

IRÁNYÍTÁSTECHNIKA II.



A projekt címe: „Egységesített Jármű- és mobilgépek képzés- és tananyagfejlesztés”

A megvalósítás érdekében létrehozott konzorcium résztvevői:



[KECSKEMÉTI FŐISKOLA](#)

[BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM](#)

[AIPA ALFÖLDI IPARFEJLESZTÉSI NONPROFIT KÖZHASZNÚ KFT.](#)

Fővállalkozó: [TELVICE KFT.](#)





Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Közlekedésmérnöki Kar

Írta:

**BOKOR JÓZSEF
GÁSPÁR PÉTER
SOUMELIDIS ALEXANDROS**

Lektorálta:

SZABÓ ZOLTÁN

IRÁNYÍTÁSTECHNIKA II.

Egyetemi tananyag



2011

COPYRIGHT: © 2011-2016, Dr. Bokor József, Dr. Gáspár Péter, Dr. Soumelidis Alexandros,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki Kar

LEKTORÁLTA: Dr. Szabó Zoltán

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon
másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978-963-279-603-1

KÉSZÜLT: a [Typotex Kiadó](#) gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa

TÁMOGATÁS:

Készült a TÁMOP-4.1.2/A/2-10/1-2010-0018 számú, „Egységesített Jármű- és mobilgépek képzés- és tananyagfejlesztés” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK:

Newton–Lagrange-modellezés; átviteli függvény; pólusok és zérusok; Laplace-transzformáció; jelkövető irányítás; zavarkompensáció; bizonytalanság modellezése; stabilitás; érzékenység függvény; P-K struktúra; M-Delta struktúra; frekvencia függvény; robusztus stabilitás; robusztusság; PID szabályozás; pólusallokáció; állapotér-elmélet; irányíthatóság; megfigyelhetőség; modellidentifikáció; LQ irányítás, állapot-visszacsatolás; megfigyelő tervezés.

ÖSSZEFOGLALÁS:

A jelen jegyzet a BME Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Karán oktatott Irányítástechnika II. c. tantárgyhoz készült. A jegyzet célja, hogy segítse a hallgatókat az előadási anyag elsajátításában és a gyakorlati feladatok megoldásában. A könyv szerkezeti felépítésében az egyetemi előadásokat és gyakorlatokat követi. A második fejezet részletesen bemutatja a lineáris időinvariáns (LTI)-rendszerek analízisét. A fejezet különféle modellezési elveket ismeret, így a fizikai elvek alapján történő modellezésen kívül bevezet a mért jeleken alapuló modellezésbe is. Tárgyalja az idő- és frekvenciatartománybeli rendszerleírásokat tipikus bemenőjelekre. Részletesen foglalkozik a dinamikus rendszerek különböző állapotér-reprezentációival, ezek kapcsolatával, valamint az irányíthatóság és megfigyelhetőség fogalmával. A harmadik fejezetben tárgyaljuk a rendszerstabilitási kritériumokat, a minőségi tulajdonságokat, valamint a bizonytalansági modellezési elveket. A negyedik fejezet az LTI-rendszerek szintézisével foglalkozik. A klasszikus soros kompenzátor tervezés elvein túlmenően részletesen ismerteti az állapot visszacsatolásra épülő tervezési módszereket, valamint részletesen kitér a megfigyelő tervezésre is. Az elméleti módszerekhez számos példa és gyakorlati tervezési feladat kapcsolódik, melyek segítik a hallgatókat az Irányítástechnika tárgykörébe tartozó mérnöki ismeretek megszerzésében.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	7
2. Mechatronikai rendszerek modellezése és elemzése	8
2.1. Alapfogalmak	8
2.2. Modellezés fizikai elvek alapján	11
2.2.1. Newton-Lagrange modellezés	11
2.2.2. Egy lineáris invariáns rendszer átviteli függvénye	12
2.2.3. Példák a modellezésre	15
2.3. Modellezés állapot térben	20
2.3.1. Bevezetés az állapot tér elméletbe	20
2.3.2. Állapot tér és átviteli függvény kapcsolata	25
2.3.3. Irányíthatósági és diagonális állapot tér reprezentációk	27
2.3.4. Állapot tér transzformációk	34
2.4. Modellezés mért jelek alapján: modell identifikáció alapjai	40
2.5. Rendszerdinamika elemzése időtartományban	45
2.5.1. Példák a rendszerdinamika időtartományi elemzésére	46
2.6. Rendszerdinamika elemzése frekvencia tartományban	51
2.6.1. Alaptagok frekvenciafüggvényei	53
2.7. Irányíthatóság és megfigyelhetőség	62
3. Stabilitás, minőségi tulajdonságok és bizonytalanságok	65
3.1. Stabilitásvizsgálat	65
3.1.1. Rendszer stabilitása	65
3.1.2. Zárt rendszer stabilitása	68
3.2. Rendszerek minőségi jellemzőinek vizsgálata	71
3.2.1. Érzékenységi függvény	72
3.2.2. Aszimptotikus jelkövetés	74
3.2.3. Zavarkompenzálás	76
3.3. Bizonytalanságok modellezése	77
3.3.1. P-K struktúra	77
3.3.2. Modell bizonytalanság vizsgálata	79

3.3.3.	Nem modellezett dinamika	81
3.3.4.	Parametrikus bizonytalanság	82
3.4.	M- Δ struktúra	85
4.	Irányítástervezés frekvencia tartományban és állapot térben	91
4.1.	Soros kompenzátor tervezése	91
4.1.1.	Soros kompenzátor tervezési elve	91
4.1.2.	Robusztusság ellenőrzése	96
4.2.	PID szabályozás tervezése	102
4.2.1.	Zajszűrés	106
4.2.2.	Referenciajel súlyozás	107
4.2.3.	Beavatkozó telítődése	108
4.2.4.	Tuningolás, hangolás	110
4.3.	Pólusallokációs módszer	111
4.3.1.	A módszer elve és algoritmus	111
4.3.2.	Példák a pólusallokációs módszerre	115
4.4.	Lineáris kvadratikus szabályozótervezés	121
4.4.1.	Az LQ módszer elve és algoritmus	121
4.4.2.	Példák az LQ módszerre	123
4.4.3.	Pólusok és zérusok	128
4.5.	Jelkövető irányítástervezés	131
4.5.1.	Állapot szeparálás módszere	131
4.5.2.	Struktúra módosítás módszere	133
4.5.3.	Példák a jelkövető irányításra	136
4.6.	Megfigyelőtervezés	139
4.6.1.	Tervezési feladat	139
4.6.2.	Állapotmegfigyelő tervezése	141
4.6.3.	Illusztrációs példák	142
4.7.	Dinamikus állapot visszacsatolás	148

1. fejezet

Bevezetés

A jelen jegyzet a BME Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Karán oktatott Irányítás-technika II. c. tantárgyhoz készült. A jegyzet célja, hogy segítse a hallgatókat az előadási anyag elsajátításában és a gyakorlati feladatok megoldásában.

A könyv szerkezeti felépítésében az egyetemi előadásokat és gyakorlatokat követi. A második fejezet részletesen bemutatja a lineáris időinvariáns (LTI) rendszerek analizését. A fejezet különféle modellezési elveket ismeret, így a fizikai elvek alapján történő modellezésen kívül bevezet a mért jeleken alapuló modellezésbe is. Tárgyalja az idő- és frekvenciatartománybeli rendszerleírásokat tipikus bemenőjelekre. Részletesen foglalkozik a dinamikus rendszerek különböző állapotér-reprezentációival, ezek kapcsolatával, valamint az irányíthatóság és megfigyelhetőség fogalmával. A harmadik fejezetben tárgyaljuk a rendszerstabilitási kritériumokat, a minőségi tulajdonságokat, valamint a bizonytalansági modellezési elveket. A negyedik fejezet az LTI rendszerek szintézisével foglalkozik. A klasszikus soros kompenzátor tervezés elvein túlmenően részletesen ismerteti az állapot-visszacsatolásra épülő tervezési módszereket, valamint részletesen kitér a megfigyelőtervezésre is.

Az elméleti módszerekhez számos példa és gyakorlati tervezési feladat kapcsolódik, melyek segítik a hallgatókat az Irányítás-technika tárgykörébe tartozó mérnöki ismeretek megszerzésében. Az érdeklődő hallgatóknak a következő könyvet ajánljuk még.

Irodalom

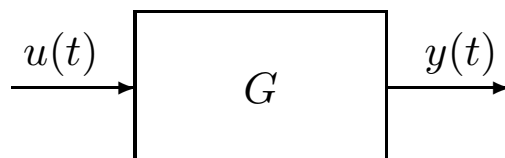
Bokor József és Gáspár Péter. *Irányítás-technika járműdinamikai alkalmazásokkal*. TypoTex Kiadó, 2008.

2. fejezet

Mechatronikai rendszerek modellezése és elemzése

2.1. Alapfogalmak

Az irányítástechnika célja, hogy egy rendszer tulajdonságait elemezze és a rendszer viselkedését megadott szempontok szerint módosítsa. Rendszereknek általánosan az olyan absztrakt objektumokat nevezhetjük, amelyek az őköt érő külső, környezetükből jövő hatásokra valamilyen válaszreakciót generálnak. Egy rendszer külső, ún. bemenő jelek, mint gerjesztések hatására válaszjeleket, ún. kimenő jeleket generál. A rendszert az 2.1 ábrán látható módon egy blokkal szemléltetjük, a bemenőjel u , a rendszer által generált válasz y .



2.1. ábra. Egy rendszer illusztrációja

A rendszerek modellezése során különféle információkból indulunk ki, melyek forrásai elméleti és gyakorlati ismeretek, valamint feltevések lehetnek. Az egyes jelenségekről alkotott elméletek által szolgáltatott leírások, általában közönséges differenciálegyenletekkel formalizált modellek. A rendszerről megfigyelések és mérések által gyűjtött adatok összessége, az elméleti modellekben szereplő paraméterek értékének meghatározását jelenti.

A modellezésnek különféle céljai lehetnek, melyeknek a modellezés megoldásával összhangban kell állnia:

- a rendszerek tulajdonságainak, viselkedésének megértése (analízis),
- a rendszerek jövőbeli állapotának megjóslása (predikció),
- rendszertervezési feladatok megoldása (szintézis),
- rendszerek minősítése.

Az elemzés célú modellezés során a fentiek szerint a rendszer viselkedésének minél pontosabb reprodukálása az irányadó. Ugyanakkor, ha a szintézis célú modellezést végzünk, akkor általában csak azok a rendszertulajdonságok érdekesek, amik az irányítási célt befolyásolják.

Az alábbiakban felsoroljuk azokat a rendszerrel kapcsolatos jellemzőket amelyek teljességét a továbbiakban feltételezzük:

1. Linearitás

Egy lineáris rendszer működésére érvényes a szuperpozíció elve. A rendszert lineárisnak nevezzük, ha a rendszerre

$$u = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \quad (2.1)$$

bemenőjelet adva a válaszfüggvény

$$y = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2. \quad (2.2)$$

A szuperpozíció elvéből következik, hogy lineáris matematikai modellek alakja csak a homogén, lineáris egyenlet, illetve egyenletrendszer lehet.

2. Időinvariancia

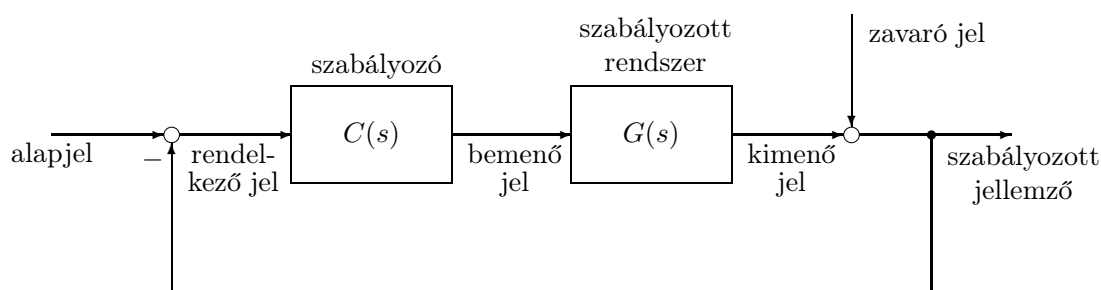
Az időinvariancia fogalma azt jelenti, hogy a bemenőjelre adott válasz nem függ a bemenőjel alkalmazásának az időpontjától. Ha a rendszer időinvariáns, akkor egy τ időponttal késleltetett impulzusra ugyanazt a választ függvényt adja τ időbeli eltolással.

3. Kauzalitás

A rendszer kauzalitása azt jelenti, hogy a generált kimenőjel egy adott időpontban nem függ a bemenőjel jövőjétől. Továbbá, ha a kimenőjel csak a bemenőjel múltjától függ, akkor a rendszert szigorúan kauzálisnak nevezzük.

Az irányítási, szabályozási feladat megfogalmazásához egy praktikus megközelítés a hatásvázlat elkészítése. Ez a következő lépésekre bontható. Az irányítási hatásvázlat általános felépítése az 2.2 ábrán látható.

- Megállapítjuk, hogy mi a szabályozni kívánt jellemző, továbbá mi a szabályozási cél.
- Megállapítjuk, hogy milyen jelet mérhetünk a visszacsatoláshoz, amely jelnek reprezentálnia kell a szabályozni kívánt jellemzőt.
- Beállítunk egy alapjelet, amellyel a visszacsatolt jelet összehasonlítjuk, majd különbséget képzünk. Ezt a jelet rendelkező jelnek nevezzük.
- A rendelkező jelet szükség szerint átalakítjuk, erősítjük, a rendszer bemenetére mint beavatkozó jelet visszük.



2.2. ábra. Egy rendszer illusztrációja

Az elemzés és tervezés során folytonos idejű modellekkel foglalkozunk, míg a realizációs részben eredményeinket kiterjesztjük diszkrét idejű modellekre. Egy folytonos idejű modell a rendszert vagy folyamatot leíró jellemzők, független és függő változók a vizsgált idő alatt bármelyik pillanatban vehetnek fel értéket: a bemeneti és kimeneti jelei egyaránt folytonos idejű jelek. A folytonos paraméterű modellekben a változók egy adott tartományon, értékhatáron belül bármilyen értéket felvehetnek. Egy diszkrét idejű modell a jellemzők csak adott, konkrét időpillanatokban vehetnek fel értékeket. Diszkrét paraméterű modellek esetén a változók csak meghatározott diszkrét értékeket vehetnek fel.

2.2. Modellezés fizikai elvek alapján

2.2.1. Newton-Lagrange modellezés

A Lagrange módszer a rendszer modelljét általánosított elmozdulás és sebesség komponensekkel fogalmazza meg:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = f, \quad (2.3)$$

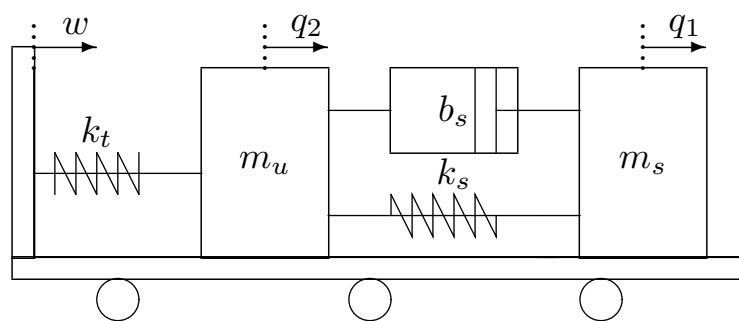
ahol $T(q, \dot{q})$ kinetikai (mozgási) energia, $U(q)$ potenciális (helyzeti) energia, $D(\dot{q})$ disszipációs (csillapítás által elnyelt) energia, f külső erő. A kinetikus energia a sebességvektoron kívül a helyzetvektortól is függhet, míg a potenciális energia egyedül a helyzetvektortól függ. A kinetikus energia és a potenciális energia különbsége az úgynevezett Lagrange állapotfüggvényt adja meg:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (2.4)$$

A Lagrange egyenlet felírható az egyes komponensekre bontott alakban is, azaz q_i komponensre felírva:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = f_i. \quad (2.5)$$

Példaként az 2.3 ábrán látható két tömegű lengőrendszer modelljét írjuk fel. A lengőrendszer komponensei: m_s és m_u tömegek, k_t és k_s rugók, valamint b_s csillapítás. A rendszert w elmozdulás gerjeszti, ennek hatására a két tömeg elmozdulása q_1 és q_2 .



2.3. ábra. Kéttömegű lengőrendszer

A megoldás első lépésében írjuk fel a Lagrange egyenlet komponenseit:

- Kinetikus energia egy tömegre: $T = \frac{1}{2} \cdot F \cdot q = \frac{1}{2} \cdot m\dot{q} \cdot q = \frac{1}{2} \cdot m\dot{q} \cdot \dot{q}t$ alapján ezért a rendszer két tömegére:

$$T = \frac{1}{2}m_s\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_u\dot{q}_2^2, \quad (2.6)$$

- Potenciális energia egy tömegre: $U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta = \frac{1}{2} \cdot k\Delta \cdot \Delta$, ezért a rendszerre:

$$U = k_s \frac{(q_1 - q_2)^2}{2} + k_t \frac{(q_2 - w)^2}{2}, \quad (2.7)$$

- Disszipációs energia a rendszerre:

$$D = b_s \frac{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2}. \quad (2.8)$$

A számítási műveletek az egyes komponensekre (q_1 és q_2) bontott alakban a következők:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_s \ddot{q}_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_u \ddot{q}_2, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = b_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2), \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = -b_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = k_s(q_1 - q_2), \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = -k_s(q_1 - q_2) + k_t(q_2 - w) \quad (2.12)$$

A két tömegű lengőrendszer modellje a Lagrange egyenlet alapján :

$$m_s \ddot{q}_1 = -b_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - k_s(q_1 - q_2), \quad (2.13)$$

$$m_u \ddot{q}_2 = -b_s(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - k_s(q_2 - q_1) - k_t(q_2 - w). \quad (2.14)$$

Megjegyezzük, hogy a Newtoni mechanikában a rendszer modelljét erő és nyomaték egyensúlyi egyenletekkel fogalmazzuk Newton törvényeinek felhasználásával.

2.2.2. Egy lineáris invariáns rendszer átviteli függvénye

Egy rendszer modelljének leírása lineáris állandó együtthatós közönséges differenciál egyenlettel történik:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m}, \quad (2.15)$$

ahol $a_i, i = 1, \dots, n$ és $b_j, j = 1, \dots, m$ együtthatók konstansok, nem függenek az időtől. Vegyük a differenciálegyenlet \mathcal{L} - transzformáltját zérus kezdeti feltételekkel. Ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + \dots b_1s + b_0)U(s), \quad (2.16)$$

ahol $m \leq n$. A $G(s)$ racionális törtfüggvényt a rendszer átviteli függvényének nevezük. Az átviteli függvény tehát a kimenőjel és a bemenőjel zérus kezdeti feltételekkel vett \mathcal{L} - transzformáltjainak hányadosa.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (2.17)$$

Az alábbiakban néhány alaptag átviteli függvényét írjuk fel.

- Arányos tagok: Az egyenletből hiányoznak a bemenőjel és kimenőjel differenciálhányadosai.

$$y = Au \quad \Rightarrow \quad Y = AU \quad \Rightarrow \quad G = A. \quad (2.18)$$

- Integráló tagok. Az egyenletben bemenőjel nulladik és a kimenőjel első differenciálhányadosa szerepel.

$$T \frac{dy}{dt} = u \quad \Rightarrow \quad TsY = U \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1}{Ts} \quad (2.19)$$

- Differenciáló tagok: Az egyenletben kimenőjel nulladik és a bemenőjel első differenciálhányadosa szerepel.

$$y = T \frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad Y = TsU \quad \Rightarrow \quad G = Ts \quad (2.20)$$

- Tárolós tagok: Az egyenletben a kimenőjelnek annyiad rendű differenciálhányadosa szerepel, ahány energiatárolót tartalmaz a tag. Ez a tag biztosítja a rendszerben lévő további dinamikák formalizálását.

Példák:

$$y + T_1 \frac{dy}{dt} + T_2 \frac{d^2y}{dt^2} = Au \quad \Rightarrow \quad G = \frac{A}{1 + T_1s + T_2s^2} \quad (2.21)$$

$$y + T_1 \frac{dy}{dt} = T_2 \frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{T_2s}{1 + T_1s} \quad (2.22)$$

- Holtidős tagok: Az egyenletben megjelenik egy tiszta T_H időkéslítés. Az ún. nullatárolós holtidős (OTH) tag egyenlete

$$y(t) = A_H u(t - T_H) \quad (2.23)$$

ahol T_H a holtidő. Az eltolási tétel alapján

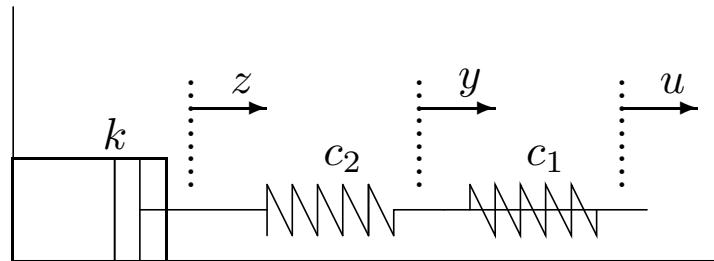
$$Y(s) = A_H U(s) e^{-st_H}, \quad (2.24)$$

azaz az átviteli függvény:

$$G = A_H e^{-st_H}. \quad (2.25)$$

2.2.3. Példák a modellezésre

2.1. Példa. Írjuk fel az 2.4 ábrán látható két rugóból és csillapítóból álló mechanikai rendszer modelljét. A fizikai jellemzők adatai a következők: $k = 10 \text{ N s/m}$, $c_1 = 3 \text{ N/m}$, $c_2 = 2 \text{ N/m}$.



2.4. ábra. Két rugóból és csillapítóból álló rendszer

Megoldás:

A c_2 rugó hatása miatt a rugó előtti z elmozdulás nem azonos a rugó mögötti y elmozdulással. Emiatt a mechanikai rendszer erőegyensúlyi egyenletének felírásához egy z elmozdulást leíró segédváltozót vezetünk be a következőképpen:

$$c_2(y - z) = k z \quad (2.26)$$

$$c_1(u - y) = c_2(y - z) \quad (2.27)$$

Alakítsuk át az egyenleteket Laplace transzformációval:

$$c_2(Y - Z) = k s Z \quad (2.28)$$

$$c_1(U - Y) = c_2(Y - Z) \quad (2.29)$$

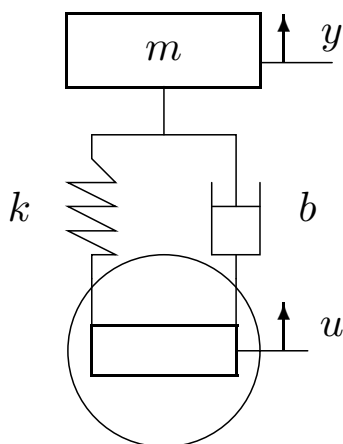
A kétismeretlenes egyenletrendszer mindegyikéből Z -t kifejezzük, majd felírjuk az U és Y közötti összefüggést:

$$[k s(c_1 + c_2) + c_1 c_2] Y = (k c_1 s + c_1 c_2) U \quad (2.30)$$

Az átviteli függvény:

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{k c_1 s + c_1 c_2}{k s(c_1 + c_2) + c_1 c_2} = \frac{30s + 6}{50s + 6} \quad (2.31)$$

2.2. Példa. Tekintsük a 2.5 ábrán látható egyszerűsített gépjármű felfüggesztési modellt, melynek adatai a következők: $m = 200\text{kg}$, $b = 100\text{N s/m}$, $k=9000\text{N/m}$.



2.5. ábra. Gépjármű felfüggesztés modellje

Megoldás:

A rendszer differenciálegyenlete:

$$m\ddot{y} = b(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) \quad (2.32)$$

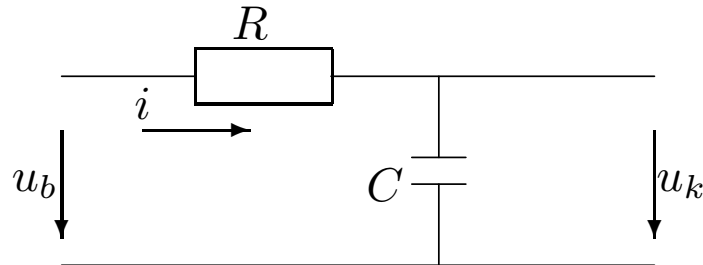
Alakítsuk át az egyenleteket Laplace transzformációval:

$$ms^2Y = bsU - bsY + kU - kY \quad (2.33)$$

Az átviteli függvény:

$$G = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} = \frac{0.5s + 45}{s^2 + 0.5s + 45} \quad (2.34)$$

2.3. Példa. Határozzuk meg az 2.6 ábrán látható áramkör u_b bemenő feszültsége és u_k kimenőfeszültsége közötti átviteli függvényt.



