibásodási intenzitás-függvényét!*

Megoldás:

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda_i t}},$$

amely monoton csökkenő és értékkészlete a $\left[min(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i\right]$ intervallum.

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Megmutatjuk, hogy $h'(t) < 0$ a $[0, \infty)$ intervallumon így $h(t)$ monoton csökkenő lesz. Mivel $h'(t)$ előjelével foglalkozunk elegendő csak a számlálót vizsgálni, mivel a nevező a deriválási szabály miatt pozitív lesz.
A számláló értéke

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda_i t}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}\right)^2.$$

Alkalmazzuk a jól ismert

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

egyenlőtlenséget

$$a_i = \sqrt{p_i e^{-\lambda_i t}}, \quad b_i = \lambda_i \sqrt{p_i e^{-\lambda_i t}}$$

helyettesítéssel, melyből adódik, hogy $h'(t) < 0$. Látható, hogy $h(t)$ legnagyobb értékét a 0-nál veszi fel, így $h(0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i$. Azt is észrevehetjük, hogy $h(t) \geq min(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

■

31. Feladat. *Határozzuk meg a 2 fázisú hipo-exponenciális eloszlás meghibásodási intenzitásfüggvényét!*

Megoldás:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} \Big/ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\right) \\ &= \frac{\lambda_1\lambda_2\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)}{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}, \end{aligned}$$

amely monoton növekvő és értékkészlete a $[0, min(\lambda_1, \lambda_2)]$ intervallumon.

Az előző feladathoz hasonlóan $h'(t)$ előjelét

$$(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t})^2 + (\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t})(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$= (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t})^2 + \lambda_1\lambda_2(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})^2 > 0$$

határozza meg, így $h(t)$ monoton növekedő, $h(0) = 0$.

Ha $\lambda_1 < \lambda_2$, akkor $h(t) \leq \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2} = \lambda_1$. Hasonlóan ha $\lambda_2 < \lambda_1$, akkor $h(t) \leq \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda_2$.

■

32. Feladat. *Határozzuk meg az (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlás meghibásodási intenzitásfüggvényét!*

Megoldás:
Az előzőekhez hasonlóan elegendő csak a derivált számlálójával foglalkozni.
Vagyis $h'(t)$ számlálója

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda\lambda(\lambda x)^{n-2}(n-1)}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} - \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\lambda(\lambda x)^i}{i!} = \\ &= \lambda^2 \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\lambda x)^i}{i!} + \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\lambda x}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \right) \end{aligned}$$

Ennek előjele a második tényezőtől függ. Legyen ez

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\left(1-\frac{\lambda x}{n-1}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\\
S_2 &= 1-\frac{\lambda x}{1}+\lambda x = 1 > 0.
\end{aligned}
$$

Ha $n \geq 3$, akkor

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\left(1-\frac{\lambda x}{n-1}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!}\left(1-\frac{\lambda x}{n-1}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\left(1-\frac{\lambda x}{n-1}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!}.
\end{aligned}
$$

Egyszerű helyettesítéssel látható, hogy

$$
S_3 = 1-\frac{\lambda x}{2}+\lambda x = \frac{2+\lambda x}{2} \qquad > 0.
$$

Tegyük fel, hogy $S_n > 0$. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $S_{n+1} > 0$.

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!}\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&> \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\left(1-\frac{\lambda x}{n-1}\right)+\frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-2)!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
&= S_n+\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{(n-1)n} \qquad > 0,
\end{aligned}
$$

mivel az indukció szerint $S_n > 0$.

