A matematika alapvető fogalmai, szimbólumok, logikai műveletek

Szegő Dóra

Pécsi Tudományegyetem

Pécs, 2021

ISBN: 978-963-429-885-4

Készült az EFOP-3.4.3-16-2016-00005 támogatásával.

SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Bevezetés

A matematika alapvető fogalmai, szimbólumok, logikai műveletek

Alapvető fogalmak

A matematikában állításokat fogalmazunk meg és bizonyítunk. Az állításokhoz fogalmakat használunk. Ahhoz, hogy az állításunk egyértelmű legyen, szükséges, hogy a fogalmak mindenki számára egyértelműek legyenek, hiszen a mindennapi életben is számos olyan jelenség van, melyet más-más emberek különbözőképpen értelmeznek (például a 15 °C-os tavaszi nap egyeseknek kabátos, másoknak rövidnadrágos idő).

Alapvető fogalmak

A fogalmak lehetnek alapfogalmak vagy definiált fogalmak. A kettő között abban rejlik a különbség, hogy az alapfogalom önmagában értelmes, a definícióhoz viszont felhasználunk más, korábban már megismert fogalmakat. Alapfogalom például az egyenes, de definíció a négyzet. Gyakran előfordul, hogy egy fogalomhoz több definíciót is ismerünk.

Az állításaink hasonlóképpen lehetnek alapigazságok (axióma) vagy tételek. Az axiómák bizonyítás nélkül elfogadott igaz állítások. A tétel tartalmazza a tétel feltételeit, magát az állítást, valamint a bizonyítást.

definíció

Olyan fogalom, melynek értelmezéséhez felhasználunk más, korábban megismert fogalmakat. Például: a sorozat a természetes számok halmazán értelmezett függvény.

négyzet

Olyan téglalap, melynek minden oldala egyenlő.

axióma

Olyan állítás, ami alapigazság; bizonyítás nélkül elfogadjuk. Például: két pont meghatároz egy egyenest.

tétel

Olyan állítás, mely tartalmazza a tétel feltételeit, magát a tételt, valamint a tétel bizonyítását.

univerzális kvantor

Olyan logikai kifejezés, ami azt jelenti: minden. Például: minden természetes szám: $\forall k \in \mathbb{N}$.

egzisztenciális kvantor

Olyan logikai kifejezés, melynek jelentése: létezik. Például: van olyan szám, ami nagyobb nullánál: $\exists x > 0$.

Szimbólumok

Minden nyelvnek megvannak a maga sajátosságai. Ez épp úgy igaz a természetes nyelvekre, mint a programnyelvekre, és igen, a matematikára is. Természetesen saját igéi nincsenek a matematikának, de ettől még - kellő háttértudás nélkül - érezhetjük úgy magunkat egy matematikai szöveg feldolgozása közben, mintha izlandi vagy khmer nyelven írt avantgarde verset olvasgatnánk.

Segíti az értelmezést, ha megismerkedünk a matematika alapvető szimbólumaival. A matematika minden ágában használunk kvantorokat és logikai műveleteket ahhoz, hogy állításokat fogalmazzunk meg.

Szimbólumok

A kvantor egy logikai operátor, két típusát használjuk: az univerzális kvantort és az egzisztenciális kvantort.

Az univerzális kvantor jele egy fejtetőre állított A betű az angol all szóból: $\forall$, jelentése pedig: minden. Ez így még meglehetősen kusza lehet, lássunk egy példát!

Fejezzük ki kizárólag a matematika jeleit használva azt, hogy minden szám egyenlő saját magával! Az állításunk szerkezete nagyon hasonlít a mondat szerkezetéhez: **minden számról** állítom azt, hogy **egyenlő saját magával**. A szimbólumokat is ebben a sorrendben fogom használni, és a számokat - mondjuk - **x**-szel fogom jelölni.

Tehát „minden szám" = $\forall x$, ez tölti be most az alany szerepét. Jön az állítmány: „egyenlő saját magával" = $x = x$. Rakjuk össze!

$$\forall x \quad x = x$$

Megjegyzés: ízlés szerint kisebb jelölésbeli eltérések előfordulhatnak, például ugyanezt jelenti a $(\forall x)\,(x = x)$ vagy a $\forall x:\ x = x$ kifejezés is.

Szimbólumok

Az egzisztenciális kvantor jele egy fordított E betű az angol exists szóból: $\exists$, jelentése pedig: létezik, van olyan. Példát ide!