2.6. ábra. Egyszerű villamos áramkör

Megoldás:

Az RC kör differenciálegyenletei:

$$u_b = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt \quad (2.35)$$

$$u_k = \frac{1}{C} \int_0^t idt \quad (2.36)$$

Képezzük a differenciálegyenletek Laplace transzformáltjait:

$$U_b = \left(R + \frac{1}{sC} \right) I, \quad (2.37)$$

$$U_k = \frac{1}{sC} I. \quad (2.38)$$

Az átviteli függvény ($T = RC$ időállandó bevezetésével):

$$G = \frac{U_k}{U_b} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + sT} \quad (2.39)$$

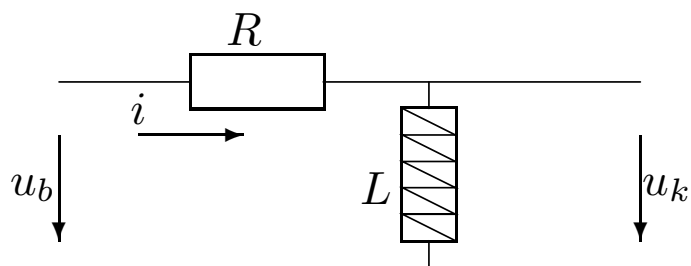
2.4. Példa. Határozzuk meg a 2.7 ábrán látható áramkör bemenő feszültsége és kimenőfeszültsége közötti átviteli függvényt.

Megoldás:

Határozzuk meg az áramkör átviteli függvényét. Az RL kör differenciálegyenletei:

$$u_b = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (2.40)$$

$$u_k = L \frac{di}{dt} \quad (2.41)$$



2.7. ábra. Egyszerű villamos áramkör

Képezzük a differenciálegyenletek Laplace transzformáltjait:

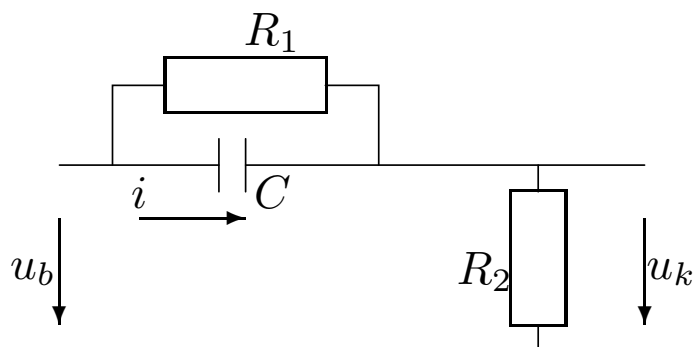
$$U_b = (R + Ls)I, \quad U_k = LsI. \quad (2.42)$$

Az átviteli függvény:

$$G = \frac{U_k}{U_b} = \frac{Ls}{R + Ls} = \frac{s\frac{L}{R}}{1 + s\frac{L}{R}} = \frac{sT}{1 + sT} \quad (2.43)$$

ahol $T = L/R$ az időállandó.

2.5. Példa. Határozzuk meg a 2.8 ábrán látható áramkör bemenő feszültsége és kimenőfeszültsége közötti átviteli függvényt.



2.8. ábra. Villamos áramkör

Megoldás:

Határozzuk meg az áramkör átviteli függvényét.

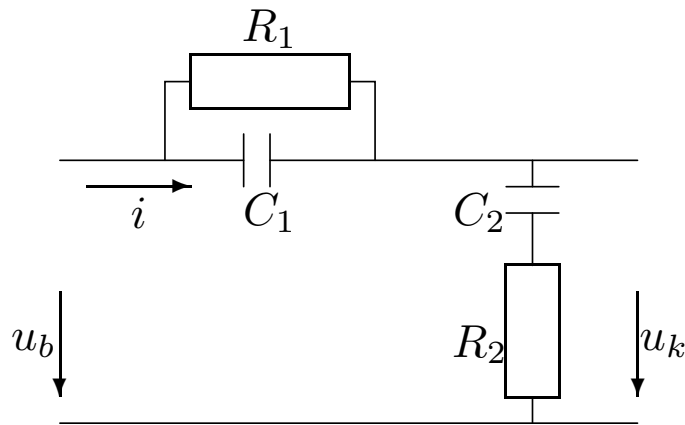
$$G = \frac{U_k}{U_b} = \frac{R_2}{R_2 + R_k} \quad (2.44)$$

ahol $R_k = R_1/(1 + sR_1C)$. Alakítsuk tovább az átviteli függvény képletét:

$$G = \frac{R_2}{R_2 + R_1/(1 + sR_1C)} = \frac{R_2 + sR_1R_2C}{R_1 + R_2 + sR_1R_2C} = A \frac{1 + sT_1}{1 + sT_2} \quad (2.45)$$

ahol $A = R_2/(R_1 + R_2)$, $T_1 = R_1C$, $T_2 = R_1R_2C/(R_1 + R_2)$.

2.6. Példa. Határozzuk meg az 2.9 ábrán látható áramkör átviteli függvényét.



2.9. ábra. Villamos áramkör

Megoldás:

$$G = \frac{U_k}{U_b} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2} + R_k} \quad (2.46)$$

ahol $R_k = R_1/(1 + sR_1C_1)$. Alakítsuk tovább az átviteli függvény képletét:

$$G = \frac{R_2 + 1/(sC_2)}{R_2 + 1/(sC_2) + R_1/(1 + sR_1C_1)} = \frac{1 + s(T_1 + T_2) + s^2T_1T_2}{1 + s(T_1 + T_2 + T_{12}) + s^2T_1T_2} \quad (2.47)$$

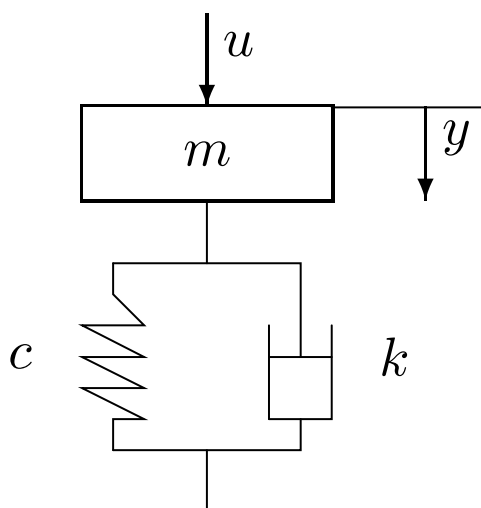
ahol $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_2C_2$, $T_{12} = R_1C_2$

2.3. Modellezés állapot térben

2.3.1. Bevezetés az állapot tér elméletbe

A rendszer állapota egy t_0 időpontbeli információ (olyan jelek ismerete), amelyből az $u(t)$, $t \geq t_0$ bemenőjel ismeretében a rendszer válasza minden $t \geq t_0$ időpontra meghatározható. A rendszer válasza a jövőbeli, $t \geq t_0$ időpontra vonatkozó *állapotokat* és a *kimenőjeleket* jelenti. A rendszer állapotait leíró jeleket, illetve ezek függvényeit, a rendszer állapotváltozóinak nevezzük. A rendszer- és irányításelméletbe a magyar származású híres tudós, Rudolf E. Kalman vezette be az általa kidolgozott *LQR* optimális irányítások elméletének kidolgozása kapcsán, ld. még [13, 12].

2.7. Példa. Tekintsük az alábbi felfüggesztési rendszert. u erő hatására az m tömeg függőleges irányban (y) elmozdul. Írjuk fel az erő és az elmozdulás közötti kapcsolatot. Adatok: $m = 1\text{kg}$, $k = 4\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, $c = 3\frac{\text{N}}{\text{m}}$.



2.10. ábra. Lengőrendszer modellje

Megoldás:

A rendszer differenciálegyenlete:

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} - cy + u, \quad (2.48)$$

$$\ddot{y} = -4\dot{y} - 3y + u. \quad (2.49)$$

Állapotváltozók megválasztásának egy természetes módja a következő: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$.
Állapotegyenletek:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad (2.50)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -4\dot{y} - 3y + u = -4x_2 - 3x_1 + u \quad (2.51)$$

$$y = x_1 \quad (2.52)$$

Állapottér reprezentáció:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.53)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Természetesen egy másik állapottér megválasztás is lehetséges. $x_1 = 3y$, $x_2 = 4\dot{y}$.
Állapotegyenletek:

$$\dot{x}_1 = 3\dot{y} = \frac{3}{4}x_2 \quad (2.55)$$

$$\dot{x}_2 = 4\ddot{y} = -16\dot{y} - 12y + 4u = -4x_2 - 4x_1 + 4u \quad (2.56)$$

$$y = \frac{1}{3}x_1 \quad (2.57)$$

Állapottér reprezentáció:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u \quad (2.58)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Fentiek alapján a bemenőjelek és kimenőjel közötti kapcsolat állapottér reprezentációja többféle alakban felírható és az állapottér alakja nem egyértelmű.

Az állapotegyenlet, mint egy elsőrendű differenciálegyenlet megoldása két lépésben történik. Előbb megoldjuk a homogén egyenletet, majd megkeressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. A homogén egyenlet alakja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (2.60)$$

az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltétellel és megoldása:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0, \quad (2.61)$$

ahol az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix-exponenciális függvényt a következőképpen értelmezzük: $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots$. Például diagonál reprezentációknál $e^{\mathbf{A}_d t}$ ($\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$)

alakja: $e^{\mathbf{A}_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$.

Az inhomogén egyenlet alakja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (2.62)$$

ahol $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ egyenlet megoldása a következő:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau. \quad (2.63)$$

A fentiek alapján az elsőrendű differenciálegyenlettel leírt állapotegyenlet megoldása:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^\infty e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \quad (2.64)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t). \quad (2.65)$$

2.8. Példa. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.66)$$

rendszer válaszát egységugrás bemenet esetén.

Megoldás:

1. lépés A homogén rész megoldása:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.67)$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \quad (2.68)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \quad (2.69)$$

A példában:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ \frac{-2}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

A homogén rész megoldása a mátrix tagjainak inverz Laplace transzformációjával történik:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

2. lépés Az inhomogén rész megoldása zérus kezdeti érték feltételezésével:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.72)$$

$$sX(s) = AX(s) + bU(s) \quad (2.73)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}bU(s) \quad (2.74)$$

A példában:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1}bU(s) &= \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} b \frac{1}{s} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3+3s^2+2s} \\ \frac{s}{s^3+3s^2+2s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Az inhomogén rész megoldása a mátrix tagjainak inverz Laplace transzformációjával történik:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

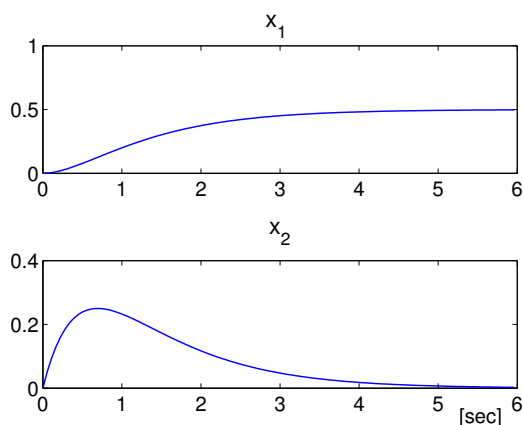
A teljes megoldás:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Ha a kezdeti értékek zérusok, azaz $x_1(0) = 0$ és $x_2(0) = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Egy szimulációs vizsgálati eredményt mutat a 2.11 ábra.

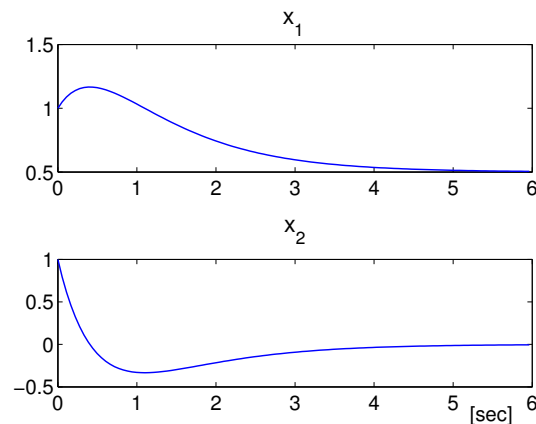


2.11. ábra. Átmeneti függvények zérus kezdeti értékekkel

Ha a kezdeti értékek egységnyiek, azaz $x_1(0) = 1$ és $x_2(0) = 1$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 - 1.5e^{-2t} + 2e^{-t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Egy szimulációs vizsgálati eredményt mutat a 2.12 ábra.



2.12. ábra. Átmeneti függvények nem zérus kezdeti értékek esetén

2.3.2. Állapottér és átviteli függvény kapcsolata

Általánosan egy lineáris dinamikus rendszer állapotter reprezentációját a következő alakban írhatjuk:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (2.80)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2.81)$$

Az állapotter reprezentáció alapján a rendszer átviteli függvényét a Laplace transzformáció alkalmazásával kapjuk meg:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s), \quad (2.82)$$

ebből

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}U(s) + \mathbf{x}(0).$$

Az állapot Laplace transzformáltja:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0), \quad (2.83)$$

ahol $\mathbf{x}(0)$ a kezdő állapot $t = 0$ időpontban. Az $\mathbf{x}(0) = 0$ feltétel mellett

$$Y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U(s). \quad (2.84)$$

A $G(s)$ átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.85)$$

Az átviteli függvény pólusai tehát az

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (2.86)$$

egyenlet gyökei.

2.9. Példa. Határozzuk meg az alábbi állapotér reprezentáció átviteli függvényét:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.87)$$

$$y = [0 \ 2] x \quad (2.88)$$

Megoldás:

$$G = [0 \ 2] \begin{bmatrix} s+2 & 4 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{s^2 + 2s + 4} \quad (2.89)$$

2.10. Példa. Határozzuk meg az alábbi állapotér reprezentáció átviteli függvényét:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.90)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] x \quad (2.91)$$

Megoldás:

$$G = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4} \quad (2.92)$$

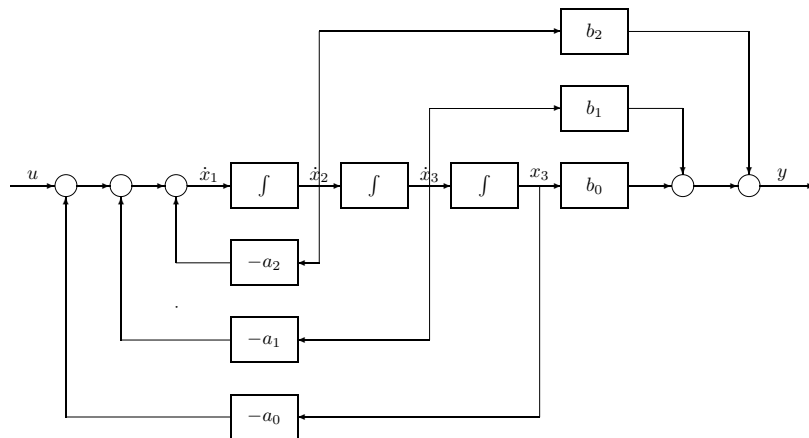
2.3.3. Irányíthatósági és diagonális állapotter reprezentációk

Irányíthatósági alak

Az irányíthatósági alakú állapotter reprezentáció a 2.13 ábrával illusztrálható és az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.93)$$

$$y = [b_2 \quad b_1 \quad b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$



2.13. ábra. Az irányíthatósági alak illusztrációja

Induljunk ki egy általános rendszerből, melynek átviteli függvényét az alábbi alakban fogalmaztuk meg:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s), \quad (2.95)$$

ahol $a(s)$ és $b(s)$ polinomiális függvények, például $b(s) = b_1s + b_0$ és $a(s) = s^2 + a_1s + a_0$. A bemenőjel Laplace transzformáltja $U(s)$ és a kimenőjel Laplace transzformáltja $Y(s)$ közötti kapcsolatot ekkor a következőképp írhatjuk:

$$Y(s) = b(s)a^{-1}(s)U(s). \quad (2.96)$$

Vezessük be a $\xi(s)$ változót az alábbi módon:

$$\xi(s) = a^{-1}U(s). \quad (2.97)$$

Ekkor a bemenőjel és a kimenőjel Laplace transzformáltja:

$$Y(s) = b(s)\xi(s) = [b_1s + b_0] \xi(s) \quad \text{és} \quad (2.98)$$

$$U(s) = a(s)\xi(s) = [s^2 + a_1s + a_0] \xi(s). \quad (2.99)$$

Inverz Laplace transzformációval a differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned} y &= b_1\dot{\xi} + b_0\xi \\ u &= \ddot{\xi} + a_1\dot{\xi} + a_0\xi \end{aligned} \quad (2.100)$$

Vezessük be a következő új változókat, amelyeket állapotváltozóknak nevezünk:

$$x_1 = \dot{\xi}, \quad x_2 = \xi. \quad (2.101)$$

Figyelembe véve, hogy $\dot{x}_1 = \ddot{\xi}$ és $\dot{x}_2 = \dot{\xi} = x_1$, az alábbi elsőrendű differenciálegyenletekhez jutunk, melyek az állapotdinamika egyenletrendszerét alkotják:

$$\dot{x}_1 = -a_1x_1 - a_0x_2 + u \quad (2.102)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (2.103)$$

Az állapotváltozókból a rendszer kimenőjele a következőképp kapható meg. Ez az úgynevezett megfigyelési egyenlet.

$$y = b_1x_1 + b_0x_2 \quad (2.104)$$

Az állapotegyenletek mátrixos alakban felírva:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c u \quad (2.105)$$

$$y = \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}_c \quad (2.106)$$

ahol

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_c^T = [b_1 \quad b_0].$$

Vizsgáljuk meg egy két állapotú rendszerben, hogy az irányíthatósági alak egyértelműségét. Induljunk ki az (2.105)-(2.106) kétállapotú általános leírásból. Az átviteli

függvény és az állapotter reprezentáció közötti összefüggés alapján írjuk fel az átviteli függvényt:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \\
 &= [b_1 \quad b_0] \begin{bmatrix} s + a_1 & a_0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{[b_1 \quad b_0] \operatorname{adj} \begin{bmatrix} s + a_1 & a_0 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s + a_1 & a_0 \\ -1 & s \end{bmatrix}} \\
 &= \frac{[b_1 \quad b_0] \begin{bmatrix} s & -a_0 \\ 1 & s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1 s + a_0} \\
 &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{2.107}
 \end{aligned}$$

Az átviteli függvény alapján jól látható, hogy az irányíthatósági alak egyértelműen felírható. Az \mathbf{A}_c mátrix első sorának elemei az átviteli függvény nevezőjének együtthatóiként, míg a \mathbf{c}_c^T vektor elemei az átviteli függvény számlálójának együtthatóiként jelennek meg.

Diagonális alak

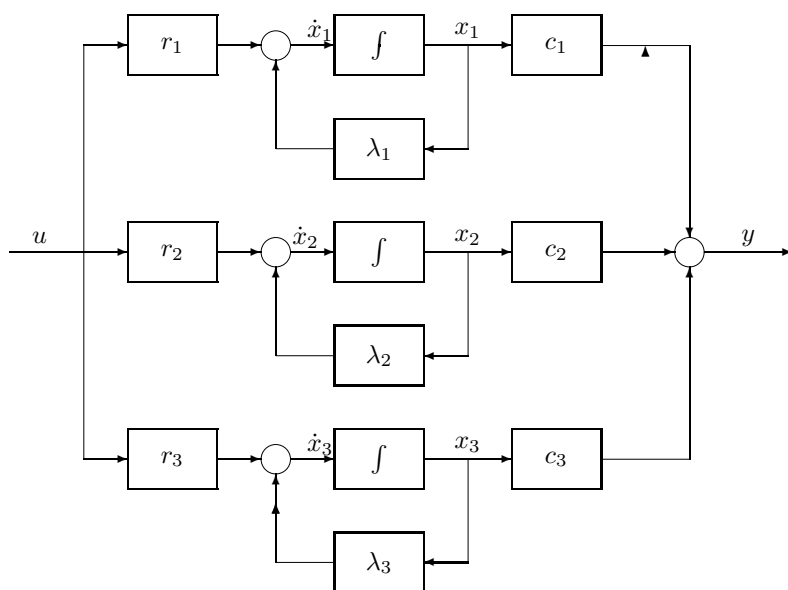
Az diagonális alakú állapotter reprezentáció a 2.14 ábrával illusztrálható és az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} u \tag{2.108}$$

$$y = [c_2 \quad c_1 \quad c_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

Tegyük fel, hogy adott egy rendszer kimenete átviteli függvényének parciális tört alakú felbontásával:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s) = \left[\frac{r_1}{s - \lambda_1} + \frac{r_2}{s - \lambda_2} \right] U(s), \tag{2.110}$$



2.14. ábra. A diagonális alak illusztrációja

ahol λ_1, λ_2 az $s^2 + a_1s + a_0 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei, r_1, r_2 pedig a λ_1, λ_2 gyökökhöz (a $b(s)/a(s)$ átviteli függvény pólusaihoz) tartozó rezidumok:

$$r_1 = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} (s - \lambda_1) \frac{b_1s + b_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{b_1\lambda_1 + b_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (2.111)$$

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow \lambda_2} (s - \lambda_2) \frac{b_1s + b_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{b_1\lambda_2 + b_0}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.112)$$

Megjegyezzük, hogy ennél a felírásnál λ_1 és λ_2 konvex pólusok is lehetnek. Vezessük be új változóként az $X_1(s), X_2(s)$ változókat, melyekre

$$X_1(s) = \frac{r_1}{s - \lambda_1} U(s) \quad (2.113)$$

$$X_2(s) = \frac{r_2}{s - \lambda_2} U(s) \quad (2.114)$$

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \quad (2.115)$$

amiből az alábbi egyenletek írhatók fel:

$$(s - \lambda_i)X_i(s) = r_i U(s) \quad (2.116)$$

$$sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + r_i U(s), \quad i = 1, 2. \quad (2.117)$$

Az állapotegyenletek mátrixos alakban felírva:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{b}_d u \quad (2.118)$$

$$y = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d, \quad (2.119)$$

ahol az $(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d, \mathbf{c}_d^T)$ jelölésben a d index az \mathbf{A}_d mátrix diagonális alakjára utal,

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^T = [1 \quad 1].$$

Vizsgáljuk meg egy két állapotú rendszerben a diagonális alak egyértelműségét. Induljunk ki az (2.118)-(2.119) kétállapotú általános leírásból. Mivel sem \mathbf{b}_d sem \mathbf{c}_d alakjára nézve nincs megkötés, ezért ezeket válasszuk meg a következőképpen:

$$\mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^T = [m_1 \quad m_2].$$

Az átviteli függvény és az állapottér reprezentáció közötti összefüggés alapján írjuk fel az átviteli függvényt:

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{c}_d^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d \\ &= [m_1 \quad m_2] \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{[m_1 \quad m_2] \operatorname{adj} \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 \end{bmatrix}} \\ &= \frac{[m_1 \quad m_2] \begin{bmatrix} s - \lambda_2 & 0 \\ 0 & s - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2} \\ &= \frac{[m_1 \quad m_2] \begin{bmatrix} r_1(s - \lambda_2) \\ r_2(s - \lambda_1) \end{bmatrix}}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2} \\ &= \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)s - (m_1 r_1 \lambda_1 - m_2 r_2 \lambda_1)}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Az átviteli függvény alapján látható, hogy a diagonális alak felírása nem egyértelmű. Habár az átviteli függvény nevezője alapján \mathbf{A}_d egyértelműen felírható (a pólusok sorrendjének megválasztásától eltekintve), \mathbf{b}_d és \mathbf{c}_d^T elemeinek megválasztása nem egyértelmű.

2.11. Példa. Írjuk fel az alábbi, átviteli függvényével adott rendszer állapotter reprezentációját irányíthatósági alakban:

$$G = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 45} \quad (2.121)$$

Megoldás:

Ha az átviteli függvény számlálója 1, akkor az irányíthatósági állapotter reprezentációhoz az állapotváltozókat y deriváltjai csökkenő rendje szerint kell megválasztani. Válasszuk meg a két állapotot a következőképpen:

$$x_1 = \dot{y} \quad (2.122)$$

$$x_2 = y \quad (2.123)$$

Az állapotok deriváltjai:

$$\dot{x}_1 = -0.5x_1 - 45x_2 + u \quad (2.124)$$

$$\dot{x}_2 = x_1. \quad (2.125)$$

A kimenőjel:

$$y = x_2. \quad (2.126)$$

Az állapotter reprezentáció irányíthatósági alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -45 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.127)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

2.12. Példa. Írjuk fel az alábbi, átviteli függvényével adott rendszer állapotter reprezentációját irányíthatósági alakban.

$$G = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 3} \quad (2.129)$$

Megoldás:

A bemenőjel deriváltjának megjelenése miatt az előző gondolatmenet nem alkalmazható közvetlenül. Vezessünk be egy új változót:

$$Z = \frac{1}{s^2 + 2s + 3} U \quad (2.130)$$

Inverz Laplace transzformációval:

$$\ddot{z} = -2\dot{z} - 3z + u \quad (2.131)$$

Az állapotváltozókat a z deriváltjai csökkenő rendje szerint választjuk: $x_1 = \dot{z}$ és $x_2 = z$. Az állapotok deriváltjai: $\dot{x}_1 = \ddot{z} = -2x_1 - 3x_2 + u$ és $\dot{x}_2 = \dot{z} = x_1$. A kimeneti jel: $y = 2\dot{z} + z = 2x_1 + x_2$. Az állapottér reprezentáció irányíthatósági alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.132)$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

2.13. Példa. Határozzuk meg a 2.5 ábrán látható egyszerűsített gépjármű felfüggesztési modelljét irányíthatósági alakban. Adatok: $m = 200\text{kg}$, $b = 100\text{Ns/m}$, $k=9000\text{N/m}$.