■

8. fejezet

Analitikus eszközök

8.1. Generátorfüggvény

33. Feladat. *Határozzuk meg a (n, p) paraméterű binomiális eloszlás generátorfüggvényét és ennek segítségével a várható értéket és szórást valamint magát az eloszlást!*

Megoldás:

$$G_\xi(s) = \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (sp)^k (1-p)^{n-k} = (sp+(1-p))^n = (1+p(s-1))^n.$$

$$\mathbb{E}\xi = G_\xi(1) = n(1+p(s-1))^{n-1}p\big|_{s=1} = np(1+p(s-1))^{n-1}\big|_{s=1} = np.$$

$$G''_\xi(1) = (np(1+p(s-1))^{n-1})'\big|_{s=1} = np(n-1)p(1+p(s-1))^{n-2}\big|_{s=1} = n(n-1)p^2.$$

$$\mathbb{D}^2\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

$$G_\xi^{(k)}(s) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)p^k(1+p(s-1))^{n-k}.$$

$$G_\xi^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)p^k(1-p))^{n-k}.$$

$$p_k = \frac{G_\xi^{(k)}(0)}{k!} = \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} p^k(1-p)^{n-k}.$$

■

34. Feladat. *Határozzuk meg a p paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvényét,valamint, hogy milyen s értékekre lesz konvergens a sor és ennek segítségével a várható értéket és szórást!*

Megoldás:

$$G_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k p(1-p)^{k-1} = sp\sum_{k=1}^{\infty}((1-p)s)^{k-1} = \frac{sp}{1-(1-p)s}, \text{ ha } |s| < \frac{1}{1-p}.$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{p(1-(1-p)s) - sp(-(1-p))}{(1-(1-p)s)^2}\Big|_{s=1} = \frac{p^2-p^2+p}{(1-1+p)^2} = \frac{1}{p}.$$

■

35. Feladat. *Határozzuk meg, hogy mely eloszlás generátorfüggvénye a*

$$G_\xi(s) = e^{-\lambda(1-s)} \quad !$$

Megoldás:

$$G_\xi^{(k)}(s) = \underbrace{\lambda \dots \lambda}_{k} e^{-\lambda(1-s)} = \lambda^k e^{-\lambda(1-s)}.$$

Így

$$p_k = \frac{G_\xi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

amiből következik, hogy $G_\xi(s)$ a λ paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye.

■

8.2. Laplace-transzformált

36. Feladat. *Határozzuk meg az (n, λ) paraméterű Erlang-eloszlás Laplace-transzformáltját, majd annak segítségével a várható értéket és a szórást!*

Megoldás:

$$L_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda+s} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda+s) x^{n-1} e^{-(\lambda+s)x}\, dx}_{\mathbb{E}\xi^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(\lambda+s)^{n-1}}}$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda+s} \frac{(n-1)!}{(\lambda+s)^{n-1}} = \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n.$$

$$\mathbb{E}\xi = (-1)((\frac{\lambda}{\lambda+s})^n)'\Big|_{s=0} = -\lambda^n((\lambda+s)^{-n})'\Big|_{s=0} = -\lambda^n(-n(\lambda+s)^{-n-1})\Big|_{s=0}$$

$$= -\lambda^n(-n)\lambda^{-n-1} = \frac{n}{\lambda}$$

$$L_\xi''(0) = (-\lambda^n((\lambda+s)^{-n})''\Big|_{s=0} = -\lambda^n(-n(\lambda+s)^{-n-1}))'\Big|_{s=0}$$

$$= \lambda^n(-n)(-n-1)(\lambda+s)^{-n-2}\Big|_{s=0} = \lambda^n(n^2+n)\lambda^{-n-2} = \frac{n^2+n}{\lambda^2}.$$

Ezért

$$\mathbb{D}^2\xi = \frac{n^2+n}{\lambda^2} - (\frac{n}{\lambda})^2 = \frac{n}{\lambda^2}.$$

■

37. Feladat. *Határozzuk meg a hiper-exponenciális eloszlás várható értékét a Laplace-transzformált segítségével!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= (-1)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}\right)'\Big|_{s=0} = (-1)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i(-1)(\lambda_i+s)^2\right)\Big|_{s=0}\\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i \frac{1}{(\lambda_i+s)^2}\Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\lambda_i}.\end{aligned}$$

■

38. Feladat. *Határozzuk meg a hipo-exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltját!*

Megoldás:
Felhasználva a Laplace-transzformáltnál tanult szabályokat kapjuk, hogy

$$L_{\eta_n}(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}\right)^n.$$

■

39. Feladat. *Határozzuk meg a* Γ *-eloszlás Laplace-transzformáltját!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}L_\xi(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{-st}\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}e^{-(\alpha+s)t}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha \int_0^\infty \frac{(\lambda+s)^\alpha t^{\alpha-1}e^{-(\alpha+s)t}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}t = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\cdot e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}z\\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha\cdot\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha,\end{aligned}$$

ahol $z = (\lambda+s)t$.