Írjuk le csak a matematika nyelvén azt, hogy léteznek páros számok. Kicsit „magyartalanítani" kell a mondatot ahhoz, hogy szépen működjön a példa: valójában azt akarjuk leírni, hogy **van olyan szám**, amire igaz, hogy **osztható kettővel**. (A jó hír az, hogy ha megvan az átfogalmazás, onnantól nyert ügyünk van!)

$$\exists x \quad 2|x$$

A zárójeles, illetve kettőspontos jelöléssel ugyanez: $(\exists x)\,(2|x)$, valamint $\exists x:\ 2|x$

Ha az egzisztenciális kvantor után egy felkiáltójelet teszünk, jelentése így módosul: pontosan egy olyan van. Például: pontosan egy olyan szám van, ami egyszerre nemnegatív és nempozitív. A matematika szimbólumaival kifejezve: $\exists! x \quad (x \geq 0) \wedge (x \leq 0)$

No de mit jelent az a háztető?

Logikai műveletek

A logikai műveleteket többnyire észrevétlenül tanuljuk meg a mindennapi életben, egyet-kettőt pedig matematikaórán. Mi öt műveletet fogunk használni: a negációt, a konjunkciót, a diszjunkciót, az implikációt és az ekvivalenciát. Az ezen szavak után is tovább olvasó három hallgatónak elárulom, hogy a magyar neveiket használva ki fog derülni, hogy ezekről már réges-rég megtanultunk mindent.

A negáció művelet magyar neve tagadás, és ez az egyetlen egyváltozós logikai művelet, amivel foglalkozunk. Angolul NOT műveletként ismerős lehet. Beszélő neve van, ugyanis tagadja az állítást, ami előtt áll: ha az állítás eddig igaz volt, a negáltja (tagadása) hamis lesz, ha pedig hamis volt, akkor negáltja igaz logikai értéket kap. Igazságtáblán összefoglalva:

A negáció (tagadás) művelet	
p	$\neg p$
igaz	hamis
hamis	igaz

Logikai műveletek

A konjunkciót magyarul „ÉS” műveletnek nevezzük, ez egy kétváltozós logikai művelet, angolul AND. Pontosan akkor ad igaz értéket, ha mindenkét állítás igaz, minden más esetben hamis eredményt kapunk. Igazságtáblán összefoglalva:

A konjunkció (és) művelet		
p	q	$p \wedge q$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis

Például legyen $p = \{3|x\}$ és $q = \{5|x\}$. Ekkor $p \wedge q$ azt jelenti, hogy x osztható hárommal és x osztható öttel is (azaz x osztható tizenöttel).

Logikai műveletek

A diszjunkció magyarul „VAGY” művelet, angolul OR. A magyar nyelvben ez a megengedő vagynak felel meg. A művelet pontosan akkor ad hamis értéket, ha mindenkét állítás hamis, minden más esetben igaz eredményt kapunk. Igazságtáblán összefoglalva:

A diszjunkció (vagy) művelet		
p	q	$p \vee q$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	igaz
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	hamis

Legyen most $p = \{\text{a négyszög téglalap}\}$ és $q = \{\text{a négyszög rombusz}\}$. Ekkor $p \vee q$ azt jelenti, hogy a négyszög téglalap, rombusz, vagy téglalap és rombusz egyszerre (azaz négyzet).

Logikai műveletek

Az implikációt magyarul következtetésként ismerjük. Ez a művelet nem kommutatív, az első állítás a premissza (előtag), a második a konklúzió (utótag). A művelet pontosan akkor ad hamis értéket, ha a premissza igaz, a konklúzi viszont hamis, minden más esetben igaz eredményt kapunk. (Gondoljunk csak bele: barátunknak azt ígérjük, hogy ha a matekgyakorlat időben véget ér, akkor időben ott leszünk a mozi előtt. Csak akkor nem mondtunk igazat, ha a gyakorlat időben ért véget, mégis elkéstünk a találkáról.) Igazságtáblán összefoglalva:

Az implikáció (következtetés) művelet		
p	q	$p \implies q$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz

Legyen $p = \{4|x\}$ és $q = \{8|x\}$. Ekkor $p \implies q$ azt jelenti, hogy abból, hogy egy szám osztható néggyel, következik, hogy osztható nyolccal is. Igaz ez az állítás?

Logikai műveletek

Az ekvivalencia magyarul azonosság. A művelet pontosan akkor ad igaz értéket, ha az állítások igazságértéke megegyezik, például: ha egy szám páros, akkor osztható kettővel. Igazságtáblán összefoglalva:

Az ekvivalencia (azonosság) művelet		
p	q	$p \iff q$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

Lássunk egy példát! Legyen $p = \{\text{eleget tanultam}\}$ és $q = \{\text{ötöst kapok}\}$. Ekkor $p \iff q$ azt jelentése az, hogy ha eleget tanultam, ötöst kapok, és ha ötöst kapok, akkor eleget tanultam. Megfogalmazhatjuk még az „akkor, és csak akkor" vagy a „pontosan akkor" kifejezéseket használva is.