Megoldás:

A 2.2 példa megoldása alapján indulunk az átviteli függvény alakból:

$$G = \frac{0.5s + 45}{s^2 + 0.5s + 45} \quad (2.134)$$

Vezessünk be egy új változót:

$$Z = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 45} U \quad (2.135)$$

Inverz Laplace transzformációval:

$$\ddot{z} = -0.5\dot{z} - 45z + u \quad (2.136)$$

Az állapotváltozókat a z deriváltjai csökkenő rendje szerint választjuk: $x_1 = \dot{z}$ és $x_2 = z$. Az állapotok deriváltjai: $\dot{x}_1 = \ddot{z} = -0.5x_1 - 45x_2 + u$ és $\dot{x}_2 = \dot{z} = x_1$. A kimeneti jel: $y = 0.5\dot{z} + 45z = 0.5x_1 + 45x_2$. Az állapottér reprezentáció irányíthatósági alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -45 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.137)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.5 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Megjegyezzük, hogy a témával kapcsolatban további példákat találni az irodalomban [11, 16].

2.3.4. Állapottér transzformációk

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy adott \mathbf{x} állapotvektorból egy új $\bar{\mathbf{x}}$ állapotvektort képezünk az alábbi módon:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (2.139)$$

ahol $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy $n \times n$ méretű nonszinguláris transzformációs mátrix, és $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ha az \mathbf{x} állapotvektor az $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ állapottér reprezentációhoz tartozik, azaz

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (2.140)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2.141)$$

Határozzuk meg az $\bar{\mathbf{x}}$ állapotvektor

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u \quad (2.142)$$

$$y = \bar{\mathbf{c}}^T \bar{\mathbf{x}} \quad (2.143)$$

egyenletekben szereplő $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}^T)$ mátrixokat. Mivel $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}$, ezt behelyettesítve az állapotegyenletbe kapjuk, hogy

$$\mathbf{T}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u \quad (2.144)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}, \quad (2.145)$$

azaz

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}\mathbf{b}u \quad (2.146)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}, \quad (2.147)$$

Állapottér reprezentációk közötti kapcsolat

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \quad (2.148)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{b}, \quad (2.149)$$

$$\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.150)$$

Az \mathbf{A} és $\bar{\mathbf{A}}$ mátrixok közötti fenti kapcsolatot hasonlósági transzformációnak nevezzük. Egy rendszer adott dimenziós állapottér reprezentációi egymásból hasonlósági transzformációval kaphatók.

Az alábbiakban három speciális állapottér reprezentációt írunk fel.

Írányíthatósági alak előállítása

Az irányíthatósági alakú állapotér reprezentációt előállító transzformációs mátrix alakja:

$$T_c = (\mathbf{C}_n(A, b)\tau(a))^{-1}, \quad (2.151)$$

ahol n dimenziós állapotér esetén $\mathbf{C}_n(A, b)$ az irányíthatósági mátrix:

$$\mathbf{C}_n(A, b) = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots]$$

és $\tau(a)$ egy $n \times n$ dimenziós Toeplitz-mátrix:

$$\tau(a) = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & a_2 \\ & \dots & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

amelynek elemei a karakterisztikus egyenlet együtthatói:

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0.$$

Ekkor az irányíthatósági állapotéralak

$$\bar{A}_c = T_c A T_c^{-1}, \quad \bar{b}_c = T_c b, \quad \bar{c}_c^T = c^T T_c^{-1}.$$

Diagonális alak előállítása

A transzformációs mátrix alakja:

$$T_d = (\mathbf{C}_n(A, b)\tau(a)\mathcal{P}_n)^{-1},$$

ahol \mathcal{P}_n egy $n \times n$ dimenziós Vandermonde-mátrix:

$$\mathcal{P}_n = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \\ & \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \\ & \lambda_1^{n-3} & \dots & \lambda_n^{n-3} \\ & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A diagonális állapotér alak:

$$\bar{A}_d = T_d A T_d^{-1}, \quad \bar{b}_d = T_d b, \quad \bar{c}_d^T = c^T T_d^{-1}.$$

Megfigyelhetőségi alak előállítása

Az irányíthatósági alak és a megfigyelhetőségi alak felírási módja között a dualitás teremt kapcsolatot. A két állapotter ekvivalens alakjai:

$$A_o = A_c^T, \quad (2.152)$$

$$b_o = c_c, \quad (2.153)$$

$$c_o^T = b_c^T, \quad (2.154)$$

Vizsgáljuk meg az irányíthatósági és a megfigyelhetőségi alakok ekvivalenciáját. Írjuk fel az átviteli függvényt mindkét esetben egy kétállapotú állapotter reprezentáció esetére. Az irányíthatósági alakot (2.105) és (2.105) szerint vesszük:

$$\begin{aligned} G(s) &= [b_1 \quad b_0] \begin{bmatrix} s + a_1 & a_0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{aligned} \quad (2.155)$$

Vizsgáljuk meg a megfigyelhetőségi alakot is. Az állapotegyenletek mátrixos alakban felírva:

$$\dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o + \mathbf{b}_o u \quad (2.156)$$

$$y = \mathbf{c}_o^T \mathbf{x}_o \quad (2.157)$$

ahol

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o^T = [1 \quad 0].$$

Vizsgáljuk meg egy két állapotú rendszerben, hogy az irányíthatósági és a megfigyelhetőségi alakok ekvivalensek. Induljunk ki az (2.105)-(2.106) kétállapotú általános leírásból. Az átviteli függvény és az állapotter reprezentáció közötti összefüggés alapján

írjuk fel az átviteli függvényt:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \\
 &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{[1 \ 0] \operatorname{adj} \begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix}} \\
 &= \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1 s + a_0} \\
 &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{2.158}
 \end{aligned}$$

Az átviteli függvények alapján jól látható, hogy az irányíthatósági alak és a megfigyelhetőségi alakok ekvivalensek.

2.14. Példa. Határozzuk meg az alábbi rendszer irányíthatósági alakját előállító transzformációs mátrixot.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [0 \ 0 \ 1] \tag{2.159}$$

Megoldás

Az irányíthatósági alak transzformációs mátrixa:

$$T = (\mathcal{C}\tau)^{-1}$$

ahol $\det(s\mathbf{I} - A_c) = s^3 + 3s^2 + 2s + 4$

$$\mathcal{C} = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.160}$$

$$T = (\mathcal{C}\tau)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.161}$$

Az irányíthatósági alak:

$$A_c = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c_c^T = [0 \ 0 \ 1]. \quad (2.162)$$

A diagonális alakú állapotter reprezentációt előállító transzformációs mátrix alakja:

$$T = (\mathcal{C}\tau\mathcal{P})^{-1}$$

ahol

$$\mathcal{C} = [b \quad Ab \quad A^2b], \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.163)$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

és $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ az A mátrix sajátértékei (a rendszer pólusai).

2.15. Példa. Határozzuk meg az alábbi rendszer diagonális alakját előállító transzformációs mátrixot.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \ -1 \ 1] \quad (2.165)$$

Megoldás

Az diagonális alak transzformációs mátrixa:

$$T = (\mathcal{C}\tau\mathcal{P})^{-1}$$

ahol $\det(sI - A_c) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

$$T = (\mathcal{C}\tau\mathcal{P})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0.5 & -1.5 & 4.5 \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

A diagonális alak:

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, c_c^T = [2 \ -4 \ 9]. \quad (2.168)$$

2.16. Példa. Írja fel az alábbi állapotér reprezentációt megfigyelhetőségi alakban a dualitás elvének kihasználásával:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 1]. \quad (2.169)$$

Megoldás

Irányíthatósági alak:

$$C = [A \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(sI - A) = s^2 - 4s + 3 \quad (2.171)$$

$$T^{-1} = C\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

$$A_c = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_c = Tb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_c^T = [1 \quad -3] \quad (2.173)$$

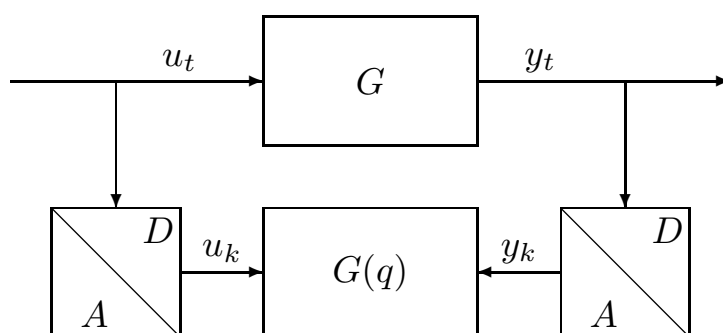
$$A_o = A_c^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_o = c_c = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad c_o^T = b_c^T = [1 \quad 0]. \quad (2.174)$$

2.4. Modellezés mért jelek alapján: modell identifikáció alapjai

A rendszer modelljének konstruálása a bemenő jelek és a kimenő jelek mért (mintavételezett) adatai alapján is történhet. Az eljárást modell identifikációnak nevezzük. A mért jelek közötti kapcsolat az alábbi alakban írható fel:

$$y = G(q)u \quad (2.175)$$

ahol q az úgynevezett eltolás operátor, $G(q)$ modell leírja a rendszer bemenete és kimenete közötti kapcsolatot, azaz a mintavételezett rendszer átviteli függvényét.



2.15. ábra. Identifikálandó modell

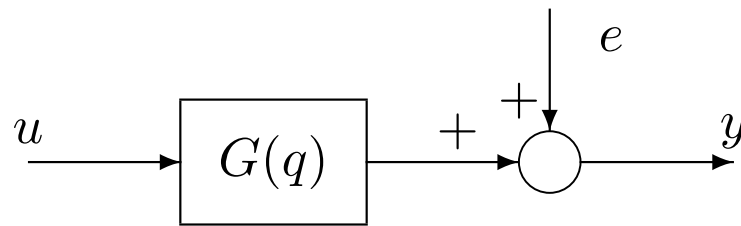
Egy zajjal terhelt lineáris időinvariáns rendszer modelljét mutatja a 2.16 ábra. A zajos rendszer modellje:

$$y = G(q)u + e \quad (2.176)$$

ahol q eltolás operátor, e zaj (zavarás).

A rendszeridentifikáció végrehajtása több lépésben történik. Ezekkel kapcsolatban további részleteket találni az irodalomban [18].

- Bemenő és kimenő jelek mérése, mintavételezése, szűrése, feldolgozása (transzformációja).
- Modell struktúrájának becslése fizikai megfontolások alapján.
- Modell paramétereinek becslése.
- Modell ellenőrzése, tesztelése, validálása.



2.16. ábra. Zajjal terhelt modell

- Diszkrét modell transzformálása folytonos alakra.

A rendszermodell általános alakja:

$$y(t) = G(q)u(t) + e(t) \quad (2.177)$$

ahol $G(q)$ átviteli függvény és q az eltolás operátor. Például

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \quad (2.178)$$

ahol $A(q)$ és $B(q)$ polinomok az eltolás operátor szerint a következő alakúak:

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n} \quad (2.179)$$

$$B(q) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m} \quad (2.180)$$

A modell ARX struktúrája

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (2.181)$$

ahol

$$B(q) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} \quad (2.182)$$

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} \quad (2.183)$$

A modell struktúráját a kimenet korábbi kimeneteinek száma, a korábbi bemenetek száma és a bemenőjel eltolása határozza meg:

$$y(t) + a_1y(t-1) + a_2y(t-2) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + e(t) \quad (2.184)$$

ahol a_1, a_2, b_1, b_2 a modell paraméterei. Átrendezve:

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) + \quad (2.185)$$

$$+ b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + e(t) \quad (2.186)$$

A modell alapján a kimenőjel t -edik értékére becslés adható:

$$\hat{y}(t) = -\hat{a}_1y(t-1) - \hat{a}_2y(t-2) + \hat{b}_1u(t-1) + \hat{b}_2u(t-2) \quad (2.187)$$

Az előrejelzés hibája:

$$\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (2.188)$$

minden t -re.

Az n -edrendű ARX modell alakja:

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \dots - a_ny(t-n) \quad (2.189)$$

$$+ b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_nu(t-n) + e(t) \quad (2.190)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\phi(t) = [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n)]^T \quad (2.191)$$

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]^T \quad (2.192)$$

ahol ϕ a mért jelek, θ a paraméterek halmaza. A kimenőjel:

$$y(t) = \phi^T(t)\theta + e(t) \quad (2.193)$$

$$y(t+1) = \phi^T(t+1)\theta + e(t+1) \quad (2.194)$$

$$\dots \quad (2.195)$$

$$y(t+N) = \phi^T(t+N)\theta + e(t+N) \quad (2.196)$$

A modell kompakt alakja:

$$Y = \Phi\theta + \epsilon(N, \theta) \quad (2.197)$$

ahol

$$Y = [y(t) \quad y(t+1) \quad \dots \quad y(t+N)]^T, \quad (2.198)$$

$$\Phi = [\phi(t) \quad \phi(t+1) \quad \dots \quad \phi(t+N)]^T, \quad (2.199)$$

$$\epsilon = [e(t) \quad e(t+1) \quad \dots \quad e(t+N)]^T \quad (2.200)$$

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]^T \quad (2.201)$$

Az LS becslés azt a paramétervektort keresi, amelynél az $\epsilon(t)$ hiba négyzetösszege a legkisebb. Az LS kritériumot a következő alakban definiáljuk:

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^N e(t, \theta)^2 \quad (2.202)$$

ami skaláris szorzat alakban is felírható:

$$J(\theta) = \epsilon(t, \theta)^T \epsilon(t, \theta) \quad (2.203)$$

ahol θ a paramétereket tartalmazó vektor. Az LS becslés egy optimalizáló eljárás, melynek során a paraméterbecslési eljárás eredményét a következő költségfüggvény minimalizálásával kapjuk:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta) \quad (2.204)$$

Az LS kritérium kifejtve:

$$J(\theta) = \epsilon^T \epsilon = (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \quad (2.205)$$

$$= Y^T Y - \theta^T \Phi^T Y - Y^T \Phi \theta + \theta^T \Phi^T \Phi \theta \quad (2.206)$$

A minimum parciális deriválttal számítható:

$$J(\theta) = \left[\frac{\partial J}{\partial \theta_i} \right] = -2Y^T \Phi + 2\theta^T \Phi^T \Phi \quad (2.207)$$

Az optimális megoldás:

$$\Phi^T Y = \Phi^T \Phi \hat{\theta}_{LS} \quad (2.208)$$

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (2.209)$$

amit az LS becslésre vonatkozó normálegyenletnek nevezünk.

A gyakorlati alkalmazásokból ismert tény, hogy a becslési hiba az idő függvényében egyre nagyobb értékeket vesz fel. Ezért a becslési hiba súlyozását is érdemes bevinni a kritériumba.

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^N w(t) e(t, \theta)^2 = \epsilon(t, \theta)^T W \epsilon(t, \theta) \quad (2.210)$$

ahol $w(k)$, illetve W súlyozó tényező. Abban a tartományban, ahol nagyra választjuk, a becslés pontosabb lesz, mint ahol kisebbre választjuk. A normálsúlyozás összefüggése a következőképpen változik.

$$\Phi^T W Y = \Phi^T W \Phi \hat{\theta}_{WLS} \quad (2.211)$$

$$\hat{\theta}_{WLS} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W Y \quad (2.212)$$

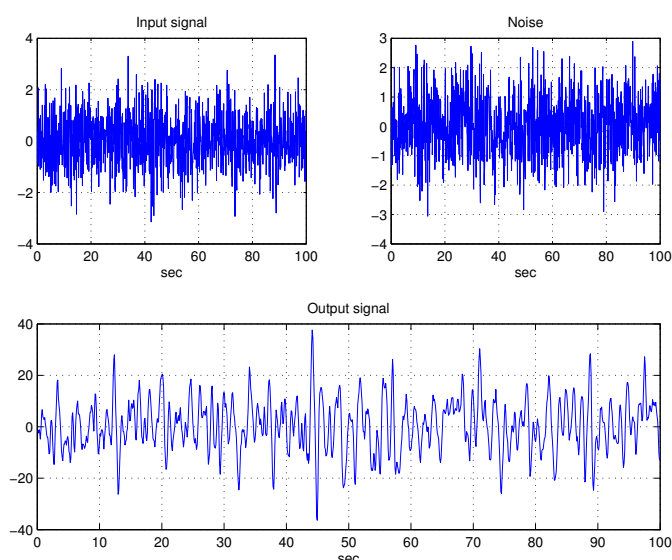
Ezt a kifejezést a súlyozott LS becslésre vonatkozó normálegyenletnek nevezzük.

A becsült modell validáció vizsgálatára a gyakorlatban elterjedt módszer a hiba statisztikai vizsgálata. Az identifikált modell tulajdonságait a rendszer tulajdonságaival való összehasonlítása. A vizsgálat mind idő, mind frekvenciatartományban elvégezhető.

2.17. Példa. *Tegyük fel, hogy adott egy paramétereiben nem ismert másodfokú rendszer:*

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (2.213)$$

ahol $n_k = 2$, $A(q) = [1 \quad -1.5 \quad 0.7]$ és $B(q) = [2.5 \quad 0.9]$. *Tegyük fel, hogy a*



2.17. ábra. Mért bemenő és kimenő jelek

másodfokú rendszer bemenő és kimenő jeleit $T_s = 0.1$ sec lépésenként mérjük. A mért mintát illusztrálja a 2.17 ábra.

Megoldás:

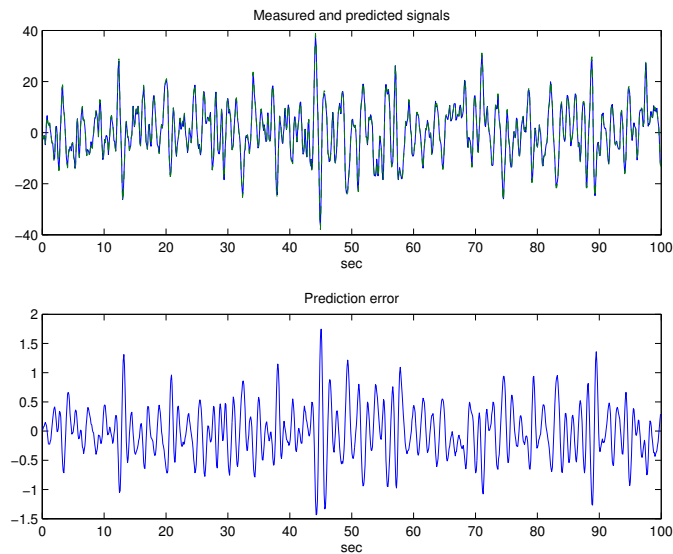
A modellt a következő ARX struktúrában keressük:

$$A(q)y = B(q)u + e \quad (2.214)$$

ahol $B(q) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2}$ és $A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}$. *A paraméterbecslést legkisebb négyzetes módszerrel hajtjuk végre.*

$$B(q) = [2.5371 \quad 0.8677] \quad (2.215)$$

$$A(q) = [1 \quad -1.515 \quad 0.7105] \quad (2.216)$$



2.18. ábra. Becslési hiba elemzése

Kiszámítjuk az előrejelzett kimenetet és ezt a mért kimenethez hasonlítjuk. Elvégezzük a hiba kimenet (reziduál) elemzését.

Hiba átlag: $m = -0.0155$, szórás: $\sigma = 0.1981$. A modell által generált jel és a mért jel illesztése az eltérés jelével együtt a 2.18 ábrán látható.

2.5. Rendszerdinamika elemzése időtartományban

2.1. Definíció. Súlyfüggvény A bemenőjel - kimenőjel kapcsolatot leírhatjuk az ún. Dirac-delta függvényre adott válaszfüggvény segítségével is.

A Dirac-delta függvényt a következőképp definiáljuk:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } t = 0, \\ 0, & \text{ha } t \neq 0. \end{cases} \quad (2.217)$$

ahol

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.218)$$

A Dirac-delta bemenőjelre adott válaszfüggvény a rendszer súlyfüggvényének nevezzük.

A súlyfüggvény segítségével egy tetszőleges bemenőjelre adott válaszfüggvény:

$$y(t) = \int_0^t \delta(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (2.219)$$

2.2. Definíció. A bemenőjel - kimenőjel kapcsolatot leírhatjuk az egységugrás függvényre adott válaszfüggvény segítségével is.

Az egységugrás függvényt a következőképp definiáljuk:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \geq 0, \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases} \quad (2.220)$$

Az egységugrás bemenőjelre adott válaszfüggvény a rendszer átmeneti függvényének nevezzük.

Az átmeneti függvény segítségével egy tetszőleges bemenőjelre adott válaszfüggvény:

$$y(t) = \int_0^t 1(\tau)u(t - \tau)d\tau. \quad (2.221)$$

A Dirac-delta bemenőjelre adott válaszfüggvény a rendszer súlyfüggvényének nevezzük. A Dirac-delta függvény ($u(t) = \delta(t)$) Laplace transzformáltja: $U(s) = 1$. Emiatt $Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (2.222)$$

Az egységugrás bemenőjelre adott válaszfüggvény a rendszer átmeneti függvényének nevezzük. A egységugrás függvény ($u(t) = 1(t)$) Laplace transzformáltja: $U(s) = \frac{1}{s}$. Emiatt $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s}G(s)$.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right] \quad (2.223)$$

2.5.1. Példák a rendszerdinamika időtartományi elemzésére

2.18. Példa. Tekintsük a 2.4 ábrán látható két rugóból és csillapító kamrából álló rendszert. Adatok: $k = 10\frac{N}{m}$, $c_1 = 3\frac{N}{m}$, $c_2 = 2\frac{N}{m}$

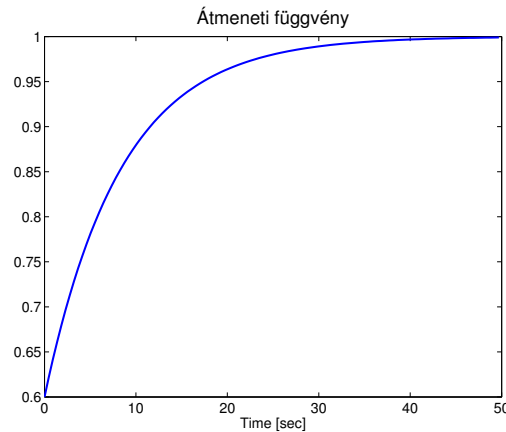
$$G = \frac{kc_1s + c_1c_2}{ks(c_1 + c_2) + c_1c_2} = \frac{1 + 5s}{1 + \frac{25}{3}s} \quad (2.224)$$

Átmeneti függvény számítása

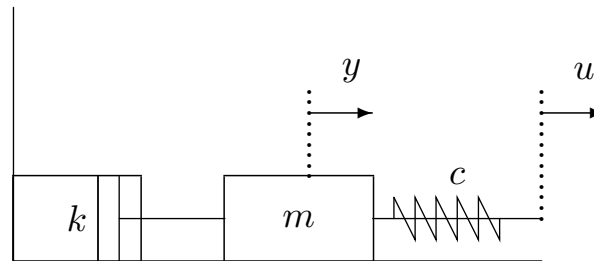
$$Y = \frac{1}{s}G = \frac{1 + 5s}{s(1 + \frac{25}{3}s)} \quad (2.225)$$

Az átmeneti függvény a rezidum tétel alkalmazásával kiszámítható és 2.19 ábra szerint felrajzolható:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 + 5s}{s(1 + \frac{25}{3}s)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{25}} (s + \frac{3}{25}) \frac{1 + 5s}{\frac{25}{3}s(\frac{3}{25} + s)} e^{st} \\ &= 1 - 0.4 \cdot e^{-0.12t} \end{aligned}$$



2.19. ábra. Az átmeneti függvény illusztrációja



2.20. ábra. Lengőrendszer modellje

2.19. Példa. Írjuk fel a 2.20 ábrán látható tömegből, rugóból és csillapítóból álló mechanikai rendszer átviteli függvényét. Az átviteli függvény Laplace transzformációval:

$$G = \frac{c}{ms^2 + ks + c} = \frac{\frac{c}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}s + \frac{c}{m}} \quad (2.226)$$

Két pólusa van, amelyek a fizikai paraméterektől függően valósak, vagy komplexek lehetnek: $p_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}$. Súlyfüggvény számítása

$$\begin{aligned} w(t) &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1) \frac{\frac{c}{m}}{(s - p_1)(s - p_2)} e^{st} \\ &+ \lim_{s \rightarrow p_2} (s - p_2) \frac{\frac{c}{m}}{(s - p_1)(s - p_2)} e^{st}, \\ &= \frac{\frac{c}{m}}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{\frac{c}{m}}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \end{aligned} \quad (2.227)$$

Komplex pólusok esetén ($p_1 = \alpha + i\beta$ és $p_2 = \alpha - i\beta$) további számítások szükségesek:

$$w(t) = \frac{c}{2i\beta} e^{\alpha t} (e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}) = \frac{c}{m\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.228)$$