■

40. Feladat. *Mutassuk meg, hogyha* $\xi_i \in \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, \ldots, n$ *és függetlenek, akkor*

$$\eta = \sum_{i=1}^{n}\xi_i \in \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \lambda\right).$$

Megoldás:

$$L_\eta(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

ami éppen az állítást jelenti.

■

9. fejezet

Sztochasztikus rendszerek

9.1. Poisson-folyamat

41. Feladat. *Határozzuk meg a Poisson-folyamat korrelációs együtthatóját!*

Megoldás:

$$R(\nu(t),\nu(t+h)) = \frac{\mathbb{E}(\nu(t)\nu(t+h)) - \mathbb{E}\nu(t)\mathbb{E}\nu(t+h)}{\mathbb{D}\nu(t)\mathbb{D}\nu(t+h)}.$$

Ebből a képletből a $(\nu(t)\nu(t+h))$ értéket nem tudjuk egyből megmondani ezért annak meghatározáshoz a következő az eljárás

$$\mathbb{E}(\nu(t)(\underbrace{\nu(t+h)-\nu(t)}_{\nu(h)})) = \mathbb{E}(\nu(t)\nu(t+h)) - \mathbb{E}\nu^2(t)$$

$$\mathbb{E}(\nu(t)(\underbrace{\nu(t+h)-\nu(t)}_{\nu(h)})) = \mathbb{E}\nu(t)\mathbb{E}\nu(h) \text{ hiszen } \nu(t) \text{ és } \nu(t+h)-\nu(t) \text{ függetlenek.}$$

Így

$$\mathbb{E}\nu(t)\mathbb{E}\nu(h) + \mathbb{E}\nu^2(t) = \mathbb{E}(\nu(t)\nu(t+h)).$$

Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy a kérdéses érték

$$\frac{\mathbb{E}\nu(t)(\mathbb{E}\nu(h) - \mathbb{E}\nu(t+h)) + \mathbb{E}\nu^2(t)}{\mathbb{D}\nu(t)\mathbb{D}\nu(t+h)} = \frac{\lambda t(\lambda h - \lambda t - \lambda h) + \lambda t + (\lambda t)^2}{\sqrt{\lambda t}\sqrt{\lambda(t+h)}}$$
$$= \frac{-(\lambda t)^2 + \lambda t + (\lambda t)^2}{\sqrt{\lambda t}\sqrt{\lambda(t+h)}} = \frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda^2 t(t+h)}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+th}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{t}}}.$$

■

42. Feladat. *Tekintsünk egy rendszert λ paraméterű exponenciális eloszlású beérkezési időközökkel és μ paraméterű exponenciális eloszlású kiszolgálási idővel. Mi a valószínűsége, hogy egy kiszolgálás alatt k igény érkezik be?*

Megoldás: A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(N_a(S)=k)=\int_0^\infty P(N_a(S)=k|S=x)f_S(x)\,dx.$$

Ha $f_S(x)=\mu e^{-\mu x}$, akkor

$$P(N_a(S)=k)=\int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}+\mu e^{-\mu x}\,dx$$

$$=\frac{\lambda^k\mu}{k!}\frac{1}{\lambda+\mu}\underbrace{\int_0^\infty x^k(\lambda+\mu)e^{-(\lambda\mu)x}\,dx}_{\frac{k!}{(\lambda+\mu)^k}}=\frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)^{k+1}}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k,$$

ami $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ paraméterű módosított geometriai eloszlást jelent.
■

43. Feladat. *Határozzuk meg, hogy egy tetszőleges eloszlású kiszolgálási idő alatt várhatóan mennyi igény érkezik be a rendszerbe!*

Megoldás:
A megoldáshoz a generátorfüggvény és a Laplace-transzformált tulajdonságait kell felhasználnunk.

$$G_{N_a(S)}(z)=\sum_{k=0}^\infty z^k\int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}f_S(x)\,dx=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty z^k\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}f_S(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty \frac{(z\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}f_S(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty e^{z\lambda x}e^{-\lambda x}f_S(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-\lambda x(1-z)}f_S(x)\,dx=L_S(\lambda(1-z)),$$

azaz

$$G_{N_a(S)}(z)=L_S(\lambda(1-z)).$$

Így

$$\mathbb{E}(N_a(S))=G'_{N_a(S)}(1)=(L_S(\lambda(1-z)))'\big|_{s=1}=-\lambda L_S(0)=\lambda\mathbb{E}S.$$

■

44. Feladat. *Legyen most a kiszolgálási idő (r, μ) paraméterű Erlang, a beérkezési időközök pedig maradjanak λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg ebben az esetben is, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy kiszolgálás alatt k igény érkezik!*

Megoldás:

$$\int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{\lambda x} \frac{\mu(\mu x)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\mu x}\, dx = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^r}{(r-1)!} \int_0^\infty x^{k+r-1} e^{-(\lambda+\mu)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^r}{(r-1)!(\lambda+\mu)} \underbrace{\int_0^\infty x^{k+r-1}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)x}\, dx}_{\mathbb{E}(\xi^{k+r-1}) = \frac{(r+k-1)!}{(\lambda+\mu)^{r+k-1}}} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^r}{(r-1)!(\lambda+\mu)} \frac{(r+k-1)!}{(\lambda+\mu)^{r+k-1}}$$

$$= \frac{\lambda^k \mu^r}{(\lambda+\mu)^{r+k}} \binom{r+k-1}{r-1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^r \binom{r+k-1}{r-1}$$

$$= \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^k p^r, \text{ ahol } p = \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

vagyis r -ed rendű negatív binomiális (Pascal) eloszlást követ.

■

9.2. Esettanulmányok

45. Feladat. *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet*

$$P_0'(t) + (\lambda+\mu)P_0(t) = \mu\, , P_0(0) = 1$$

kezdeti feltétel mellett !

Megoldás: A homogén rész

$$\begin{aligned}
P_0'(t) + (\lambda+\mu)P_0(t) &= 0 \\
P_0'(t) &= -(\lambda+\mu)P_0(t) \\
\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} &= -(\lambda+\mu) \\
\int \frac{P_0'(t)}{P_0(t)}\, dt &= \int -(\lambda+\mu)\, dt \\
\ln P_0(t) &= -(\lambda+\mu)t + \ln C \\
P_0(t) &= Ce^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}$$

A konstans variálás módszerével nyerjük az inhomogén rész egy partikuláris megoldását, vagyis

$$P_0(t) = c(t)e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$c'(t)e^{-(\lambda+\mu)t} + c(t)(-(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}) + (\lambda+\mu)c(t)e^{-(\lambda+\mu)t} = \mu$$

$$c'(t)e^{-(\lambda+\mu)t} = \mu$$
$$c'(t) = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$
$$c(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t},$$

így a partikuláris megoldás

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t}e^{-(\lambda+\mu)t} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Ebből az általános megoldás

$$P_0(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

A $P_0(0) = 1$ feltételből következik, hogy $1 = C + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ így $C = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.
Ezért

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Ha a kezdeti feltételt $P_1(0) = 1$ akkor a megoldás a következő

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Ha $t \to \infty$

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}$$

$$P_1 = \lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}$$

■

46. Feladat. *Határozzuk meg, hogy mi annak a valószínűsége, hogy $n+m$ független gépből a t-edik pillanatban k darab működik, feltételezve, hogy kezdetben n darab gép működött és m darab gép volt hibás!*

Megoldás:

$$P_{0,k}(t) = \sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{l}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right)^{n-l}$$
$$\binom{m}{k-l}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right)^{k-l}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{m-(k-l)}.$$