Kihasználtuk a szögfüggvényekre vonatkozó $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ Euler összefüggést. Átmeneti függvény számítása:

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{\frac{c}{m}}{s(s-p_1)(s-p_2)} e^{st} \\ &+ \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1) \frac{1}{s} \frac{\frac{c}{m}}{(s-p_1)(s-p_2)} e^{st} \\ &+ \lim_{s \rightarrow p_2} (s-p_2) \frac{1}{s} \frac{\frac{c}{m}}{(s-p_1)(s-p_2)} e^{st} \\ &= \frac{c}{m} + \frac{c}{m} \frac{1}{p_1(p_1-p_2)} e^{p_1 t} - \frac{c}{m} \frac{1}{p_2(p_1-p_2)} e^{p_2 t} \end{aligned} \quad (2.229)$$

Komplex pólusok esetén ($p_1 = \alpha + i\beta$ és $p_2 = \alpha - i\beta$) további számítások szükségesek:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\frac{c}{m}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\frac{c}{m}}{2i\beta(\alpha + i\beta)} e^{\alpha t} e^{i\beta t} - \frac{\frac{c}{m}}{2i\beta(\alpha - i\beta)} e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \\ &= \frac{\frac{c}{m}}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\frac{c}{m}}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} \cos\beta t + \frac{\frac{c}{m}}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin\beta t. \end{aligned} \quad (2.230)$$

Komplex pólusok esete: Adatok: $m = 1\text{kg}$, $k = 1\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, $c = 3\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Két komplex konjugált pólus van: a $p_1 = -0.5 + 1.65i$ és $p_2 = -0.5 - 1.65i$. A súlyfüggvény és átmeneti függvény a rezidum tétel alkalmazásával számítható:

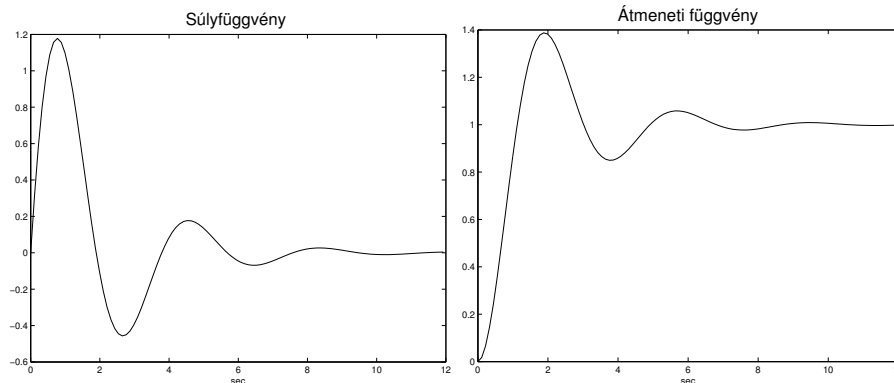
$$w = 1.818e^{-0.5t} \sin(1.65t) \quad (2.231)$$

$$v = 1 - 0.3e^{-0.5t} \sin(1.65t) - e^{-0.5t} \cdot \cos(1.65t) \quad (2.232)$$

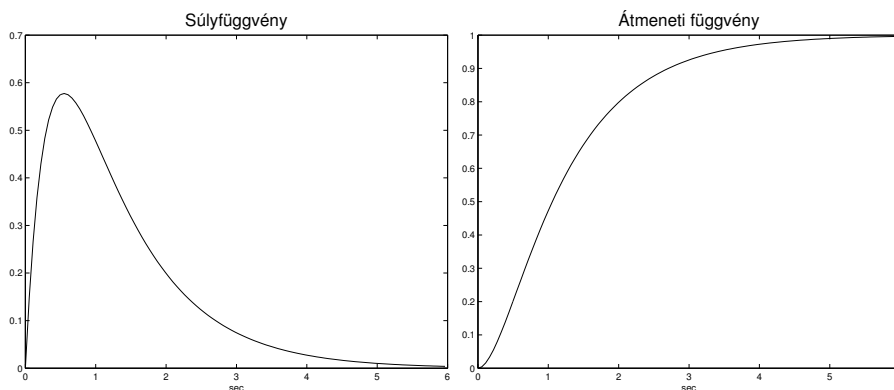
Valós pólusok esete. Adatok: $m = 1\text{kg}$, $k = 4\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, $c = 3\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Valós pólusai vannak: $p_1 = -3$ és $p_2 = -1$. A súlyfüggvény és átmeneti függvény a rezidum tétel alkalmazásával számítható:

$$w = 1.5e^{-t} - 1.5e^{-3t} \quad (2.233)$$

$$v = 1 - 1.5e^{-t} + 0.5e^{-3t} \quad (2.234)$$



2.21. ábra. A 2.19 példa megoldása komplex pólusok esetén



2.22. ábra. A 2.19 példa megoldása valós pólusok esetén

2.20. Példa. Tekintsük a 2.4 ábrán látható két rugóból és csillapító kamrából álló rendszert, melynek átviteli függvénye

$$G = \frac{kc_1s + c_1c_2}{ks(c_1 + c_2) + c_1c_2} \quad (2.235)$$

ahol $c_1 = 2\frac{N}{m}$, $c_2 = 3\frac{N}{m}$. Mekkora k csillapítás esetén lesz a rendszer időállandója $T = 2\text{sec}$.

Megoldás:

$$G = \frac{kc_1s + c_1c_2}{ks(c_1 + c_2) + c_1c_2} = \frac{2ks + 6}{5ks + 6} = \frac{\frac{k}{3}s + 1}{\frac{5k}{6}s + 1} \quad (2.236)$$

Az egytárolós rendszer átviteli függvénye alapján $G = \frac{A}{T_s+1}$ alapján az időállandó:

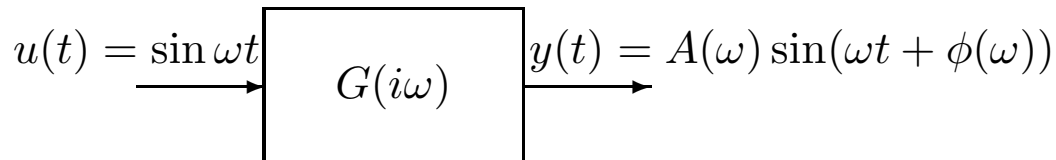
$$T = \frac{5k}{6} = 2 \quad (2.237)$$

azaz

$$k = 2.4 \frac{Ns}{m}. \quad (2.238)$$

2.6. Rendszerdinamika elemzése frekvencia tartományban

Egy rendszer frekvencia függvényének a rendszernek szinuszos bemenőjelre, állandósult állapotban adott válaszfüggvényét nevezzük. Itt a bemenőjel egy egységnyi



2.23. ábra. Frekvencia függvény illusztrációja

amplitúdójú szinusz lefutású jel, amelynek körfrekvenciája ω .

$$u = \sin(\omega t). \quad (2.239)$$

A kimenőjel:

$$y = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)). \quad (2.240)$$

Az $A(\omega)$ függvényt amplitúdó függvénynek, a bemenőjel és a kimenőjel közötti fáziseltolást jelentő $\varphi(\omega)$ függvényt pedig fázisfüggvénynek nevezzük, mindkettő a bemenőjel ω körfrekvenciájától függ.

Az amplitúdó függvény a $G(i\omega)$ függvény abszolút értékeként kapható:

$$A(\omega) = |G(i\omega)|, \quad (2.241)$$

a fázisfüggvény pedig $G(i\omega)$ fázisfüggvényeként:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}G(i\omega)}{\operatorname{Re}G(i\omega)}. \quad (2.242)$$

Legyen egy rendszer átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{b}{s + a} \quad (2.243)$$

A rendszer bemenete egy egységnyi amplitúdójú szinusz lefutású jel ω körfrekvenciával: $u(t) = 1 \cdot \sin(\omega t)$. A \mathcal{L} -transzformáció alkalmazásával vizsgáljuk meg a rendszer kimenőjelét.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b}{s + a} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.244)$$

Időtartományba transzformálva:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \lim_{s \rightarrow -a} (s+a) \frac{b\omega}{(s+a)(s^2+\omega^2)} e^{st} \\
 &+ \lim_{s \rightarrow -i\omega} (s+i\omega) \left(\frac{b\omega}{(s+a)(s+i\omega)(s-i\omega)} \right) e^{st} \\
 &+ \lim_{s \rightarrow i\omega} (s-i\omega) \frac{b\omega}{(s+a)(s+i\omega)(s-i\omega)} e^{st}. \quad (2.245)
 \end{aligned}$$

Elvégezve a megfelelő határértékképzéseket:

$$y(t) = \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at} + \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{a + i\omega}{-2i\omega} e^{-i\omega t} + \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{a - i\omega}{2i\omega} e^{i\omega t} \quad (2.246)$$

Megjegyzés:

Egy $z = a + ib$ komplex szám exponenciális alakja $z = Ae^{i\phi}$ ahol $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $\phi = \arctan \frac{b}{a}$.

Alkalmazva az összefüggést:

$$a + i\omega = \sqrt{a^2 + \omega^2} \cdot e^{i\varphi(\omega)}, \quad a - i\omega = \sqrt{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-i\varphi(\omega)}, \quad (2.247)$$

ahol $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{a}$.

$$y(t) = \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at} + \frac{b\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2} 2i\omega} (e^{i[\omega t - \varphi(\omega)]} - e^{-i[\omega t - \varphi(\omega)]}) \quad (2.248)$$

majd felhasználva az Euler-összefüggést ($e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2i \sin \phi$):

a kimenőjelre a következő adódik:

$$y(t) = \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin[\omega t - \varphi(\omega)] \quad (2.249)$$

A kimenőjel első tagja a transziens időtartamában exponenciálisan nullához tart. Az állandósult állapotot a második tag határozza meg.

Az állandósult állapotra azt kapjuk, hogy

$$y(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)), \quad (2.250)$$

ahol $A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$. Állandósult állapotban tehát a rendszer egy adott körfrekvenciájú szinuszos lefolyású bemenőjelre egy szinuszos lefolyású kimenőjellel válaszol, amelynek amplitúdóját az $A(\omega)$ függvény, a bemenőjel és a kimenőjel közötti fáziseltolást pedig a $\varphi(\omega)$ függvény méri.

2.3. Definíció. Nyquist diagram A frekvencia függvény ábrázolásának egyik módja az, amikor az amplitúdó függvényt mint vektort egy polár koordináta rendszerben ábrázoljuk a hozzátartozó $\varphi(\omega)$ függvény segítségével, ahol az $A(\omega)$ hosszúságú vektornak a pozitív valós tengellyel bezárt szöge épp a $\varphi(\omega)$ szög. A frekvencia függvénynek ezt az ábrázolásmódját Nyquist - diagramnak nevezzük.

2.4. Definíció. Bode diagram A frekvencia függvények egy másik ábrázolásmódja az, amikor az

$$A(\omega) \quad (2.251)$$

amplitúdó függvényt a $\log \omega$ függvényében ábrázoljuk, decibelben. Ennek alapján a függőleges tengelyen $|G(i\omega)| \text{ dB} = 20 \log |A(\omega)|$ szerepel. Ebben az esetben a

$$\varphi(\omega) \quad (2.252)$$

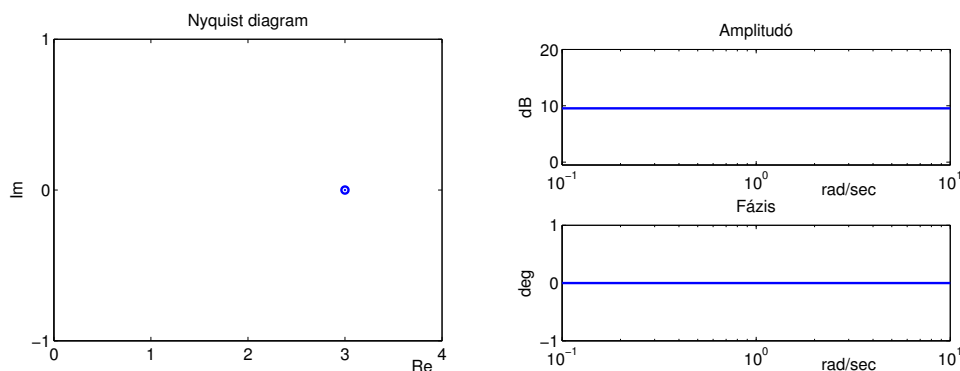
fázisfüggvényt külön diagramban, a $\log \omega$ függvényében ábrázoljuk. Ezt az ábrázolást a rendszer Bode - diagramjának nevezzük.

2.6.1. Alaptagok frekvenciafüggvényei

Arányos tag (OTP)

$$G(i\omega) = A \quad (2.253)$$

Az arányos tag jellegörbéje egyetlen pont a Nyquist diagramon. Az amplitúdó



2.24. ábra. OTP tag frekvencia diagramjai

diagramja minden frekvencián $20 \cdot \log_{10}(A)$ értékű, azaz vízszintes egyenes, fáziseltolás szöge zérus.

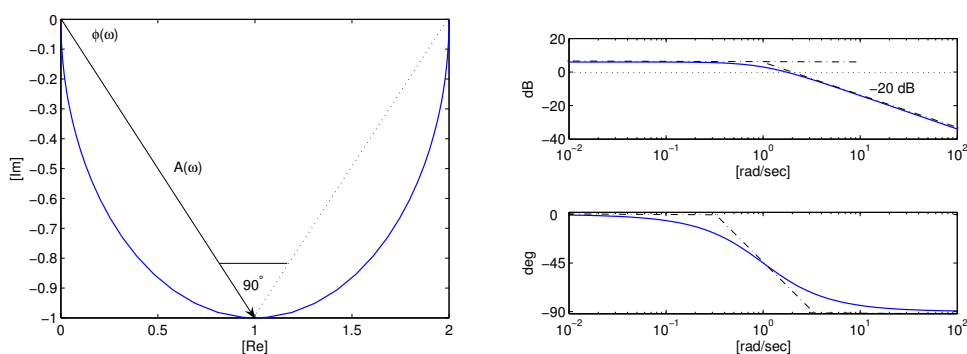
1TP tag Nyquist diagramja:

$$G(i\omega) = \frac{A}{1 + i\omega T} \quad (2.254)$$

Írjuk fel az egytárolós arányos tag (1TP) frekvenciafüggvényét valós és képzetes részre bontott alakban:

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= A \frac{1 - i\omega T}{(1 + i\omega T)(1 - i\omega T)} = A \frac{1 - i\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \\ &= \frac{A}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{i\omega AT}{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned} \quad (2.255)$$

$\omega = \frac{1}{T}$ frekvencián az abszolút érték $A\frac{\sqrt{2}}{2}$, a fázisszög -45° (az imaginárius rész maximális). Ezt a frekvenciát sarokkőrfrekvenciának nevezzük. Írjuk fel a frekven-



2.25. ábra. 1TP tag frekvencia diagramjai

ciafüggvény amplitúdó függvényét dB skálán:

$$\begin{aligned} |G(i\omega)|_{dB} &= 20 \log A - 20 \log |1 + i\omega T| \\ &= 20 \log A - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \end{aligned} \quad (2.256)$$

Vizsgáljuk meg a jellegörbe menetét:

$$|G(i\omega)| \approx \begin{cases} 20 \log A, & \text{ha } \omega \rightarrow 0 \\ -20 \log(\omega T), & \text{ha } \omega \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.257)$$

Kis körfrekvenciákra a függvény aszimptotája a $20 \log A$ egyenes, míg nagy körfrekvenciákra a egy olyan -20dB/dekád meredekségű egyenes, amely az $\omega = 1/T$ pontban metszi a $20 \log A$ vízszintes aszimptotát.

2TP tag Nyquist diagramja:

$$G(i\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega T_1)(1 + i\omega T_2)} = \frac{1}{1 + i\omega T_1} \cdot \frac{1}{1 + i\omega T_2} \quad (2.258)$$

A kéttárolós arányos tag (2TP) Nyquist diagramját a két különböző időállandójú egytárolós tag Nyquist diagramjának összeszorzásával kapjuk. (Az eredő vektor abszolút értéke a két vektor abszolút értékeinek szorzata, fázisszöge a két vektor fázisszögének összege.)

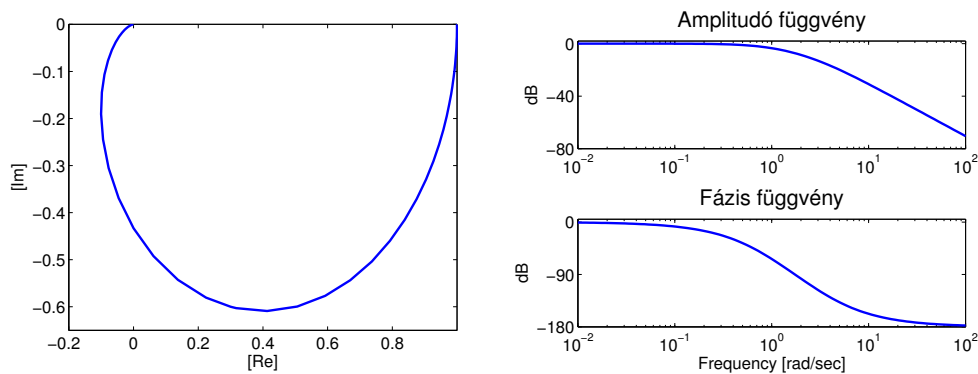
$$G(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega 2\xi T + (i\omega)^2 T^2} = \frac{1}{1 + i\omega T_1} \cdot \frac{1}{1 + i\omega T_2} \quad (2.259)$$

$\xi > 1$ eset (valós pólusok):

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| \text{ dB} &= 20 \log |G_1(i\omega)G_2(i\omega)| \\ &= 20 \log |G_1(i\omega)| + 20 \log |G_2(i\omega)| \\ &= |G_1(i\omega)| \text{ dB} + |G_2(i\omega)| \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.260)$$

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) \quad (2.261)$$

A frekvenciafüggvény két egytárolós tag frekvencia függvényének szorzataként írható



2.26. ábra. 2TP tag frekvencia diagramjai valós pólusok esetén

fel. Mivel logaritmikus síkon a szorzásnak összeadás felel meg, a két egytárolós tag Bode diagramját összegezve kapjuk az eredő Bode diagramot.

Komplex pólusok esete: $\xi < 1$ eset (komplex pólusok):

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| \text{ dB} &= 20 \log \left| \frac{1}{1 + i\omega 2\xi T + (i\omega)^2 T^2} \right| \\ &= -20 \left| 1 + i\omega 2\xi T + (i\omega)^2 T^2 \right| \\ &= -20 \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.262)$$

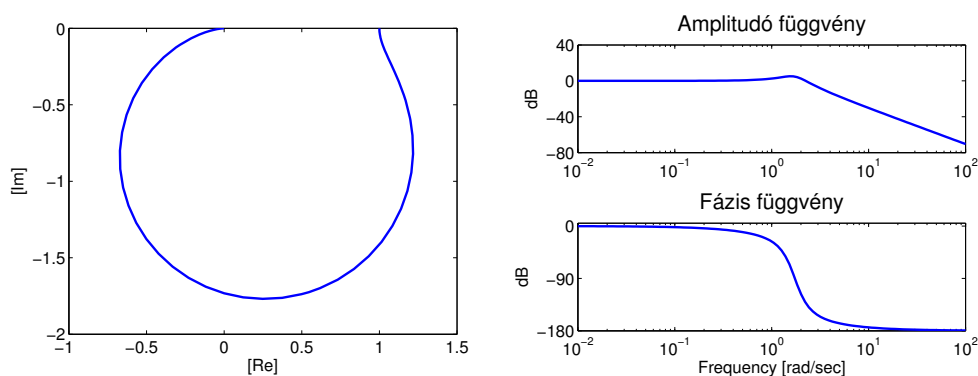
Vizsgáljuk meg a jelleggörbe menetét:

$$|G(i\omega)| \approx \begin{cases} 0 \text{ dB}, & \text{ha } \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20\sqrt{4\xi^2} = -20\log 2\xi \text{ dB}, & \text{ha } \omega \approx \frac{1}{T} \\ -20\sqrt{(\omega^4 T^4)} = -40\log \omega T \text{ dB}, & \text{ha } \omega \gg \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (2.263)$$

Ha $\xi > 0.5$ a pontos görbe a közelítő egyenesek alatt fut, ha $\xi < 0.5$ a pontos görbe az egyenesek fölött halad, míg $\xi = 0.5$ esetén a pontos és a közelítő érték $\omega = 1/T$ -nél megegyezik.

$\xi < 1$ eset (komplex pólusok): A fázis görbe alakja ugyancsak a ξ -től függ:

$$\phi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \text{ha } \omega \ll \frac{1}{T} \\ -90^\circ, & \text{ha } \omega \approx \frac{1}{T} \\ -180^\circ, & \text{ha } \omega \gg \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (2.264)$$



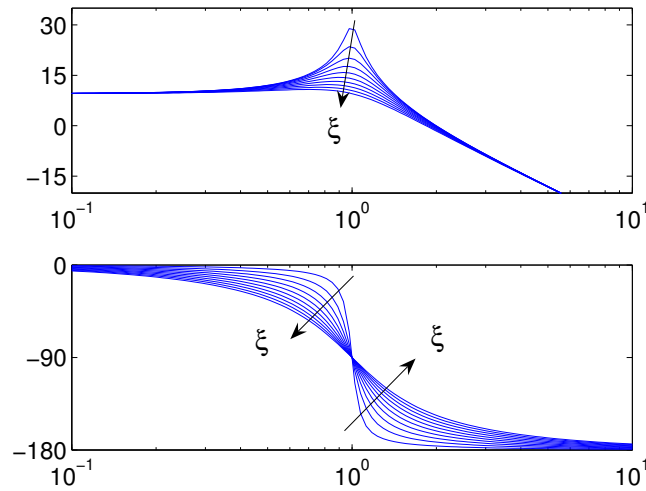
2.27. ábra. 2TP tag frekvencia diagramjai komplex pólusok esetén

A 2.28 ábra ξ változó különböző értékeinek hatását illusztrálja az amplitúdó és fázisgörbe függvényekben.

2.21. Példa. Tömeg, rugó és csillapító Írjuk fel a tömegből, rugóból és csillapítóból álló mechanikai rendszer frekvencia függvényét. A frekvencia függvény:

$$G(i\omega) = \frac{c}{m(i\omega)^2 + k(i\omega) + c} \quad (2.265)$$

Két pólusa van, amelyek a fizikai paramétereiktől függően valósak, vagy komplexek lehetnek: $p_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}$. Frekvencia diagramok valós pólusok esetén:

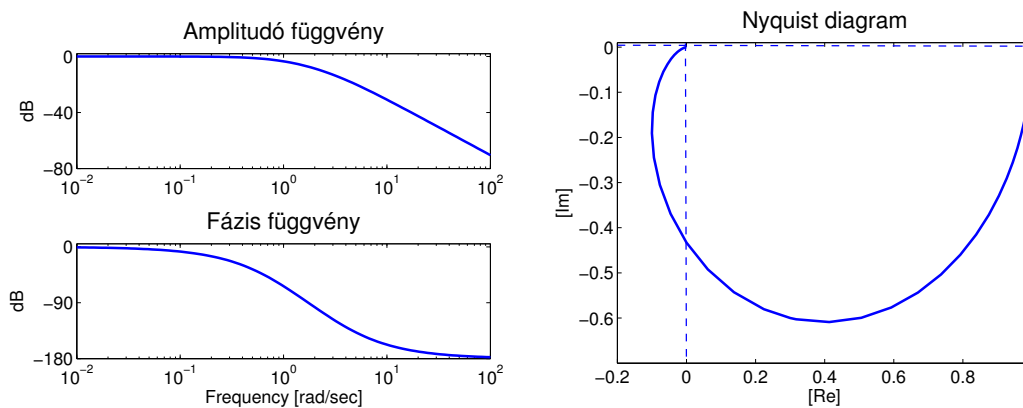


2.28. ábra. ξ hatása a Bode diagramra

Adatok: $m = 1\text{kg}$, $k = 4\frac{N_s}{m}$, $c = 3\frac{N}{m}$.

$$G(i\omega) = \frac{3}{(i\omega + 1)(i\omega + 3)} = \frac{1}{i\omega + 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}i\omega + 1} \quad (2.266)$$

Valós pólusai vannak: $p_1 = -3$ és $p_2 = -1$. Időállandók: $T_1 = 1$ és $T_2 = \frac{1}{3}$.