Stacionárius esetben

$$\lim_{t\to\infty} P_{0,k}(t) = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{l} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-l} \binom{m}{k-l} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-l} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{m-(k-l)}$$

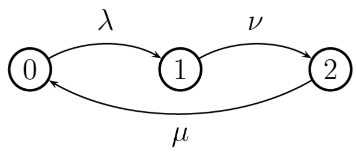
$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \binom{m}{k-l} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n+m-k} = \binom{n+m}{k} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n+m-k}.$$

■

Hideg tartalék

47. Feladat. *Legyen adott egy főgép amelynek működési ideje λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó és meghibásodás esetén egy tartalék kezd el működni, valamint két szerelő van. A javítási idő μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A meghibásodások és javítások függetlenek egymástól. Határozzuk meg a rendszer egyensúlyi jellemzőit!*

Megoldás:
A rendszer az egyes állapotokból a következő intenzitásokkal megy át A stacionárius



9.1. ábra. Hidegtartalék

esetet vizsgálva vezessük be a szokásos jelöléseket ! Jelentse P_i annak a valószínűségét, hogy i darab gép rossz.
Ekkor a jól ismert módon az alábbi egyensúlyi egyenletrendszert írhatjuk fel

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(\lambda+\mu)P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$$
$$2\mu P_2 = \lambda P_1$$

Innen

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0\,, P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0.$$

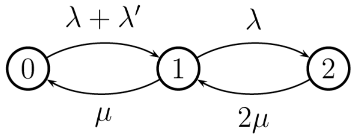
A normalizáló feltételt felhasználva kapjuk, hogy

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}} = \frac{2\mu^2}{2\mu^2+2\lambda\mu+\lambda^2} = \frac{1}{1+\varrho+\frac{\varrho^2}{2}}, \text{ ahol } \varrho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\mathbb{E}(O) = \frac{1-P_2}{P_2}\mathbb{E}(S) = \frac{1-P_2}{P_2}\frac{1}{2\mu}.$$

■

Meleg tartalék



9.2. ábra. Melegtartalék

Meleg tartalék esetén mindkét gép működik, viszont a második gép működési ideje λ' ($\lambda' < \lambda$) paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg most is az egyensúlyi rendszerjellemzőket!

$$\begin{aligned}(\lambda + \lambda')P_0 &= \mu P_1\\ (\lambda + \mu)P_1 &= (\lambda + \lambda')P_0 + 2\mu P_2\\ 2\mu P_2 &= \lambda P_1\end{aligned}$$

Ebből

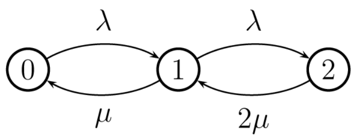
$$P_1 = \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} P_0, P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} \frac{\lambda}{2\mu} P_0$$

$$P_0^{-1} = 1 + \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} + \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} \frac{\lambda}{2\mu}.$$

Végül

$$\mathbb{E}(O) = \frac{1 - P_2}{P_2} \frac{1}{2\mu}.$$

48. Feladat. *Legyen adott egy olyan gép amelynél hiba esetén szükség van még egy detektálásra is mielőtt míg javításra kerülne. Legyen a detektálási idő ν paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó! Írjuk fel egyensúlyi helyzetben az állapotegyenletek, majd oldjuk meg őket!*



9.3. ábra. Az 48. feladat

Megoldás:

$$\begin{aligned}\lambda P_0 &= \mu P_2,\\ \nu P_1 &= \lambda P_0,\\ \mu P_2 &= \nu P_1.\end{aligned}$$

Innen

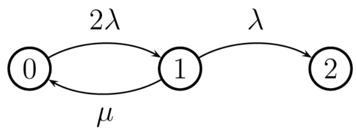
$$P_1 = \frac{\lambda}{\nu} P_0 \,, P_2 = \frac{\nu}{\mu} P_1 = \frac{\nu}{\mu} \frac{\lambda}{\nu} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