2.29. ábra. A 2.21 példa megoldása valós pólusok esetén

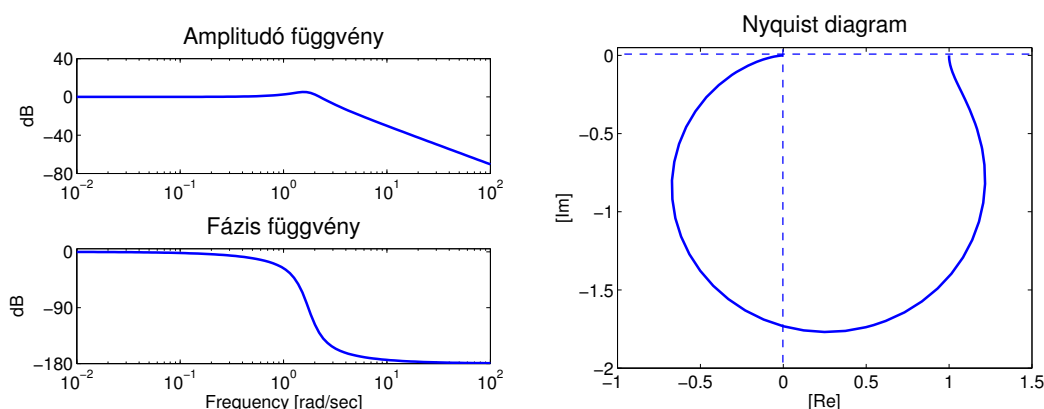
Frekvencia diagramok komplex pólusok esetén: Adatok: $m = 1\text{kg}$, $k = 1\frac{N_s}{m}$, $c =$

$3 \frac{N}{m}$.

$$G(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega 2\xi T + (i\omega)^2 T^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}i\omega + \frac{1}{3}(i\omega)^2}$$

$$= \frac{3}{(i\omega + 0.5 + 1.65i)(i\omega + 0.5 - 1.65i)} \quad (2.267)$$

Két komplex konjugált pólus van: a $p_1 = -0.5 \pm 1.65i$. Időállandó és a csillapítási együttható: $T = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57s$ és $\xi = \frac{1}{6} \approx 0.16s$.



2.30. ábra. A 2.21 példa megoldása komplex pólusok esetén

Integráló tag Nyquist diagramja:

$$G(i\omega) = \frac{1}{Ti\omega} = -i \frac{1}{T\omega} \quad (2.268)$$

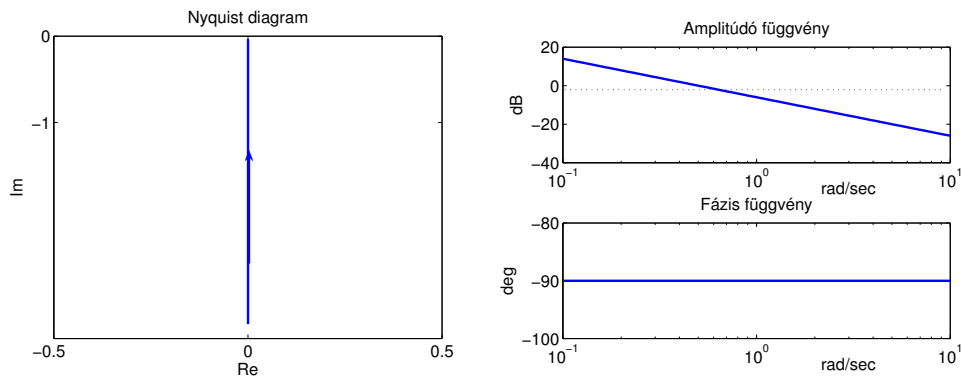
A Nyquist diagram jelleggörbéje a negatív imaginárius tengelyre esik. $\omega \rightarrow 0$ értéken (kis frekvenciákon) $-j\omega$ -ból indul és a komplex számísiak kezdőpontjába fut be $\omega \rightarrow \infty$ értéken (nagy frekvenciákon). Integráló tag Bode diagramja:

$$G(i\omega) = \frac{1}{Ti\omega} \quad (2.269)$$

Az amplitúdó jelleggörbe:

$$|G(i\omega)| = 20 \log \frac{1}{T\omega} = -20 \log(T\omega) \quad (2.270)$$

Az amplitúdó jelleggörbe $-20db/dek$ meredekségű egyenes. Az egyenes $\omega = \frac{1}{T}$ -nél metszi a $0dB$ ten-gelyt. A fázis jelleggörbe értéke minden frekvencián -90° .

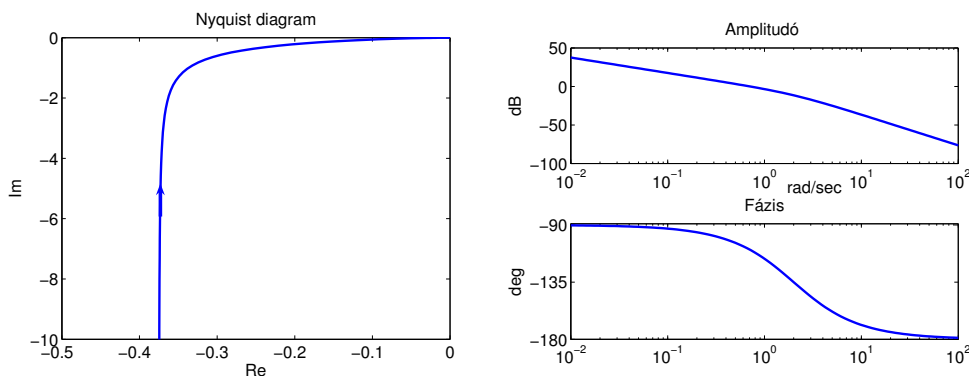


2.31. ábra. Integráló tag frekvencia függvényei

Egytárolós integráló tag frekvencia diagramja:

$$G(i\omega) = \frac{1}{T_I i\omega} \cdot \frac{A}{1 + i\omega T_P} \quad (2.271)$$

A Nyquist diagramot megkapjuk, ha a két tényező Nyquist jelleggörbéit összeszo-



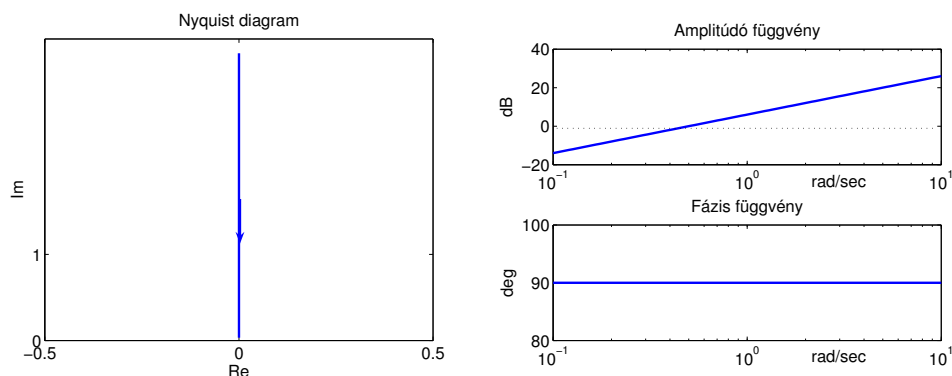
2.32. ábra. Egytárolós integráló tag frekvencia függvényei

rozzuk. A tag frekvenciafüggvénye a két alaptag szorzatából áll, ezért az eredő Bode diagram a két tag Bode diagramjának összegeként adódik.

Differenciáló tag Nyquist diagramja:

$$G(i\omega) = T_I i\omega \quad (2.272)$$

A Nyquist diagram jelleggörbéje az imaginárius tengelyre esik. $\omega \rightarrow 0$ értéken (kis frekvenciákon) az origóból indul és $\omega \rightarrow \infty$ értéken (nagy frekvenciákon) $+j\omega$ -hez



2.33. ábra. Differenciáló tag frekvencia függvényei

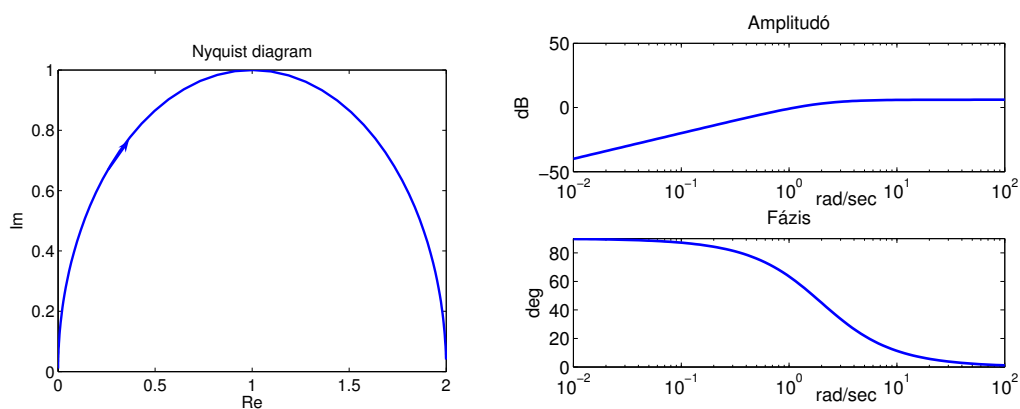
tart. Megjegyzés: Tiszta differenciáló tag a gyakorlatban nem fordul elő (nem kauzális rendszer), a differenciáló hatás időtároló taggal együtt jelentkezik. Differenciáló tag Bode diagramja:

$$G(i\omega) = Ti\omega \quad (2.273)$$

Az amplitúdó jelleggörbe:

$$|G(i\omega)| = 20 \log T\omega \quad (2.274)$$

Az amplitúdó jelleggörbe -20 db/dec meredekségű egyenes. Az egyenes $\omega = \frac{1}{T}$ -nél metszi a 0 dB ten-gelyt. A fázis jelleggörbe értéke minden frekvencián 90° .



2.34. ábra. Egytárolós differenciáló tag frekvencia függvényei

Egytárolós differenciáló tag frekvencia diagramja:

$$G(i\omega) = T_D i\omega \cdot \frac{A}{1 + i\omega T_P} \quad (2.275)$$

A Nyquist diagramból látható, hogy kis frekvencián az amplitúdó zérus, de ω növelésével a kimenőjel véges értékhez tart. Az ω növelésével a fáziseltolási szög 90° -tól 0° -ig változik.

Holtidős tag frekvencia diagramja: Holtidős tagoknak nevezzük azokat a tagokat, amelyek egy tiszta T_H időkésettést hoznak létre. Ez az időkésettetés megjelenhet bármelyik alaptagban. Például a nullatárolós holtidős (0TH) tag egyenlete $y(t) = u(t - T_H)$, ahol T_H a holtidő.

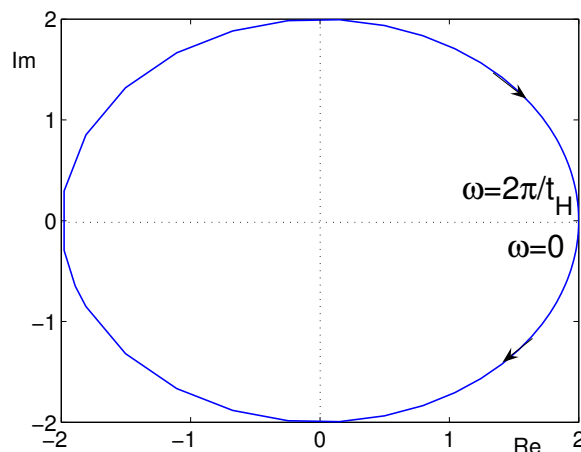
Egy t_H holtidős tag frekvenciafüggvénye

$$G_H(i\omega) = Ae^{-i\omega t_H}.$$

2.22. Példa. Példa: $A = 2$, $t_H = 3$;

$$G_H(i\omega) = 2e^{-3\omega i}.$$

Az alaptag $A(\omega) = 2$ amplitúdójú minden frekvencián, és fázisszöge a frekvenciával lineáris: $\varphi(\omega) = -t_H\omega = -3\omega$.



2.35. ábra. A 2.22 példa megoldása

Megjegyezzük, hogy mind az időtartományi, mind a frekvencia tartományi elemzésekre további példákat találni az irodalomban [4, 10].

2.7. Irányíthatóság és megfigyelhetőség

2.5. Definíció. *Állapot megfigyelhetőség:* Adott $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$. Mi a feltétele annak, hogy az $\mathbf{x}(t)$ állapotokat minden a $t \geq t_0$ időpontra meghatározhassuk a rendszer jövőbeli input és output függvényeinek ismeretében?

Az $\mathcal{O}_n(\mathbf{c}^T, \mathbf{A})$ mátrixot a rendszer megfigyelhetőségi mátrixának nevezzük.

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{c}^T \mathbf{A} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^T. \quad (2.276)$$

2.1. Tétel. *Kálmán-féle rangfeltétel*

Egy $(\mathbf{c}^T, \mathbf{A})$ pár megfigyelhető akkor és csak akkor, ha megfigyelhetőségi mátrixuk rangja megegyezik az állapotter dimenziójával, azaz

$$\text{rang} \{ \mathcal{O}_n(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}) \} = n. \quad (2.277)$$

2.6. Definíció. *Állapot irányíthatóság:* Adott $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$, és $\mathbf{x}(t)$ a $t = t_0 = 0$ időpontban. Mi a feltétele annak, hogy találjunk olyan $u(t)$, $t \geq t_0$ irányítást, amely a rendszert véges T idő alatt az $\mathbf{x}(0)$ állapotból egy tetszőleges $\mathbf{x}(T)$, $\mathbf{x}(T) \neq \mathbf{x}(0)$ állapotba vigye?

Az $\mathcal{C}_n(\Phi, \mathbf{b})$ mátrixot a diszkrét idejű rendszer irányíthatósági mátrixának nevezzük.

$$\mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.278)$$

2.2. Tétel. *Kálmán-féle rangfeltétel*

Egy (\mathbf{A}, \mathbf{b}) pár akkor és csak akkor irányítható, ha irányíthatósági mátrixuk rangja megegyezik az állapotter dimenziójával, azaz

$$\text{rang} \{ \mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \} = n. \quad (2.279)$$

2.7. Definíció. Egy rendszer $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}^T)$ állapotter reprezentációja minimál reprezentáció, ha együttesen irányítható és megfigyelhető, azaz

$$\text{rang} \{ \mathcal{C}_n(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}) \} = \text{rang} \{ \mathcal{O}_n(\tilde{\mathbf{c}}^T, \tilde{\mathbf{A}}) \} = n. \quad (2.280)$$

A minimál reprezentációkhoz tartozó állapotter dimenziója a legkisebb az összes olyan $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ állapotter reprezentációkat tekintve, amelyekre

$$\mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{c}}^T (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\mathbf{b}} = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad (2.281)$$

ahol $b(s)/a(s)$ a rendszer átviteli függvénye.

2.23. Példa. Vizsgáljuk az alábbi diagonális állapotter reprezentáció megfigyelhetőségét és irányíthatóságát:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} u, \quad (2.282)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.283)$$

Megoldás

A megfigyelhetőségi mátrix:

$$\mathcal{O}_2(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (2.284)$$

A rangfeltételt a következőképp vizsgálhatjuk: $\text{rang}\{\mathcal{O}_2(\mathbf{c}^T, \mathbf{A})\} = 2$ akkor, ha $\det\{\mathcal{O}_2(\mathbf{c}^T, \mathbf{A})\} \neq 0$. Az adott feladatban: $\det\{\mathcal{O}_2(\mathbf{c}^T, \mathbf{A})\} = \lambda_2 - \lambda_1$, azaz a megfigyelhetőség teljesül, ha akkor és csak akkor, ha $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

Az irányíthatósági mátrix:

$$\mathcal{C}_2(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d) = \begin{bmatrix} r_1 & \lambda_1 r_1 \\ r_2 & \lambda_2 r_2 \end{bmatrix}. \quad (2.285)$$

Az irányíthatósági mátrix rangja éppen 2 ha

$$\det\{\mathcal{C}_2(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)\} = r_1 r_2 \lambda_2 - r_1 r_2 \lambda_1 = r_1 r_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0, \quad (2.286)$$

azaz $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2.24. Példa. Vizsgáljuk meg az alábbi állapotter reprezentációval adott rendszer irányíthatóságát és megfigyelhetőségét.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \ 0 \ 0]. \quad (2.287)$$

Megoldás

Írjuk fel az irányíthatósági mátrixot:

$$\mathcal{C}_3 = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 18 \end{bmatrix} \quad (2.288)$$

Megfigyelhetőség ellenőrzése: Egy mátrix rangja elemi mátrixműveletekkel vizsgálható. A teljes rang vizsgálata a mátrix determinánsának kiszámításával is meghatározható: $\det C_3 = 1$. A rendszer tehát irányítható. Írjuk fel a megfigyelhetőségi mátrixot:

$$O_3 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.289)$$

Mivel $\det O_3 = 3$, ezért a rendszer megfigyelhető.

Megjegyezzük, hogy a témával kapcsolatban további példákat találni az irodalomban [11, 1, 9].

3. fejezet

Stabilitás, minőségi tulajdonságok és bizonytalanságok

3.1. Stabilitásvizsgálat

3.1.1. Rendszer stabilitása

Tekintsünk egy lineáris időinvariáns dinamikus rendszert, amelynek bemenőjele $u(t)$, $0 \leq t < \infty$, kimenőjele pedig $y(t)$, $0 \leq t < \infty$. Adott a rendszer $w(t)$ súlyfüggvénye, illetve ennek \mathcal{L} -transzformáltja: $G(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$. A bemenet/kimenet kapcsolatot zérus kezdeti feltétele mellett az alábbi konvolúciós integrál adja meg:

$$y(t) = \int_0^t w(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

Feltettük, hogy a rendszer a kezdeti időpontban nyugalmi állapotban van. Ezután feltehetjük a kérdést, hogy mi a feltétele annak, hogy ha $u(t) > 0$ gerjesztés éri a rendszert, és az $u(t)$ valamilyen tulajdonsággal rendelkezik, milyen feltételek esetén rendelkezik a kimenőjel is ugyanilyen tulajdonsággal.

3.1. Tétel. *Egy lineáris időinvariáns dinamikus rendszer stabilis akkor és csak akkor, ha*

1. *A rendszer súlyfüggvénye abszolút integrálható,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|dt < \infty \quad (3.2)$$

2. *A rendszer $G(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$ átviteli függvényének pólusai a baloldali komplex félsíkon helyezkednek el, azaz*

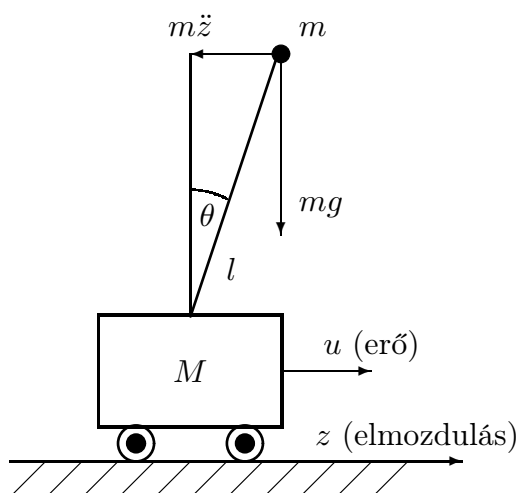
$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad \forall i, \quad (3.3)$$

ahol p_i a $G(s)$ pólusa.

3. A súlyfüggvény határértéke zérus, azaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0. \quad (3.4)$$

3.1. Példa. Az inverz inga egy M tömegű kocsira rögzített csapágyon szabadon elforgó rúd, amelynek m tömege a rúd felső végére van redukálva.



3.1. ábra. Nyquist stabilitási kritérium

Megoldás:

A rúd $\Theta(s)$ szögelfordulása a következőképpen függ az $U(s)$ gerjesztő erőtől:

$$\Theta(s) \approx \frac{1}{s^2 - g/l} U(s). \quad (3.5)$$

A inverz inga részletes modellje megtalálható például a [8] könyvben. Az átviteli függvény pólusai:

$$p_1 = \sqrt{g/l}, \quad p_2 = -\sqrt{g/l}. \quad (3.6)$$

A p_1 pólus a jobboldali komplex félsíkra esik, tehát az inverz inga labilis.

3.2. Példa. A p paraméter milyen értékei esetén lesz stabil az alábbi állapotter reprezentáció?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & p \\ p & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.7)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (3.8)$$

Megoldás:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s + 1 & -p \\ -p & s + 4 \end{bmatrix} = s^2 + 5s - p^2 + 4 \quad (3.9)$$

$$s_{1,2} = -2.5 \pm 0.5\sqrt{9 + 4p^2} \quad (3.10)$$

Stabil, ha mindkét pólus negatív valós értékű.

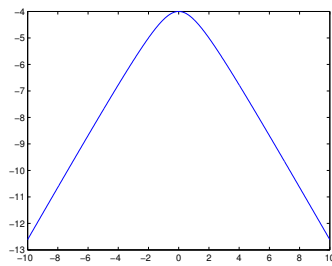
1. eset

$$p_1 = -2.5 - 0.5\sqrt{9 + 4p^2} \quad (3.11)$$

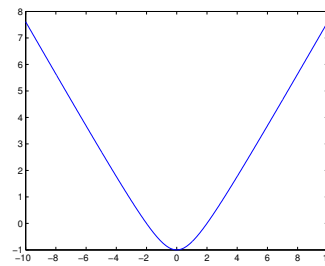
$$-5 - \sqrt{9 + 4p^2} < 0 \quad (3.12)$$

$$-5 < \sqrt{9 + 4p^2} \quad (3.13)$$

ami mindig teljesül, azaz p bármely értékére p_1 negatív értékű.



(a) 1. eset



(b) 2. eset

3.2. ábra. Nyquist stabilitási kritérium

2. eset

$$p_2 = -2.5 + 0.5\sqrt{9 + 4p^2} \quad (3.14)$$

$$-5 + \sqrt{9 + 4p^2} < 0 \quad (3.15)$$

$$\sqrt{9 + 4p^2} < 5 \quad (3.16)$$

A negatív valós érték feltétele, hogy $-2 < p < 2$ legyen.

3.1.2. Zárt rendszer stabilitása

A szabályozó tervezésénél mindig biztosítani kell, hogy akár stabilis, akár labilis a szabályozott folyamat, a zárt rendszer stabilis legyen. A zárt rendszer átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{G_E(s)}{1 + G_H(s)}, \quad (3.17)$$

ahol $G_E(s)$ az előrevezető ág átviteli függvénye és $G_H(s)$ a hurokátviteli függvény.

A zárt rendszer stabilis akkor és csak akkor, ha pólusai a baloldali komplex számsíkon helyezkednek el, tehát az

$$1 + G_H(s) = 0 \quad (3.18)$$

egyenlet p_1, \dots, p_n gyökereire teljesül a $\operatorname{Re} p_i < 0, i = 1, \dots, n$ feltétel, ahol n a $G_H(s)$ pólusainak száma.

A $G_H(s)$ a hurokátviteli függvény pólusai alapján vizsgálhatjuk a zárt rendszer stabilitását. Pólusok és a stabilitás kapcsolata:

- Ha $p_i < 0$, akkor a zárt rendszer stabilis
- Ha $p_i = 0$, határeset
- Ha $p_i > 0$, akkor a zárt rendszer labilis

ahol p_i a zárt rendszer pólusa.

A Nyquist szabályozási kritérium a $G_H(i\omega)$ hurokátviteli frekvencia függvény alapján képes a zárt rendszer stabilitásáról képet adni.

Rajzoljuk meg a frekvencia függvényt a $-\infty < \omega < \infty$ tartományra. A negatív frekvenciákra a függvény a pozitív frekvenciákra ismert függvénynek a valós tengelyre vett tükörképe lesz.

3.2. Tétel (Nyquist kritérium). *Ha a felnyitott hurok $G_H(i\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ frekvencia függvénye a növekvő frekvenciák irányába haladva*

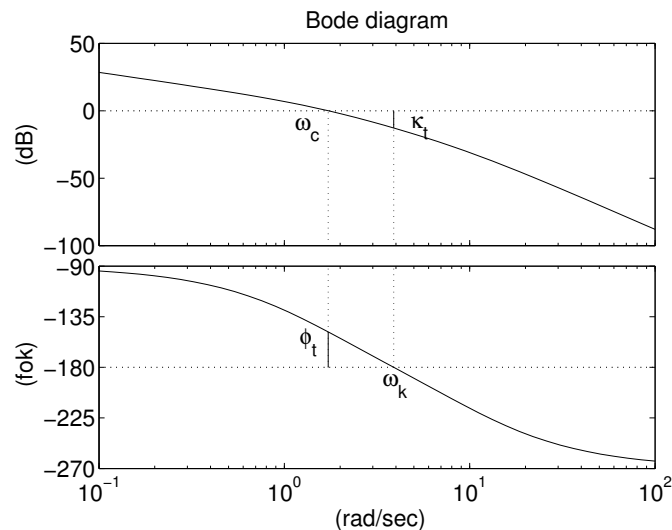
- *Ha nem veszi körül a -1 pontot, akkor a rendszer stabilis*
- *Ha átmegy a -1 ponton, akkor a rendszer a stabilitás határán van.*
- *Ha körülveszi a -1 pontot, akkor a rendszer labilis.*

Ha a $G_H(i\omega)$ frekvencia függvény a növekvő frekvenciák irányába haladva nem veszi körül a -1 pontot, akkor a zárt rendszer rendszer stabilis. Ha a $G_H(i\omega)$ frekvencia függvény épp átmegy a komplex számsík -1 pontján, akkor a G_H frekvencia függvénynek ω_0 körfrekvencián a zárt rendszerben csillapítatlan lengések keletkeznek. Ekkor a zárt rendszer a stabilitás határán van.

Bode-stabilitási kritérium

A stabilitás analízist a Bode diagram alapján is elvégezhetjük, ezek az ún. Bode-stabilitási kritériumok.

- Ha -20 dB/dek-dal metszi a $\log \omega$ tengelyt, akkor a zárt rendszer stabilis.
- Ha -40 dB/dek-dal metszi a $\log \omega$ tengelyt, akkor a vágási frekvencián érvényes fázisszög értéke dönt a zárt rendszer stabilitásáról. Ha $\varphi(\omega_c) > -180^\circ$, akkor a zárt rendszer stabilis, míg ha $\varphi(\omega_c) < -180^\circ$, akkor a zárt rendszer labilis.
- Ha -60 dB/dek-dal metszi a $\log \omega$ tengelyt, akkor a zárt rendszer labilis.



3.3. ábra. Nyquist stabilitási kritérium

Fázistartalék és erősítési tartalék

A zárt szabályozási körök stabilitásával kapcsolatban bevezetjük a φ_t fázistartalék fogalmát: $\varphi_t = \pi - \varphi(\omega_c)$,

- Ha $\varphi_t > 0$, akkor a zárt rendszer stabilis
- Ha $\varphi_t = 0$, határeset
- Ha $\varphi_t < 0$, akkor a zárt rendszer labilis

A zárt szabályozási körök stabilitásával kapcsolatban bevezetjük a κ_t erősítési tartalék fogalmát. Azt mutatja, hogy mennyivel tudjuk még növelni a statikus körerősítést, úgy, hogy épp a stabilitás határára kerüljön a rendszer. Erősítési tartalék és a stabilitás kapcsolata:

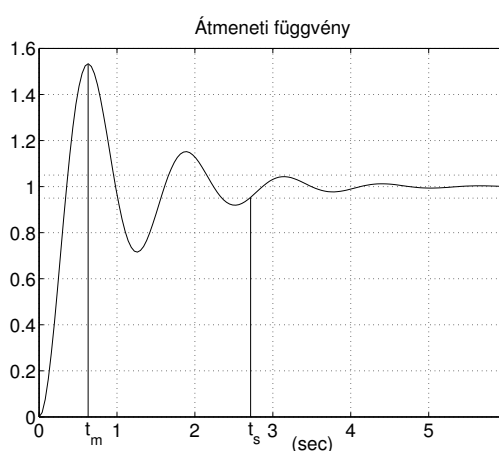
- Ha $\kappa_t < 1$, akkor a zárt rendszer stabilis
- Ha $\kappa_t = 1$, határeset
- Ha $\kappa_t > 1$, akkor a zárt rendszer labilis

3.2. Rendszerek minőségi jellemzőinek vizsgálata

A minőségi kritériumok vizsgálata mindig a szabályozott rendszer (zárt kör) vizsgálatával történik: A zárt rendszer átviteli függvénye:

$$G_C = \frac{G_E}{1 + G_H} \quad (3.19)$$

ahol G_H a hurokátviteli függvény és G_E az előrevezető ág eredő átviteli függvénye. Az alábbiakban az időtartományi és frekvencia tartományi jellemzőket soroljuk fel.



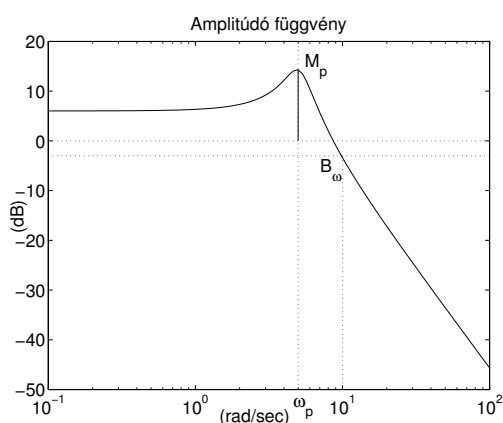
3.4. ábra. Időtartományi jellemzők

Időtartományi jellemzők

- A rendszer állandósult állapotban felvett értékét beállási értéknek nevezzük, amit y_{ss} -sel jelölünk.
- A szabályozási idő (t_s) annak időtartama, amely eltelte után a rendszer kimenete a beállási értéktől 5%-nál nagyobb mértékben nem tér el.
- A szabályozási eltérés a megkívánt érték és az állandósult állapotbeli érték különbsége: $y_{ss} - y_d$,
- túllendülési idő (t_m): a kimeneti jel maximális értékének időpontja,
- túllendülés mértéke (p): százalékban kifejezett viszonyszám, ami a maximális és beállási érték közötti különbség beállási értékhez való viszonyát fejezi ki: $p = \frac{y_{\max} - y_{ss}}{y_{ss}} \cdot 100\%$

Frekvencia tartományi jellemzők

- rezonancia csúcs M_p : az amplitúdó görbe maximális értéke,
- rezonancia frekvencia ω_p : a rezonancia csúcshoz tartozó frekvencia érték,



3.5. ábra. Időtartományi jellemzők

- A sávszélesség fogalmát a kiegészítő érzékenységi függvény segítségével a következőképp adhatjuk meg. A rendszer sávszélessége az a $\omega \leq \omega_B$ frekvencia tartomány, amelyben a $|T(i\omega)|$ kiegészítő érzékenységi függvény Bode diagramja -3 dB-re csökken.

3.2.1. Érzékenységi függvény

Vizsgáljuk a zárt rendszer kimenetét különböző bemenetek esetén:

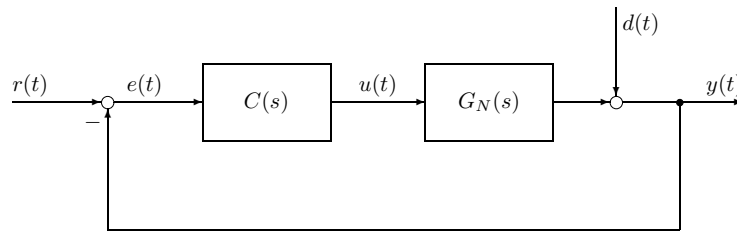
$$Y(s) \Big|_{D \equiv 0} = \frac{G_H(s)}{1 + G_H(s)} R(s) = T(s) R(s) \quad (3.20)$$

$$Y(s) \Big|_{R \equiv 0} = \frac{1}{1 + G_H(s)} D(s) = S(s) D(s) \quad (3.21)$$

ahol $G_H(s) = G(s)C(s)$. Bevezetjük a szabályozási körben értelmezett S érzékenységi függvényt és a T kiegészítő érzékenységi függvényt:

$$T(s) = \frac{G_H(s)}{1 + G_H(s)} \quad (3.22)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_H(s)} \quad (3.23)$$



3.6. ábra. Időtartományi jellemzők

Az érzékenységi függvény azt mutatja meg, hogy a zavaró jellemző hogyan befolyásolja a zárt rendszer kimenetét.

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_H(s)} \quad (3.24)$$

Az $S(i\omega)$ érzékenységi függvény közelítő ábrázolását Bode-diagramon a felnyitott hurok $G_H(i\omega)$ frekvenciafüggvénye alapján a következőképp végezhetjük el.

Az érzékenységi függvény definíció szerint:

$$|S(i\omega)| = \left| \frac{1}{1 + G_H(i\omega)} \right| \quad \forall \omega. \quad (3.25)$$

Kis és nagy körfrekvenciákra a következő közelítést használhatjuk:

$$|S(i\omega)| \approx \begin{cases} \frac{1}{|G_H(i\omega)|} & \text{ha } |G_H(i\omega)| \gg 1 \quad \text{azaz ha } \omega \ll \omega_c \\ 1 & \text{ha } |G_H(i\omega)| \ll 1 \quad \text{azaz ha } \omega \gg \omega_c \end{cases} \quad (3.26)$$

A kiegészítő érzékenységi függvény a referencia jel és a kimenő jel közötti átviteli függvény.

$$T(s) = \frac{G_H(s)}{1 + G_H(s)}. \quad (3.27)$$

A $T(i\omega)$ kiegészítő érzékenységi függvény közelítő ábrázolását Bode-diagramon a felnyitott hurok $G_H(i\omega)$ frekvenciafüggvénye alapján a következőképp végezhetjük el. A kiegészítő érzékenység függvény definíció szerint:

$$|T(i\omega)| = \left| \frac{G_H(i\omega)}{1 + G_H(i\omega)} \right| \quad \forall \omega, \quad (3.28)$$

Kis és nagy körfrekvenciákra a következő közelítést használhatjuk:

$$|T(i\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \text{ha } |G_H(i\omega)| \gg 1 \\ |G_H(i\omega)| & \text{ha } |G_H(i\omega)| \ll 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

Az érzékenységi és kiegészítő érzékenységi függvények közötti összefüggés az alábbi:

$$S(s) + T(s) = 1. \quad (3.30)$$

3.2.2. Aszimptotikus jelkövetés

Követő szabályozásoknál a kimenőjelnek a referencia jeltől való eltérését követési hibának nevezzük:

$$e(t) = y(t) - r(t). \quad (3.31)$$

Vizsgáljuk meg, hogy adott $r(t)$ referencia jelre aszimptotikusan mekkora lesz az eltérés, azaz a követési hiba. A követési hiba jel és a referencia jel Laplace-transzformáltjai közötti kapcsolatot az $S(s)$ érzékenységi függvény írja le. Alkalmazva a határérték tételeket:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)R(s). \quad (3.32)$$

Vizsgálhatjuk a tipikus referencia jelek, mint egységugrás vagy egység sebesség ugrás jelek aszimptotikus követését.

1. eset Egységugrás bemenetre adott válaszfüggvény

Vizsgáljuk meg a válaszfüggvényt $r(t) = 1(t)$, $R(s) = 1/s$ bemenetre. Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_H(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_H(s)}. \quad (3.33)$$

Ha $G_H(s)$ arányos jellegű, azaz ha $G_H(s) = G_{H0}(s)$, akkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_{H0}(s)} = \frac{1}{1 + K}, \quad (3.34)$$

ahol K a hurokerősítési tényező. A követési hiba értéke függ a hurokerősítési tényező értékétől.

Ha $G_H(s)$ integráló jellegű, azaz ha $G_H(s) = G_{H0}(s)/s$, $G_{H0}(s)|_{s=0} < \infty$ alakú, akkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_{H0}(s)/s} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + G_{H0}(s)} = 0, \quad (3.35)$$

tehát a követési hiba aszimptotikusan zérus.

Ha $G_H(s)$ 2 típusú (kétszeres integrátort tartalmaz), azaz ha $G_H(s) = G_{H0}(s)/s^2$, $G_{H0}(s)|_{s=0} < \infty$ alakú, akkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_{H0}(s)/s^2} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2 + G_{H0}(s)} = 0, \quad (3.36)$$

tehát a követési hiba aszimptotikusan zérus.

2. eset Egységsebesség bemenetre adott válaszfüggvény

Vizsgáljuk meg a válaszfüggvényt $r(t) = t(t)$, $R(s) = 1/s^2$ bemenetre. Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G_H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + G_H(s)}. \quad (3.37)$$

Ha $G_H(s)$ arányos jellegű, azaz ha $G_H(s) = G_{H0}(s)$, akkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + G_{H0}(s)} = \infty, \quad (3.38)$$

azaz a kimenet nem korlátos.

Ha $G_H(s)$ integráló jellegű, azaz ha $G_H(s) = G_{H0}(s)/s$, $G_{H0}(s)|_{s=0} < \infty$ alakú, akkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + G_{H0}(s)/s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s + G_{H0}(s)} = \frac{1}{1 + K}, \quad (3.39)$$

tehát a követési hiba aszimptotikusan nem zérus értékhez tart.

3.2.3. Zavarkompenzálás

Az aszimptotikus zavarkompenzálást az aszimptotikus alap- vagy referencia jelkövetéshez hasonlóan vizsgálhatjuk. Tipikus zavaró jelek, mint egységugrás, egység sebességugrás jelek, a zavaró jel hatását a kimenő jelben zérus referencia jel feltételezése mellett vizsgáljuk. Ehhez felírjuk a kimenő jel és a zavaró jel Laplace - transzformáltjai közötti összefüggéseket és alkalmazzuk a határérték tételeket.

A kimenő és a zavaró jel közötti átviteli függvény az $S(s)$ érzékenységi függvény. Ennek alapján a kimenőjel Laplace - transzformáltja

$$Y(s) \Big|_{R=0} = S(s)D(s) = \frac{1}{1 + G_H(s)} D(s). \quad (3.40)$$

Alkalmazva a határérték tételt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \Big|_{r=0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_H(s)} D(s). \quad (3.41)$$

Legyen például $d(t) = 1(t)$, $D(s) = 1/s$.

1. eset Arányos rendszer vizsgálata

Vizsgáljuk meg az arányos rendszer viselkedését. A hurokátviteli függvény alakja $G_H(s) = G_{H0}(s)$. Ekkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_{H0}(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K} \quad (3.42)$$

ahol K a hurokerősítés tényező. Tehát a zavaró jel hatása megjelenik a kimeneten.

2. eset Integráló rendszer vizsgálata

Legyen például $d(t) = 1(t)$, $D(s) = 1/s$ és tegyük fel, hogy a hurokátviteli függvény integráló alakú, azaz $G_H(s) = G_{H0}(s)/s$. Ekkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s}{s + G_{H0}(s)} \frac{1}{s} = 0 \quad (3.43)$$

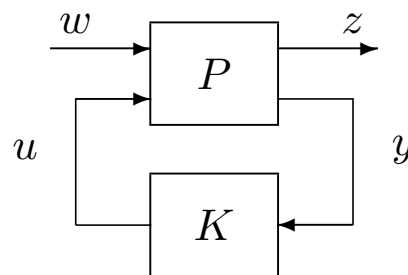
tehát a zavaró jel hatását a rendszer aszimptotikusan teljesen elnyomja, kompenzálja. Megjegyezzük, hogy a 2-típusú integráló tulajdonságú rendszer is kompenzálja a hibajelet.

A témával kapcsolatos további részletes elemzéseket találni az irodalomban [9, 20].

3.3. Bizonytalanság

3.3.1. P-K struktúra

Szabályozott rendszer kon feladatait a z minőségi jell. A szabályozó az y mért je A szabályozótervezés célj esetére.



3.7. ábra. P-K struktúra

A bemenő és kimenő jelek alapján a P rendszer a következőképpen bontható fel:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

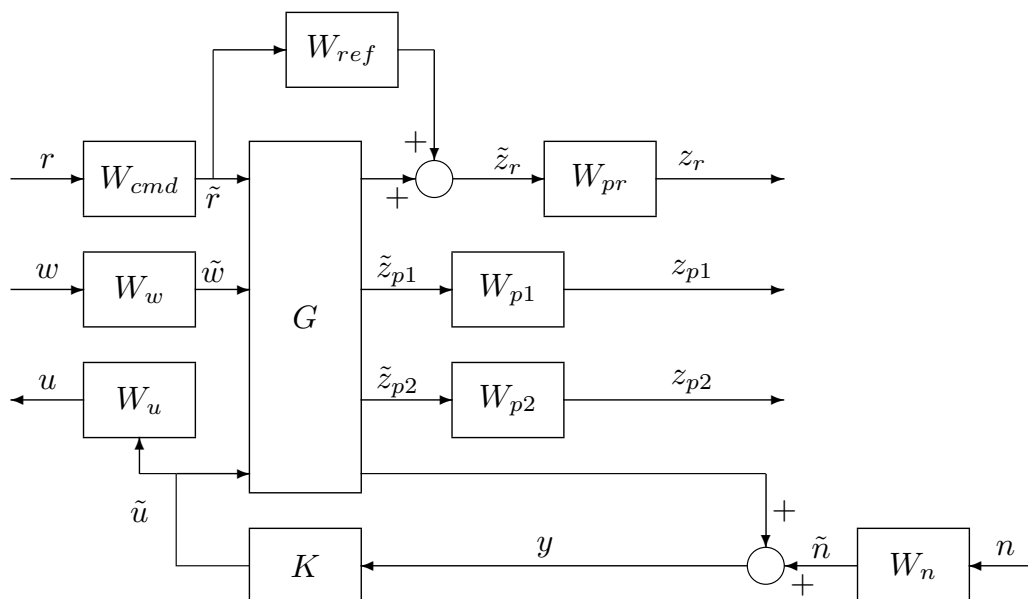
Az u és y jelek közötti kapcsolat miatt ($u = -Ky$ a visszacsatolás következtében), a zavarás és a minőségi jelek közötti kapcsolat a következő:

$$T_{zd} = P_{11} - P_{12}(I + KP_{22})^{-1}KP_{21} \quad (3.45)$$

Levezetés: $z = P_{11}w + P_{12}u$, ahol $u = -Ky = -K(P_{21}w + P_{22}u)$. Ebből $u = -(I + KP_{22})^{-1}KP_{21}w$ és $z = (P_{11} - P_{12}(I + KP_{22})^{-1}KP_{21})w$.

Minőségi jellemzők specifikálása:

- Minőségi jellemzők specifikálása (z_r, z_{p1}, z_{p2})
- Referenciajel (r)
- Zavarások/mérési zajok (w, n)
- Szabályozójel (u)



3.8. ábra. Példa egy súlyozási stratégiára

A súlyfüggvények szerepe az egyes átviteli függvények bemenő és kimenő jeleinek skálázása.

Jelkövetési feladatok:

- Referenciajel
 - A referenciajelre alkalmazott W_{cmd} súlyfüggvény szerepe a valódi \tilde{r} referenciajel jel normalizálása. A súlyozás a normalizált r referencia jelből \tilde{r} valódi referencia jelet állít elő. Egy tipikus jelkövető irányítás tervezésekor W_{cmd} konstans az alsó frekvencián és levág a felső frekvencia tartományban.
- Követési specifikáció
 - W_{ref} a szabályozott rendszer ideális modelljét reprezentálja. Ezt a modellt választjuk meg a követési feladattal összhangban.
 - Például a jelkövetéstől azt várjuk, hogy jó csillapítási tulajdonságokkal rendelkezzen. Egy másodrendű átviteli függvényben ω és ζ paramétereket specifikáljuk: $W_{ref} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$.
- Követés minősítése

- A követés minősítésére alkalmazzuk a W_{pr} súlyfüggvényt. A követési hiba általában kis frekvenciákon pontos, míg magasabb frekvenciákon pontatlabb.

Minőségi jellemzők:

- A szabályozott rendszerrel szemben általában több minőségi specifikációt írunk elő: W_{p1} és W_{p2} súlyfüggvények a következő minőségi jellemzőkre vonatkozhatnak:
 - változó, amelyikre a minőségi jellemzőt specifikáltuk (elmozdulás, sebesség, gyorsulás, stb.)
 - változó, amelyikre korlátokat kell figyelembe venni
 - zavarás elnyomást kell biztosítani.

Irányítójel, zavarás:

- W_u súlyozással büntetjük az irányítást, azaz minél kisebb beavatkozással kívánjuk az előírt minőségi specifikációkat biztosítani
- W_w súlyozással határozzuk meg, hogy a zavarások várhatóan hogyan hatnak a rendszerre
- W_n súlyozással írjuk le az érzékelő hibákat.

A témával kapcsolatos további részletes elemzéseket találni az irodalomban [7, 22, 21].

3.3.2. Modell bizonytalanság vizsgálata

A dinamikus jelenségek leírására (közönséges/parciális) differenciál- egyenleteket használunk. Az egyenletek alakja/struktúrája, a bennük szereplő paraméterek általában nem ismertek teljesen pontosan vagy ha azok időben változnak, a változásuk nem ismert általában.

A valódi rendszer modelljének pontos alakja a gyakorlati feladatokban nem ismert, s emiatt helyette annak közelítő, úgynevezett névleges (nominális) modelljét használjuk. A modell és a valós rendszer közötti eltérés több tényező okozza:

- Az eltérés oka egyrészt modellezési eljárás következménye (pl. a felharmonikusokat, illetve a magasabb fokszámú együtthatókat elhanyagoljuk),
- másrészt a rendszer működése során bekövetkező változások (pl. a normál üzem során a modell paraméterei változnak, az anyag kifáradás során változnak a rendszer paraméterei, sőt akár a struktúrája).

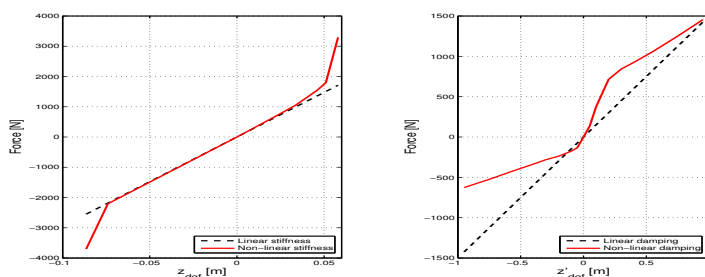
- A rendszerekre külső zavarás hat. Még ha tudjuk is a hatásmechanizmust, a zavarás maga (nagysága) előre nem ismert és nincs is rá hatásunk.
- Nem mindig tudjuk kiadni azt az irányítójelet, amit szeretnénk.
- A mérések nem pontosak – mérési zaj.

Célszerű megkülönböztetni a zavarásokat az állandóan jelen levő bizonytalanságtól. A rendszerre ható külső zavarás, az irányítójelet hibája, a mérési zaj. Az irányítás célja, hogy a zavarások hatását csökkentse a mérnöki szempontból érdekes (esetleg fiktív) kimenő jelekre. A modellben meglévő parametrikus bizonytalanságok és a nem modellezett dinamika hatása a modell és a rendszer eltéréseként, azaz a modell bizonytalanságaként értelmezhető. Egy irányítás megtervezésekor ezt a bizonytalanságot feltétlenül figyelembe kell venni. Az irányítástervezés célja stabilitás/performance garantálása adott nagyságú feltételezett bizonytalanság mellett.

A témával kapcsolatos további részletes elemzéseket találni az irodalomban [7, 22, 21].

3.3. Példa. Egy gépjármű felfüggesztési modelljének megkonstruálásakor több tényezőt kell figyelembe venni.

- a rugózott tömeg változik az utasok tömegének módosulásával,
- a felfüggesztés rugó vagy csillapítás karakterisztikája módosul,
- kerékabroncs dinamikája változik.



3.9. ábra. Példa egy felfüggesztési rendszer modellezésére

3.4. Példa. A modellezés során a nemlinearitások hatásait célszerű figyelembe venni. A mechanikai rendszerek irányítására alkalmazott lineáris irányítási algoritmusokkal megvalósított szabályozási rendszer tulajdonságait nagymértékben leronthatják a mechanikai rendszerben jelenlevő (nemfolytonos) nemlinearitások. Néhány jellemző példa: szaturáció, surlódás, holtsáv, kotyogás, hiszterézis.

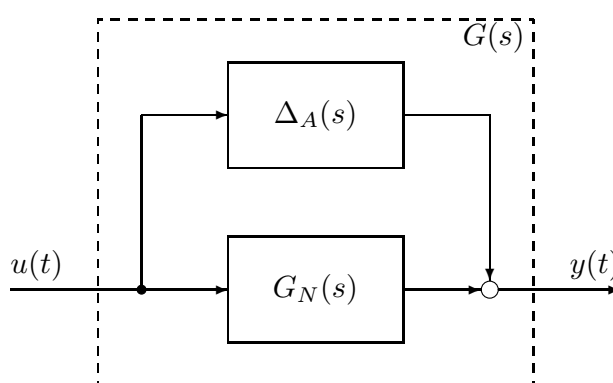
3.3.3. Nem modellezett dinamika

A modell és a rendszer közötti hiba meghatározására általános megoldás nincs, különböző szerkezetű lehetőségek közül az additív, illetve a multiplikatív hiba struktúra a legismertebb.

A $G(s)$ aktuális rendszer és a $G_N(s)$ névleges rendszer közötti eltérést additív hiba struktúrának nevezzük, ha a következő összefüggés teljesül:

$$G(s) = G_N(s) + \Delta_A(s), \quad (3.46)$$

ahol $\Delta_A(s)$ az additív hiba átviteli függvénye. Az additív hiba ismeretlen. A $\Delta_A(s)$



3.10. ábra. Az additív bizonytalanság struktúrája

ismeretlen méretű additív hiba átviteli függvényt egy ismert korláttal rendelkező Δ bizonytalansággal kifejezhetjük és frekvencia függvényét Nyquist diagramon ábrázolhatjuk:

$$\Delta_A(s) = \Delta(s)w(s), \quad (3.47)$$

ahol w skalár függvény. Az aktuális $G(i\omega)$ rendszer Nyquist diagramja a névleges $G_N(i\omega)$ rendszer Nyquist diagramjával és a bizonytalanságot leíró $w(i\omega)$ függvénnyel illusztrálható.

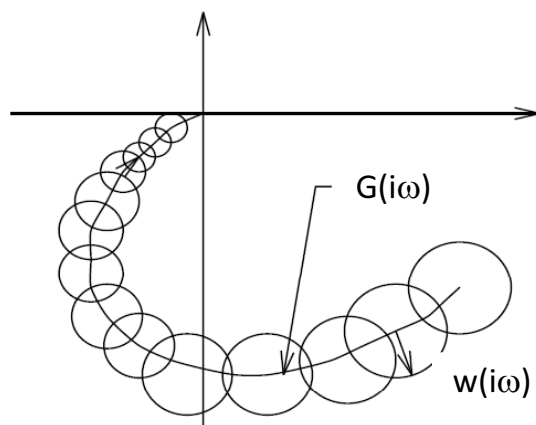
A $G(s)$ aktuális rendszer és a $G_N(s)$ névleges rendszer közötti eltérést multiplikatív hiba struktúrájának nevezzük, ha a következő összefüggés teljesül:

$$G(s) = G_N(s)(1 + \Delta_M(s)),$$

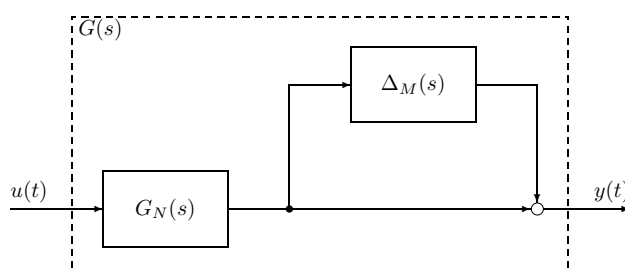
ahol $\Delta_M(s)$ a multiplikatív hiba átviteli függvénye.