A $P_0 + P_1 + P_2 = 1$ normalizáló feltételt felhasználva kapjuk, hogy

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\nu\mu}{\nu\mu + \lambda(\mu + \nu)}.$$

■

49. Feladat. *Tegyük fel, hogy van egy két, λ paraméterű exponenciális működési időközökkel rendelkező gépből álló rendszerünk és egy μ paraméterű javítási idővel rendelkező szerelőnk. Tegyük fel még azt, hogy ha mindkét gép elromlik akkor a rendszer végérvényesen leáll és nincs több szerelés. Jelentse $0, 1, 2$, hogy hány gép rossz és a rendszer induljon a 0 állapotból. Határozzuk meg az első meghibásodásig eltelt átlagos időt feltételezve, hogy kezdetben mindkét gép működött!*



9.4. ábra. Az 49. feladat

Megoldás:
A stacionárius állapotegyenletek a következő módon származtatjuk

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) &= P_0(t)(1 - 2\lambda h + o(h)) + P_1(t)(\mu h + o(h)) + o(h) \\
P_1(t+h) &= P_1(t)(1 - (\lambda + \mu)h + o(h)) + P_0(t)(2\lambda h + o(h)) + o(h) \\
P_2(t+h) &= P_1(t)(\lambda h + o(h)) + o(h).
\end{aligned}$$

Így a szokásos eljárást követve

$$\begin{aligned}
P_0'(t) &= -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\
P_1'(t) &= -(\lambda + \mu) P_1(t) + 2\lambda P_0(t) \\
P_2'(t) &= \lambda P_1(t) \\
P_0(0) &= 1 \,, P_1(0) = 0 \,, P_2(0) = 0
\end{aligned}$$

kezdeti feltételek mellett. Laplace-transzformáltat alkalmazva és felhasználva az ott tanultakat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
sP_0^*(s) - 1 &= -2\lambda P_0^*(s) + \mu P_1^*(s) \\
sP_1^*(s) &= -(\lambda + \mu) P_1^*(s) + 2\lambda P_0^*(s) \\
sP_2^*(s) &= \lambda P_1^*(s).
\end{aligned}$$

Innen rövid számolással nyerjük, hogy

$$P_1^*(s) = \frac{s}{\lambda} P_2^*(s)\,,\, P_0^*(s) = \frac{1}{2\lambda} P_2^*(s)(\frac{s^2}{\lambda} + (\lambda + \mu)\frac{s}{\lambda}).$$

Felhasználva, hogy $P_0^*(s) + P_1^*(s) + P_2^*(s) = \frac{1}{s}$, melyet a $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1$ normalizáló feltétel ad kapjuk, hogy

$$P_2^*(s) = \frac{1}{s(1 + \frac{s}{\lambda} + \frac{s^2}{2\lambda^2} + \frac{(\lambda+\mu)s}{2\lambda^2})} = \frac{2\lambda^2}{s(s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2)}.$$

Innen az inverziós eljárással megkaphatjuk $P_2(t)$-t ami annak a valószínűsége, hogy egyetlen gép sem üzemel a t-edik időpillanatban.

Legyen Y a rendszer első elromlásának az ideje!

Ekkor $P_2(t)$ azt jelenti, hogy a rendszer t-edik időpillantban vagy előtte romlott el. A rendszer megbízhatósága ekkor

$$R(t) = 1 - P_2(t) \text{ , így } - R'(t) = P_2'(t)\,, P(Y < t) = P_2(t)\,, f_Y(t) = P_2'(t)$$

Ennek a Laplace-transzformáltja

$$(P_2')^*(s) = sP_2^*(s) - P_2(0) = \frac{2\lambda^2}{s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2}.$$

A nevezőt $(s + a_1)(s + a_2)$ alakra hozva, hogy később parciális törtekre bontást tudjunk alkalmazni kapjuk, hogy

$$\frac{2\lambda^2}{s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2} = 2\lambda^2\left(\frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)}\right) = 2\lambda^2\left(\frac{A}{s + a_1} + \frac{B}{s + a_2}\right)$$

$$\text{ahol } a_{1,2} = \frac{(3\lambda + \mu) \pm \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2} \text{ és } A = \frac{1}{a_2 - a_1}\,, B = \frac{1}{a_1 - a_2}.$$