A $\Delta_M(s)$ ismeretlen méretű additív hiba átviteli függvényt egy ismert korláttal rendelkező Δ bizonytalansággal kifejezhetjük és frekvencia függvényét Bode diagramon ábrázolhatjuk:

$$\Delta_M(s) = \Delta(s)w(s), \quad (3.48)$$



3.11. ábra. Bizonytalanság a Nyquist diagramon



3.12. ábra. A multiplikatív bizonytalanság struktúrája

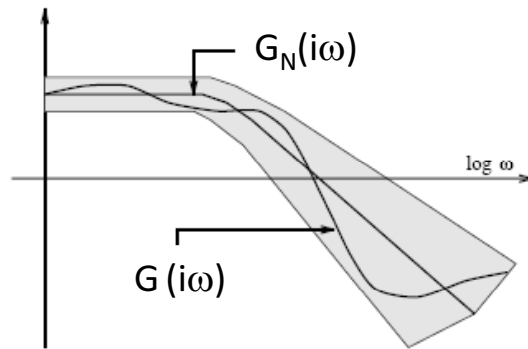
ahol ω skalár függvény. Az aktuális $G(i\omega)$ rendszer Bode diagramja a névleges $G_N(i\omega)$ rendszer Bode diagramjával és a bizonytalanságot leíró $w(i\omega)$ függvénnyel illusztrálható.

3.3.4. Parametrikus bizonytalanság

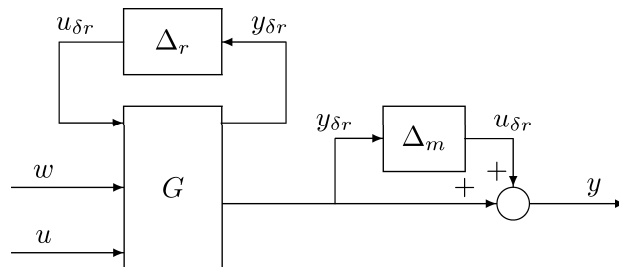
Gyakran a bizonytalanságok egy része a rendszert leíró modell paramétereinek változásával is megfogalmazható. Például az A rendszermátrixban lévő k rugóállandó és b csillapítási együtthatók változnak. Ezek a paraméterek a mátrix több elemében is előfordulhatnak.

A bizonytalan rugóállandó paramétere a következőképpen modellezhető:

$$k_s = \bar{k}_s(1 + d_{ks}\delta_{k_s}), \quad (3.49)$$

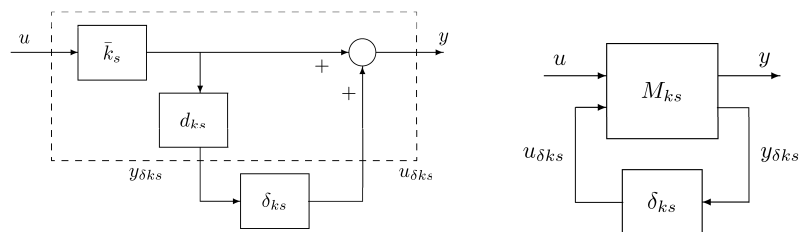


3.13. ábra. Bizonytalanság a Bode diagramon



3.14. ábra. Bizonytalanságok modellezése

ahol \bar{k}_s a névleges rugóállandó, d_{k_s} a névleges értéktől való eltérést mutatja, míg δ_{k_s} paraméterről azt tudjuk, hogy a $[-1 \ 1]$ intervallumba esik. A bizonytalan rugóállandó $M - \Delta$ struktúrája a 3.15 ábrán látható.



3.15. ábra. A bizonytalan rugóállandó modellezése

$$k_s = \bar{k}_s(1 + d_{k_s}\delta_{k_s}) = \bar{k}_s + \bar{k}_s d_{k_s}\delta_{k_s}$$

A jelek közötti kapcsolatok:

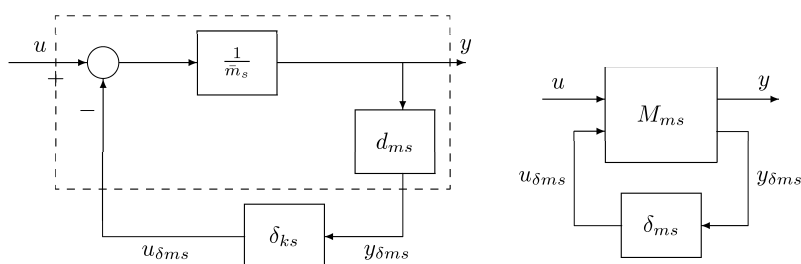
$$\begin{bmatrix} y \\ y_{\delta ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_s & 1 \\ d_{ks}\bar{k}_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_{\delta ks} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

ahol $u_{\delta ks} = \delta_{ks}y_{\delta ks} = \delta_{ks}d_{ks}\bar{k}_s u$. Emiatt $y = (\bar{k}_s + \delta_{ks}d_{ks}\bar{k}_s)u$. Az ismert komponenseket tartalmazó blokk: $M_{ks} = \begin{bmatrix} \bar{k}_s & 1 \\ d_{ks}\bar{k}_s & 0 \end{bmatrix}$

Ha egy bizonytalan paraméter a nevezőben van, akkor a következőképpen járunk el.

$$\frac{1}{m_s} = \frac{1}{\bar{m}_s(1 + d_{ms}\delta_{ms})} \quad (3.51)$$

ahol \bar{m}_s a névleges tömeg, d_{ms} a névleges értéktől való eltérést mutatja, míg δ_{ms} paraméterről azt tudjuk, hogy a $[-1 \ 1]$ intervallumba esik. A bizonytalan rugóállandó $M - \Delta$ struktúrája a 3.16 ábrán látható.



3.16. ábra. A bizonytalan tömeg modellezése

$$\frac{1}{m_s} = \frac{1}{\bar{m}_s(1 + d_{ms}\delta_{ms})} = \frac{1}{\bar{m}_s} - \frac{d_{ms}}{\bar{m}_s}\delta_{ms}(1 + d_{ms}\delta_{ms})^{-1} \quad (3.52)$$

A jelek közötti kapcsolatok:

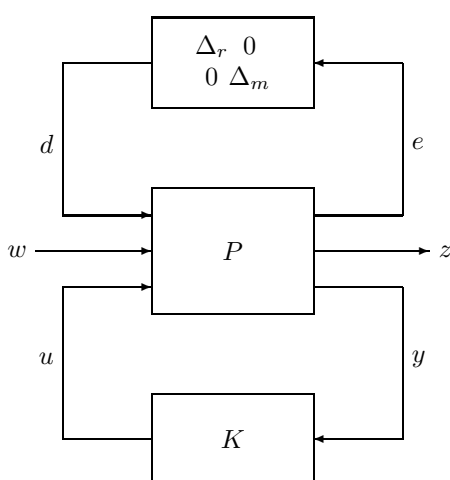
$$\begin{bmatrix} y \\ y_{\delta ms} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}_s} & -\frac{d_{ms}}{\bar{m}_s} \\ 1 & -d_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_{\delta ms} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

ahol $u_{\delta ms} = \delta_{ms}y_{\delta ms}$. Mivel $y_{\delta ms} = u - d_{ms}u_{\delta ms}$, ezért $u_{\delta ms} = (1 + d_{ms}\delta_{ms})^{-1}\delta_{ms}u$. Emiatt $y = \frac{1}{\bar{m}_s}u - \frac{d_{ms}}{\bar{m}_s}u_{\delta ms} = (\frac{1}{\bar{m}_s} - \frac{d_{ms}}{\bar{m}_s}\delta_{ms}(1 + d_{ms}\delta_{ms})^{-1})u$. Az ismert komponenseket tartalmazó blokk: $M_{ms} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}_s} & -\frac{d_{ms}}{\bar{m}_s} \\ 1 & -d_{ms} \end{bmatrix}$.

3.4. M- Δ struktúra

A szabályozott rendszer komponensei az előzőek alapján a modell és a szabályozó, valamint a minőségi specifikációkkal és bizonytalanságokkal kapcsolatos információk. A 3.17 ábrán látható úgynevezett $P-K-\Delta$ struktúrájú modellt használjuk a szabályozó tervezéséhez.

$$\begin{bmatrix} e \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.54)$$



3.17. ábra. $P-K-\Delta$ struktúra

Ha figyelembe vesszük a szabályozó hatását, azaz az irányítójel és a mért jel közötti kapcsolatot $u = Ky$, akkor az úgynevezett M- Δ struktúrához jutunk. A 3.18 ábrán látható $M-\Delta$ modellt a szabályozott rendszer elemzéséhez használjuk.

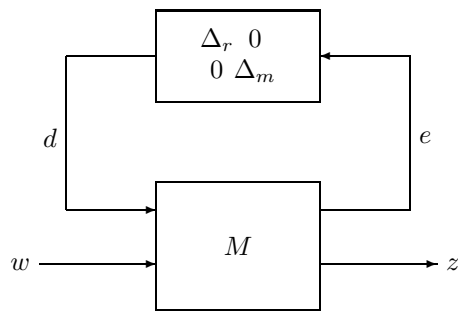
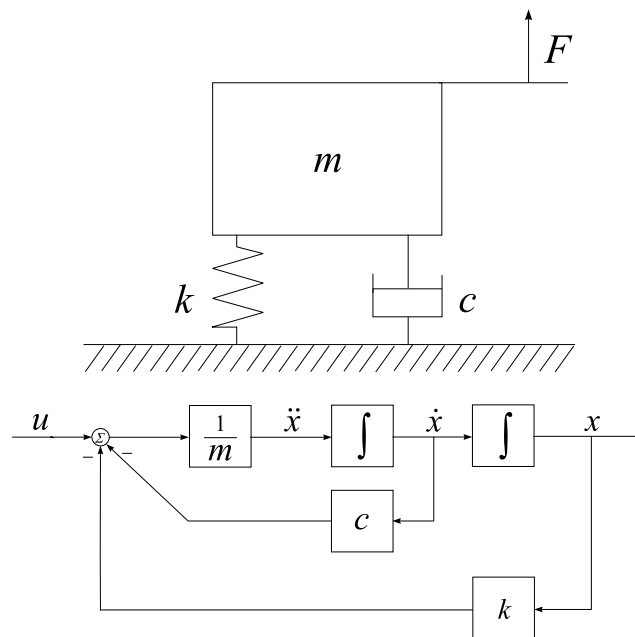
$$\begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ w \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

3.5. Példa. Tekintsük az 3.19 ábrán látható tömeg-csillapító-rugó rendszert (m tömeg, k csillapítási együttható, c rugóállandó).

Differenciálegyenlete:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (3.56)$$

ahol x a tömeg elmozdulása, F erő a rendszer gerjesztése.

3.18. ábra. $M - \Delta$ struktúra

3.19. ábra. Egy lengőrendszer dinamikájának modellezése

A blokkdiagram a rendszer névleges modelljét illusztrálja. A valós rendszerben a fizikai paraméterek egyrészt nem ismertek pontosan, másrészt üzem közben változnak. Ismerjük viszont ezek átlagos értékét és becslésünk van az átlagos értéktől való eltéré-

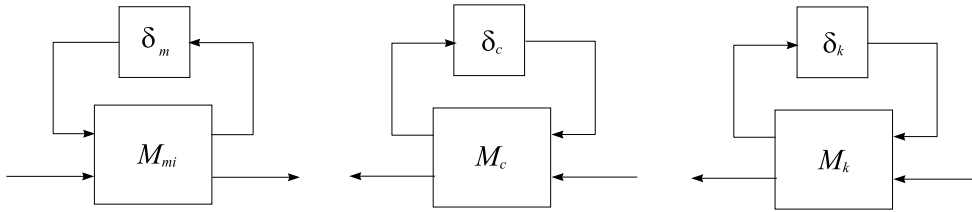
sükre.

$$m = \bar{m}(1 + p_m \delta_m) \quad (3.57)$$

$$c = \bar{c}(1 + p_c \delta_c) \quad (3.58)$$

$$k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k) \quad (3.59)$$

A példában legyenek $\bar{m} = 3$, $\bar{c} = 1$, $\bar{k} = 2$ a névleges értékek, $p_m = 0.4$, $p_c = 0.2$, $p_k = 0.3$ és $-1 \leq \delta_m, \delta_c, \delta_k \leq 1$ reprezentálja, hogy a rendszer modelleje, csillapítása és rugóállandója rendre 40%, 20%, 30% bizonytalanságú. A parametrikus



3.20. ábra. A parametrikus bizonytalanságok modellezése

bizonytalanságok a következőképpen írhatók fel:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\bar{m}} - \frac{p_m}{\bar{m}} \delta_m (1 + p_m \delta_m)^{-1} = F_U(M_m, \delta_m) \quad (3.60)$$

$$c = \bar{c}(1 + p_c \delta_c) = F_U(M_c, \delta_c) \quad (3.61)$$

$$k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k) = F_U(M_k, \delta_k) \quad (3.62)$$

ahol $M_m = \begin{bmatrix} -p_m & 1 \\ -p_m/\bar{m} & 1/\bar{m} \end{bmatrix}$, $M_c = \begin{bmatrix} 0 & p_c \bar{c} \\ 1 & \bar{c} \end{bmatrix}$, $M_k = \begin{bmatrix} 0 & p_k \bar{k} \\ 1 & \bar{k} \end{bmatrix}$ Megjegyzés: A kapcsolatokat felső bizonytalanság blokkal vettük figyelembe. A rendszer jelei közötti összefüggések ezek szerint a következőképpen alakulnak:

$$\begin{bmatrix} y_m \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_m & 1 \\ -p_m/\bar{m} & 1/\bar{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ u - v_c - v_k \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ahol

$$\begin{bmatrix} y_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_c \bar{c} \\ 1 & \bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

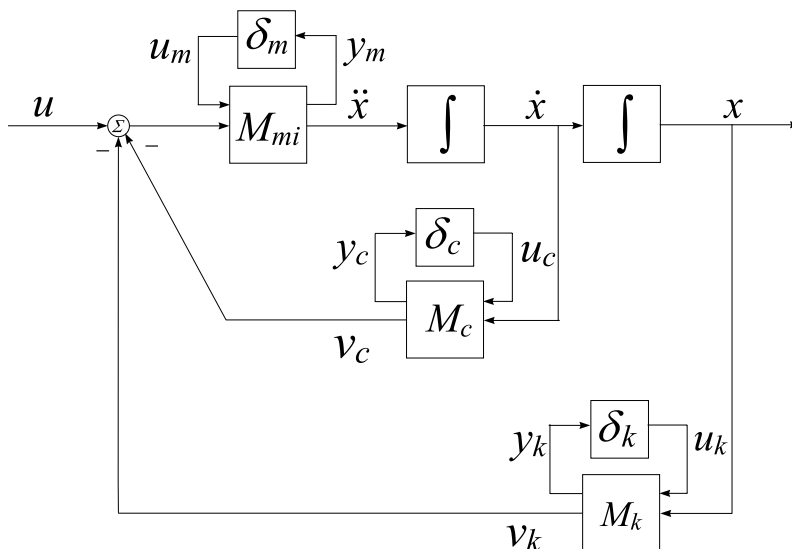
$$\begin{bmatrix} y_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_k \bar{k} \\ 1 & \bar{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ x \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$u_m = \delta_m y_m \quad (3.66)$$

$$u_c = \delta_c y_c \quad (3.67)$$

$$u_k = \delta_k y_k \quad (3.68)$$

továbbá $v_c = u_c + \bar{c}x_2$ és $v_k = u_k + \bar{k}x_1$.



3.21. ábra. Lengőrendszer modellezése parametrikus bizonytalanságokkal

Válasszuk az állapotokat a következőképpen: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$, $y = x_1$, azaz $\dot{x}_2 = \ddot{x} = \ddot{x}_1$.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.69)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{p_m}{\bar{m}}u_m + \frac{1}{\bar{m}}(u - v_c - v_k) \quad (3.70)$$

$$y_m = -p_m u_m + (u - v_c - v_k) \quad (3.71)$$

Ezek után felírhatjuk a parametrikus bizonytalanságokat tartalmazó rendszer modelljét:

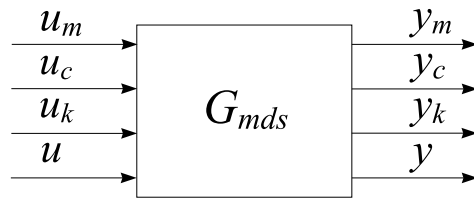
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_m \\ y_c \\ y_k \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} & \frac{-p_m}{\bar{m}} & -\frac{1}{\bar{m}} & -\frac{1}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \\ -k & -\bar{c} & -p_m & -1 & -1 & 1 \\ 0 & p_c \bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_k \bar{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_m \\ u_c \\ u_k \\ u \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

A lengőrendszer modellje $G_{m ds}$ kizárólag az ismert \bar{m} , \bar{k} , \bar{c} névleges paraméterektől és az ismert p_m , p_c , p_k bizonytalansági felső becslésektől függ. Így $G_{m ds}$ ismert és nem

tartalmaz bizonytalanságokat.

$$G_{mds} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\text{ahol } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -p_m & \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix},$$



3.22. ábra. Lengőrendszer modellje

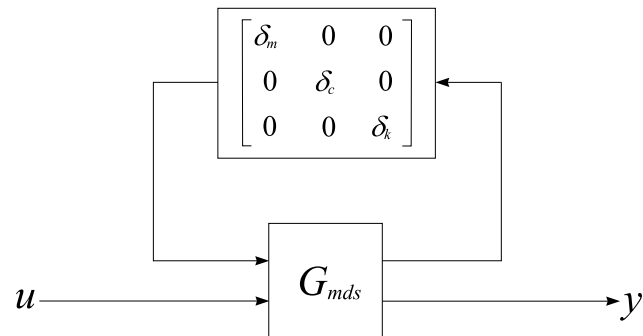
$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \\ 0 & \bar{c} \\ \bar{k} & 0 \end{bmatrix}, D_{11} = \begin{bmatrix} -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1 \ 0], D_{21} = [0 \ 0 \ 0], D_{22} = [0].$$

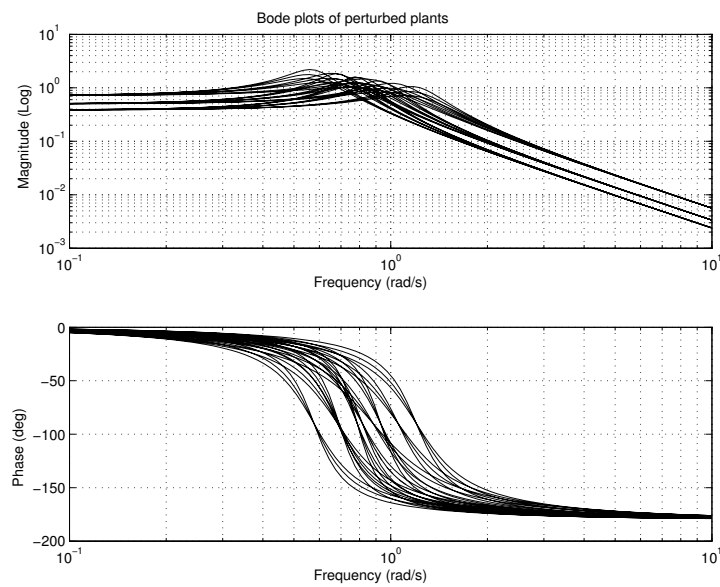
A bizonytalanságokat tartalmazó δ paramétereket egy külön blokk tartalmazza.

$$\begin{bmatrix} u_m \\ u_c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m \\ y_c \\ y_k \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

A bizonytalan paraméterek hatása a 3.24 ábrán látható Bode diagramokon jól láthatók.



3.23. ábra. Lengőrendszer modellje a bizonytalansággal



3.24. ábra. Parametrikus bizonytalanságok hatása a Bode diagramra

4. fejezet

Irányítástervezés frekvencia tartományban és állapot térben

4.1. Soros kompenzátor tervezése

4.1.1. Soros kompenzátor tervezési elve

Soros kompenzátor tervezése előírt fázistartalék elérése érdekében történik. A tervezési elv ismertetése érdekében első lépésben arányos soros kompenzátor tervezését mutatjuk be. A zárt rendszer átviteli függvénye:

$$G_C = \frac{G_E}{1 + G_H} \quad (4.1)$$

ahol G_H a hurokátviteli függvény és G_E az előrevezető ág eredő átviteli függvénye.

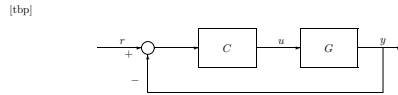
Vizsgáljuk meg első lépésben egy arányos kompenzátor tervezését. Kihasználjuk azt, hogy egy $C=A$ arányos tag amplitúdója $20\log_{10}A$, míg fázisa 0 a teljes frekvencia tartományban. Következtetés: Egy arányos tag az amplitúdó függvényt önmagával párhuzamosan eltolja, mégpedig $A > 1$ esetén felfelé, míg $A < 1$ esetén lefelé, ugyanakkor a fázisfüggvényt nem módosítja.

A soros kompenzátor úgy kell megválasztani, hogy ω_c vágási körfrekvenciához tartozó fázisszög éppen az előírt legyen.

Olvassuk le a fázisszöghöz tartozó amplitúdó értékét és jelöljük ezt előjelhelyesen x -szel. Az arányos soros kompenzátor úgy kell megválasztani, hogy az amplitúdó függvényt önmagával párhuzamosan x -szel eltolja (miközben a fázisfüggvényt változatlanul hagyja).

Tehát $C = A$ -t a következőképpen kell megválasztani:

$$20\log_{10}A = -x \quad (4.2)$$



4.1. ábra. Soros kompenzátor felépítése

ahol x az ábráról leolvasott érték, s ebből A kiszámítható:

$$A = 10^{-\frac{x}{20}} \quad (4.3)$$

Összefoglalva a soros kompenzátor tervezés lépései a következők:

1. $C = 1$ választással felrajzoljuk a felnyitott hurok Bode diagramját.
2. Leolvassuk a φ_t -hez tartozó x előjeles értékét és kiszámítjuk $C = A$ soros kompenzátor értéket.
Megjegyzés: Ha az amplitudó függvényt lefelé kell eltolni, akkor $A < 1$, míg ha felfelé, akkor $A > 1$ erősítést várunk.
3. Megvizsgáljuk a zárt (szabályozott) rendszer minőségi tulajdonságait.

Ha a cél egy dinamikus kompenzátor tervezése, akkor a tervezést megpróbáljuk visszavezetni arányos soros kompenzátor tervezésére:

$$C(s) = AC_0(s) \quad (4.4)$$

ahol $C_0(s)$ a kompenzátor átviteli függvényének ismert komponense.
Például:

$$C(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} \quad (4.5)$$

azaz $A = \frac{1}{T_i}$ és $C_0(s) = \frac{1}{s}$. A felnyitott hurok átviteli függvénye a következő:

$$G_H(s) = AGC_0(s) = AG_m(s) \quad (4.6)$$

ahol $G_m(s) = G(s)C_0(s)$. Ha a rendszer átviteli függvényét a C_0 komponenssel módosítjuk, akkor $G_m(s)$ átviteli függvényhez jutunk.

A tervezés során a $G_m(s)$ átviteli függvénnyel adott rendszert tekintjük szabályozandó rendszernek, amihez egy A arányos kompenzátort kell terveznünk. Természetesen a tervezett soros kompenzátort $C(s) = AC_0(s)$ alakú.

4.1. Példa. Legyen az irányítandó rendszer átviteli függvénye:

$$G = \frac{5}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (4.7)$$

Tervezzünk 30-os fázistartalékot biztosító arányos soros kompenzátort.

Megoldás:

Válasszunk kiindulásként $C = 1$ arányos soros kompenzátort:

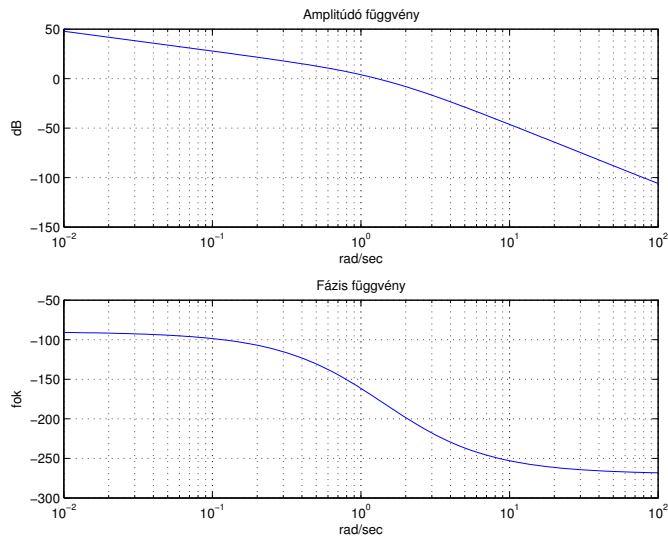
$$G_H = GC = \frac{5}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (4.8)$$

Szerkesszük meg a felnyitott hurok Bode diagramját. Változtassuk meg C -t úgy, hogy a fázistartalék 30-os legyen, azaz $\varphi_t = 30$ és a fázisszög ω_c -nél: $\varphi = -150$. Kihasználjuk azt, hogy egy $C=A$ arányos tag amplitúdója $20\log_{10}A$, míg fázisa 0 a teljes frekvencia tartományban.