Így

$$\frac{2\lambda^2}{s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2} = \frac{2\lambda^2}{a_1 - a_2}\left(\frac{1}{s + a_2} - \frac{1}{s + a_1}\right)$$

Innen

$$f_Y(t) = \frac{2\lambda^2}{a_1 - a_2}(e^{-a_2 t} - e^{-a_1 t}) \text{ mivel ha } f^*(s) = \frac{1}{s + a}, \text{ akkor } f(t) = e^{-at}.$$

Az első meghibásodásig eltelt idő átlagát az alábbi módon határozhatjuk meg

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^\infty y f_Y(y)\,dy = \frac{2\lambda^2}{a_1 - a_2}\left[\int_0^\infty ye^{-a_2 y}\,dy - \int_0^\infty ye^{-a_1 y}\,dy\right] \\
&= \frac{2\lambda^2}{a_1 - a_2}\left[\frac{1}{a_2}\int_0^\infty a_2 ye^{-a_2 y}\,dy - \frac{1}{a_1}\int_0^\infty ya_1 e^{-a_1 y}\,dy\right] = \frac{2\lambda^2}{a_1 - a_2}\left[\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}\right] \\
&= \frac{2\lambda^2(a_1 + a_2)}{(a_1 a_2)^2} = \frac{2\lambda^2(3\lambda + \mu)}{(2\lambda^2)^2} = \underbrace{\frac{3}{2\lambda}}_{\text{szerelő nélkül}} + \underbrace{\frac{\mu}{2\lambda^2}}_{\text{növekvés}}
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(Y)$ kiszámítását megtehetjük anélkül is, hogy meghatároznánk a sűrűségfüggvényt, hiszen ismerjük Y Laplace-transzformáltját. Azaz

$$\mathbb{E}(Y) = -L'_Y(0) = \left.\frac{-d(P'_2)^*(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\left(\frac{2\lambda^2}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2}\right)'\Bigg|_{s=0}$$
$$= \left.\frac{2\lambda^2(2s+3\lambda+\mu)}{(s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2)^2}\right|_{s=0} = \frac{2\lambda^2(3\lambda+\mu)}{4\lambda^4} = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2} = \frac{3}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}.$$

■

Abban az esetben, amikor a gépeket nem javítják, vagyis $\mu = 0$ a 2 elemből álló párhuzamosan kapcsolt rendszert kapjuk, amit már korábban is vizsgáltunk. Ekkor a behelyettesítés után

$$\alpha_1 = 2\lambda, \alpha_2 = \lambda$$

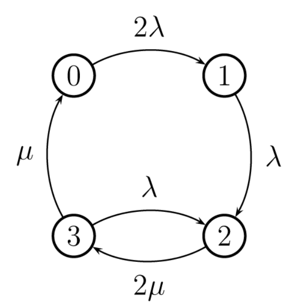
és így

$$f_Y^*(s) = \frac{2\lambda^2}{\lambda}\left(\frac{1}{s+\lambda} - \frac{1}{s+2\lambda}\right) = \frac{2\lambda^2}{(s+\lambda)(s+2\lambda)} = \frac{2\lambda}{s+2\lambda} \cdot \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

ami szintén azt bizonyítja, hogy először vesszük az első meghibásodás idejét, majd ehhez hozzáadjuk a megmaradt gép hátramaradt működési idejét. Az első 2λ paraméterű exponenciális, a második pedig λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Függetlenek egymástól, így összegük Laplace-transzformáltját kapjuk.

50. Feladat. *Tegyük fel, hogy van egy két, λ paraméterű exponenciális eloszlású működési időközökkel rendelkező gépből álló rendszerünk és két μ paraméterű exponenciális eloszlású javítási idővel rendelkező szerelőnk. Tegyük fel még azt, hogy a javítás csak akkor indul meg ha mindkét gép elromlik. Feltéve, hogy meghibásodások és javítások egymástól függetlenek, határozzuk meg a stacionáris eloszlást!*

Megoldás:



9.5. ábra. Az 50. feladat

Vezessük be az alaábbi jelöléseket.

- 0 - mindkét gép működik
- 1 - 1 gép nem működik, nincs javítás
- 2 - 2 gép nem működik
- 3 - 1 gép nem működik, van javítás (2 meghibásodás utáni javítás)

A jól ismert módon egyensúlyi állapotban az egyenletek a következők lesznek

$$\begin{aligned} 2\lambda P_0 &= \mu P_3 \\ \lambda P_1 &= 2\lambda P_0 \\ 2\mu P_2 &= \lambda P_1 + \lambda P_3 \\ (\lambda+\mu)P_3 &= 2\mu P_2 \end{aligned}$$

Innen egyszerűen kapjuk, hogy

$$P_3 = \frac{2\lambda}{\mu}P_0, \;\; P_1 = 2P_0, \;\; P_2 = \frac{\lambda+\mu}{2\mu}P_3 = \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\lambda}{\mu}P_0.$$

Felhasználva az előzőeket és a normalizáló feltételt nyerjük, hogy

$$P_0 = \frac{1}{3 + \frac{(\lambda+\mu)\lambda}{\mu^2} + \frac{2\lambda}{\mu}} = \frac{\mu^2}{3\mu^2 + \lambda^2 + 3\lambda\mu}.$$

A készenléti tényező

$$A = 1 - P_2 = \frac{3\mu^2 + 2\lambda\mu}{3\mu^2 + \lambda^2 + 3\lambda\mu}, \text{ mivel } P_2 = \frac{(\lambda+\mu)\lambda}{3\mu^2 + \lambda^2 + 3\lambda\mu}.$$

Ezek után

$$\mathbb{E}(O) = \frac{1-P_2}{P_2}\frac{1}{2\mu} = \frac{2\lambda + 3\mu}{2\lambda(\lambda+\mu)}.$$

■

Irodalomjegyzék

[1] Allen, A. O. *Probability, statistics, and queueing theory with computer science applications, 2nd ed.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[2] Gnyegyenko, B., and Beljajev, J.K.and Szolovjev, A. *A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.

[3] Haverkort, B. *Performance of computer communication systems: a model-based approach.* John Wiley and Sons, 1998.

[4] Jain, R. *The Art of Computer Systems Performance Analysis.* John Wiley and Sons, 1991.

[5] Jereb, L., and Telek, M. Sorbanállásos rendszerek. Oktatási segédlet, BME Híradástechnikai Tanszék.
`http://webspn.hit.bme.hu/~telek/notes/sokfelh.pdf`.

[6] Kleinrock, L. *Sorbanállás-kiszolgálás. Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe.* Műszaki Könyvkiadó, 1978.

[7] Kobayashi, H., and Mark, B. *System modeling and analysis: Foundations of system performance evaluation.* Pearson Education Inc., Upper Sadle River, 2008.

[8] Ovcharov, L., and Wentzel, E. *Applied Problems in Probability Theory.* Mir Publishers, Moscow, 1986.

[9] Prékopa, A. *Valószínűségelmélet.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.

[10] Ravichandran, N. *Stochastic Methods in Reliability Theory.* John Wiley and Sons, 1990.

[11] Rényi, A. *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[12] Ross, S. M. *Introduction to Probability Models.* Academic Press, Boston, 1989.

[13] Stewart, W. *Probability, Markov chains, queues, and simulation.* Princeton University Press, Princeton, 2009.

[14] Sztrik, J. *Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2000.
`http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/eNotes.htm`.

[15] SZTRIK, J. *Informatikai rendszerek modellezése, analízise.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2011.
http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/eNotes.htm.

[16] TIJMS, H. *A first course in stochastic models.* Wiley & Son, Chichester, 2003.

[17] TRIVEDI, K. *Probability and Statistics with Reliability, Queueing and Computer Science Applications.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.