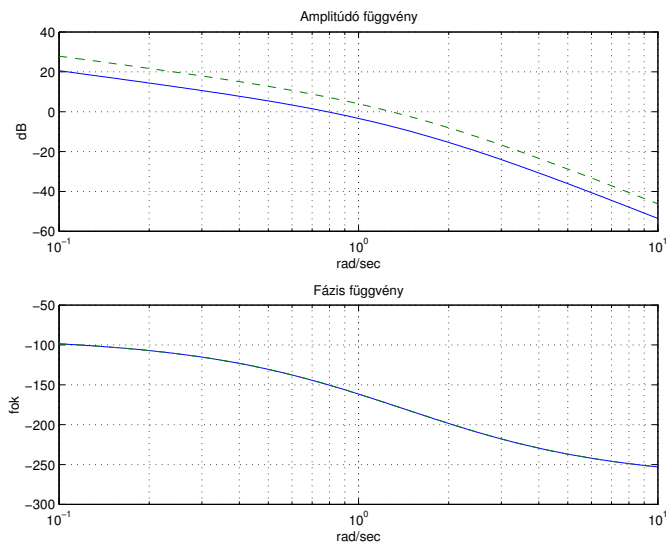
Jelen esetben $A = 0.43$ arányos soros kompenzátor oldja meg a feladatot (30-os fázistartalékot biztosít).

4.2. Példa. Legyen az irányítandó rendszer átviteli függvénye:

$$G = \frac{5}{s^2 + 3s + 2} \quad (4.9)$$



4.2. ábra. Soros kompenzátor felépítése



4.3. ábra. Soros kompenzátor felépítése

Tervezzünk jelkövetést biztosító soros kompenzátort, amelyik 30°-os fázistartalékot is garantál.

Megoldás:

A jelkövetés akkor biztosítható, ha a soros kompenzátor integráló tulajdonságú. Emiatt

a soros kompenzátort a következő alakban választjuk meg:

$$C = \frac{A_i}{s} \quad (4.10)$$

A felnyitott hurok átviteli függvénye a következő:

$$G_H = CG = \frac{A_i}{s}G = A_i \frac{G}{s} \quad (4.11)$$

Ha a rendszer átviteli függvényét $\frac{G}{s}$ -nek tekintjük, akkor a továbbiakban egy arányos soros kompenzátort kell terveznünk az 1. példában leírtakhoz hasonló módon.

4.1.2. Robusztusság ellenőrzése

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a modell alapján megtervezett szabályozó vajon stabilizálja-e a valós rendszert. Ehhez a modell bizonytalansági struktúráiból indulunk ki.

Tekintsük a bizonytalanságot additív struktúrában.

$$G(s) = G_N(s) + \Delta_A(s), \quad (4.12)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a rendszer névleges modelljén kívül ismerjük a szabályozó modelljét. Tegyük fel, hogy a $G_{HN}(s) = C(s)G_N(s)$ kompenzált névleges rendszer stabilis. Vizsgáljuk meg, hogy a $G_H(s) = C(s)G(s)$ aktuális rendszer stabilitásához milyen feltételnek kell teljesülnie.

4.1. Tétel. *Legyen $G_N(s)$ az ismert névleges modell, amelyet a tervezett $C(s)$ soros kompenzátor stabilizál. Tegyük fel, hogy a névleges modell és az aktuális rendszer közötti additív hiba felső korlátját a teljes ω frekvencia tartományban ismerjük. Ekkor a névleges modellre tervezett szabályozó az aktuális rendszer stabilitását is biztosítja, ha a következő feltétel teljesül:*

$$\frac{1}{d_A(\omega)} > \left| \frac{C(i\omega)}{1 + G_{HN}(i\omega)} \right|, \quad \forall \omega. \quad (4.13)$$

Ez a robusztus stabilitás feltétele additív hiba struktúra esetén.

Tekintsük a bizonytalanságot multiplikatív struktúrában.

$$G(s) = G_N(s)(1 + \Delta_M(s)), \quad (4.14)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a rendszer névleges modelljén kívül ismerjük a szabályozó modelljét. Tegyük fel, hogy a $G_{HN}(s) = C(s)G_N(s)$ kompenzált névleges rendszer stabilis. Vizsgáljuk meg, hogy a $G_H(s) = C(s)G(s)$ aktuális rendszer stabilitásához milyen feltételnek kell teljesülnie.

4.2. Tétel. *Legyen $G_N(s)$ az ismert névleges modell, amelyet a tervezett $C(s)$ soros kompenzátor stabilizál. Tegyük fel, hogy a névleges modell és az aktuális rendszer közötti multiplikatív hiba felső korlátját a teljes ω frekvencia tartományban ismerjük. Ekkor a névleges modellre tervezett szabályozó az aktuális rendszer stabilitását is biztosítja, ha a következő feltétel teljesül:*

$$\frac{1}{d_M(\omega)} > \left| \frac{G_{HN}(i\omega)}{1 + G_{HN}(i\omega)} \right|, \quad \forall \omega. \quad (4.15)$$

Ez a robusztus stabilitás feltétele multiplikatív hiba struktúra esetén.

4.3. Példa. Ismert egy versenyautó hátsó szárnyának irányítási célú névleges modellje

$$G_N(s) = \frac{80}{100s + 1} \quad (4.16)$$

és bizonytalanságára jellemző multiplikatív hibája

$$\Delta_M(s) = \frac{10s}{(s + 1)^2}. \quad (4.17)$$

Az additív és a multiplikatív bizonytalanságok közötti összefüggés alapján számolja ki az additív bizonytalanság átviteli függvényét! Vizsgálja meg, hogy a $C = 2$ arányos soros kompenzátor robusztusan stabilizálja-e a rendszert az adott $\delta_M = |\Delta_M|$ esetén!

Megoldás:

$$G = G_N + G_N \Delta_M = G_N + \Delta_A \implies \Delta_A = G_N \Delta_M \quad (4.18)$$

$$G = G_N(1 + \Delta_M) = \frac{80}{100s + 1} \left(1 + \frac{10s}{(s + 1)^2} \right) = \frac{80}{100s + 1} \cdot \frac{s^2 + 12s + 1}{(s + 1)^2} \quad (4.19)$$

$$\Delta_A = G_N \Delta_M = \frac{800s}{(100s + 1)(s + 1)^2} \quad (4.20)$$

Robusztusság vizsgálata

$$\frac{G_N C}{1 + G_N C} = \frac{\frac{80}{100s+1} \cdot 2}{1 + \frac{80}{100s+1} \cdot 2} = \frac{160}{100s + 161} = \frac{\frac{160}{161}}{\frac{100}{161}s + 1} \quad (4.21)$$

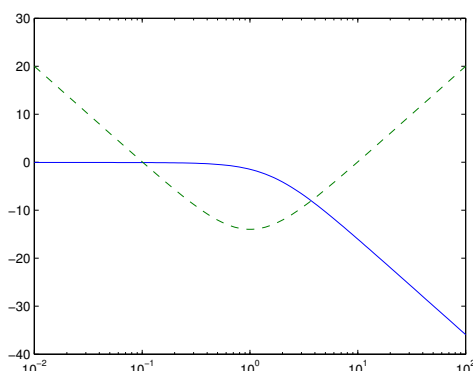
Grafikus vizsgálat:

$$\frac{1}{d_M(\omega)} > \left| \frac{G_{HN}(i\omega)}{1 + G_{HN}(i\omega)} \right| \quad (4.22)$$

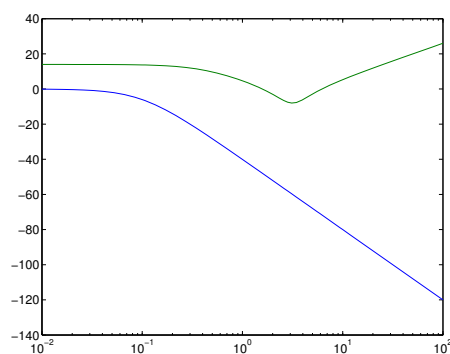
A robusztus stabilitás követelménye nem teljesül.

4.4. Példa. Egy járműkomponens modelljére $1TI$ tag adódott

$$G_N(s) = \frac{1}{s(s + 0.2)} \quad (4.23)$$



4.4. ábra. A 4.3. Példa megoldása



4.5. ábra. A 4.4. Példa rész megoldása

A modell bizonytalansága additív struktúrában a következőképpen választható

$$\Delta_A(s) = \frac{5s + 2}{s^2 + 2s + 10}. \quad (4.24)$$

Vizsgálja meg, hogy a $C = 0.01$ értékű szabályozó stabilizálja-e robusztusan a rendszert!

Megoldás:

Megrajzolva a $\Delta_A(\omega)$ Bode-diagramját, leolvashatjuk az ω szerinti maximális értéket, $\Delta_A(\omega) < 8.0\text{dB}$ alapján $\Delta_A(\omega) < 2.5$. Robusztus stabilitási teszt alkalmazása során kiszámoljuk a bal oldal értékét:

$$T_N(\omega) = \frac{A}{1 + AG_N} = \frac{0.01}{s^2 + 0.2s + 0.01} = \frac{0.01}{(s + 0.1)^2}, \quad (4.25)$$

ahonnan a Bode diagram alapján:

$$\sup_{\omega} T_N(\omega) = 1 \quad (4.26)$$

A robusztus stabilitás teljesül.

4.5. Példa. Tegyük fel, hogy egy rendszer névleges modelljén kívül ismerjük a rendszer bizonytalanságára jellemző Δ_M multiplikatív hibát is a következő alakban:

$$G_N(s) = \frac{5}{s+1} \quad (4.27)$$

$$\Delta_M(s) = \frac{s^2 - 2s}{s^2 + 3s + 25} \quad (4.28)$$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi soros kompenzátorok közül melyek biztosítják az ismeretlen aktuális rendszer robusztus stabilitását.

1. eset $C(s) = 8$

2. eset $C(s) = 0.1$

Megoldás:

Vizsgáljuk először a $C(s) = 8$ kompenzátor esetét (1. eset).

$$G_{HN}(i\omega) = \frac{40}{i\omega + 1} \quad (4.29)$$

$$\frac{G_{HN}(i\omega)}{1 + G_{HN}(i\omega)} = \frac{\frac{40}{i\omega+1}}{1 + \frac{40}{i\omega+1}} = \frac{40}{i\omega + 41} \quad (4.30)$$

A robusztusságra vonatkozó egyenlőtlenség nem teljesül, tehát tervezett szabályozás nem biztosítja a robusztusságot. Vizsgáljuk most a $C(s) = 0.1$ kompenzátor esetét (2. eset).

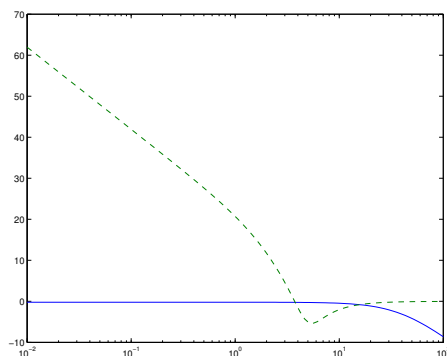
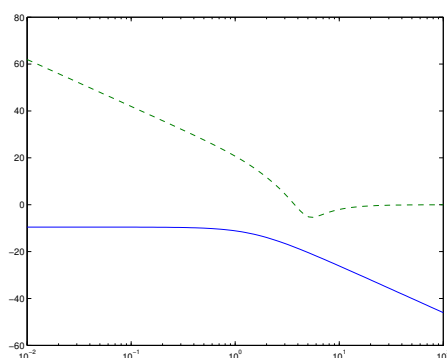
$$G_{HN}(i\omega) = \frac{0.5}{i\omega + 1} \quad (4.31)$$

$$\frac{G_{HN}(i\omega)}{1 + G_{HN}(i\omega)} = \frac{\frac{0.5}{i\omega+1}}{1 + \frac{0.5}{i\omega+1}} = \frac{0.5}{i\omega + 1.5} \quad (4.32)$$

A tervezett szabályozás a robusztusságot biztosítja.

4.6. Példa. Tételezzük fel, hogy a szabályozni kívánt rendszert egytárolós névleges modellel közelítjük:

$$G_N(s) = \frac{3}{s+1}. \quad (4.33)$$

4.6. ábra. A $C(s) = 8$ kompenzátor esete4.7. ábra. A $C(s) = 0.1$ kompenzátor esete

A modellezési hiba multiplikatív struktúrában ismert közelítése az alábbi:

$$\Delta_M(s) = \frac{-s^2 + 2s}{s^2 + 3s + 25}. \quad (4.34)$$

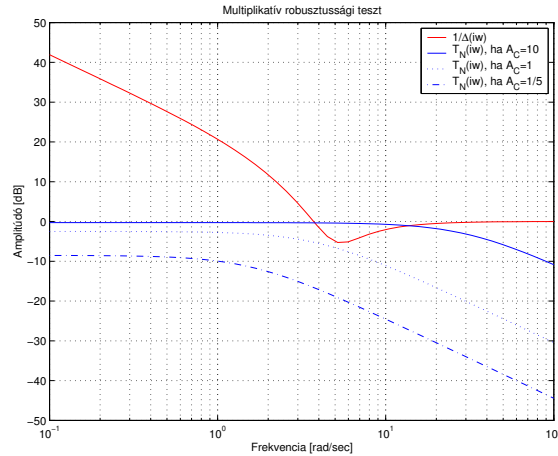
Tervezzünk egy stabil zárt rendszert, amely a legnagyobb körerősítést biztosítja. Az alkalmazható szabályozó egyszerű arányos tag lehet!

Megoldás:

A névleges zárt szabályozási kör strukturálisan stabilis marad bármilyen nagy A körerősítés mellett. A robusztus stabilitási teszt alapján azonban megmutatható, hogy egy adott érték feletti erősítéssel a valódi zárt rendszert destabilizáljuk. A robusztus stabilitási teszt teljesül, ha

$$\sup_{\omega} \left| \frac{G_{HN}(\omega)}{1 + G_{HN}(\omega)} \right| < \frac{1}{\sup_{\omega} |\Delta_M(\omega)|}, \quad \forall \omega, \quad (4.35)$$

ahol $G_{HN}(\omega) = AG_N(\omega)$ a névleges hurokátviteli függvény. Megrajzolva a $\Delta_M(\omega)$ Bode-diagramját, olvashatjuk az ω szerinti maximális értéket, $\Delta_M(\omega) < 5.4\text{dB}$ alapján $\Delta_M(\omega) < 1.86$. A névleges zárt rendszer átviteli függvénye



4.8. ábra. cím

$$T_N(\omega) = \frac{3A}{i\omega + 1 + 3A} = \frac{\frac{3A}{1+3A}}{1 + \frac{i\omega}{1+3A}}, \quad (4.36)$$

ahonnan a Bode diagram alapján:

$$\sup_{\omega} T_N(\omega) = \frac{3A}{1 + 3A}. \quad (4.37)$$

Ebből következik, hogy a robusztus stabilitás olyan A szabályozó erősítésekre teljesül, amelyekre

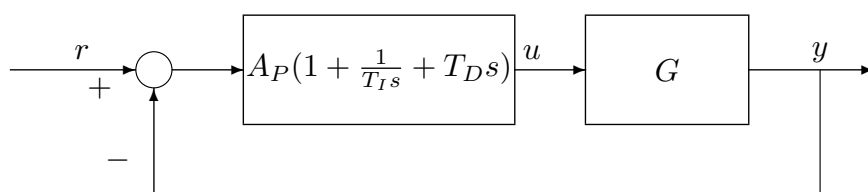
$$\frac{3A}{1 + 3A} < \frac{1}{1.86}. \quad (4.38)$$

A robusztus stabilitás feltétele tehát:

$$A < 0.39. \quad (4.39)$$

4.2. PID szabályozás tervezése

A PID egy arányos, egy integráló és egy differenciáló tag párhuzamos kapcsolata. A PID szabályozó (hangolási irodalom) Megj. renciáló



4.9. ábra. PID szabályozó struktúrája

$$K = A_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (4.40)$$

ahol A_P az arányos tag erősítése, T_I az integráló tag időállandója, T_D a differenciáló tag időállandója.

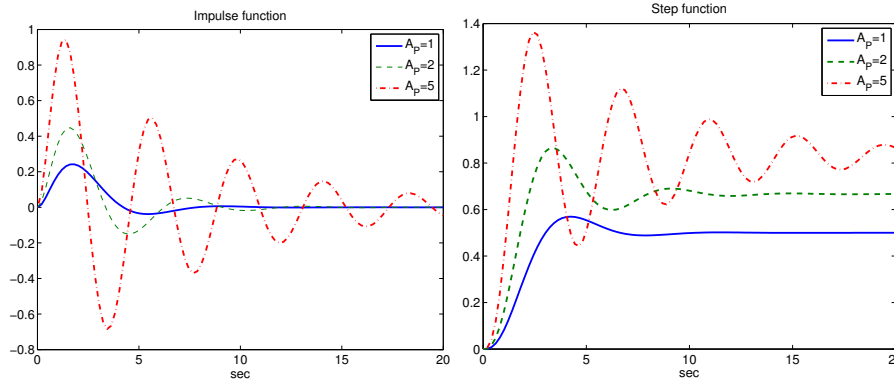
Az $u(t)$ jel és $e(t) = r(t) - y(t)$ hibajel közötti kapcsolat:

$$u(t) = A_P \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (4.41)$$

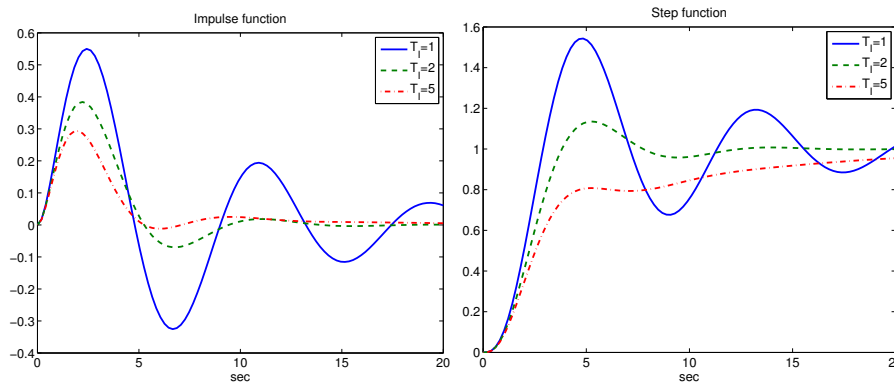
Zérus kezdeti feltételekkel Laplace transzformálva:

$$U(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) E(s) \quad (4.42)$$

Példaként tekintünk a $G = \frac{1}{(s+1)^3}$ átviteli függvényű rendszert, amit különböző arányos taggal szabályoztunk. $A_P = 1; 2; 5$. Növekvő erősítések mellett a szabályozási eltérés csökken ugyan, de a válaszfüggvény oszcillációja jelentősen növekszik. Tekintsük ugyanazt a $G = \frac{1}{(s+1)^3}$ átviteli függvényű rendszert. Ezúttal PI taggal végeztük a szabályozást. Rögzítsük az arányos tagot $A_P = 1$ -re és változtassuk az integráló tag T_I időállandóját. $T_I = 1; 2; 5$. Az integráló hatás eredményeként az állandósult állapotú hiba eltűnik. A válaszfüggvény oszcillációja T_I növekedésével jelentősen



4.10. ábra. Arányos tag hatása



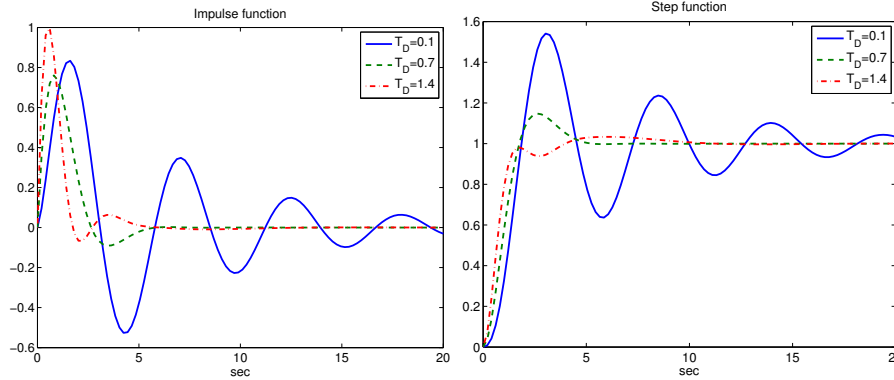
4.11. ábra. Arányos tag hatása

csökkenthető, viszont ezzel együtt a beállási idő jelentősen növekszik. Tekintsük ugyanazt a $G = \frac{1}{(s+1)^3}$ átviteli függvényű rendszert. Ezúttal PID taggal végeztük a szabályozást. Rögzítsük az arányos tagot $A_P = 3$ -ra, rögzítsük az integráló tag T_I időállandóját $T_I = 2$ -re és változtassuk a differenciáló tag T_D időállandóját. $T_D = 0.1; 0.7; 1.4$. A T_D növekedésével a beállási idő jelentősen csökkenthető és a lengések jelentősen csillapíthatók. A differenciáló hatás a szabályozást gyorsítja.

A PID szabályozó egy arányos, egy integráló és egy differenciáló tag párhuzamos kapcsolataként értelmezhető.

$$K = A_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (4.43)$$

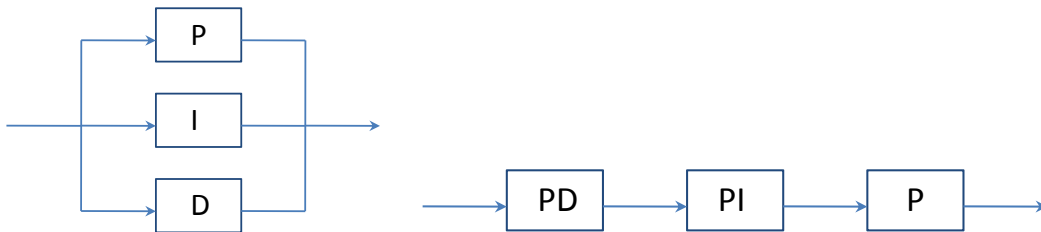
A PID szabályozó egy másik alakja egy arányos, egy PI tag és egy PD tag soros kapcsolataként értelmezhető. Ekkor az egyes komponensek egymással kölcsönhatásban



4.12. ábra. Arányos tag hatása

vannak.

$$K = A_{P'} \left(1 + \frac{1}{T_I' s} \right) (1 + T_D' s) \quad (4.44)$$



4.13. ábra. PID szabályozó struktúrája

A kétféle felírás között a következő kapcsolat írható fel. A klasszikus alak komponensei:

$$A_P = A_{P'} \frac{T_I' + T_D'}{T_I'} \quad (4.45)$$

$$T_I = T_I' + T_D' \quad (4.46)$$

$$T_D = \frac{T_I' T_D'}{T_I' + T_D'} \quad (4.47)$$

A soros alak komponensei:

$$A'_P = \frac{A_P}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right) \quad (4.48)$$

$$T'_I = \frac{T_I}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right) \quad (4.49)$$

$$T'_D = \frac{T_I}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right) \quad (4.50)$$

Megjegyzés: A soros alak felírásának feltétele, hogy $T_i \geq 4T_d$. A klasszikus alak általánosabb, mint a soros alak. Gyakran a tervezés (tuningolás) szempontjából a soros alak kedvezőbb. A két felírás P, PI, PD típusú struktúrák esetén ekvivalens. Különböző PID struktúrák választása esetén a két felírás paraméterei különböznek, azokat az összefüggéseknek megfelelően kell számítani.

A PID struktúra egy másik elterjedten használt alakja:

$$G = A'_P + \frac{A'_I}{s} + A'_D s \quad (4.51)$$

Ez az alak a klasszikus $K = A_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$ PID alakkal ekvivalens.

A két alak közötti kapcsolat:

$$A'_P = A_P \quad (4.52)$$

$$A'_I = \frac{A_P}{T_I} \quad (4.53)$$

$$A'_D = A_P T_D \quad (4.54)$$

és az időállandók: $T'_I = \frac{A'_P}{A'_I}$, $T'_D = \frac{A'_D}{A'_P}$.

A PID szabályozók tervezésekor a következő négy szempontot kell figyelembe venni:

- Zajsűrés
- Referenciajel súlyozás
- Beavatkozó telítődése
- Tuningolás, hangolás

4.2.1. Zajszűrés

A deriválási művelet mindig érzékeny a zajra.

Tekintsük az alábbi példát:

Tegyük fel, hogy a jel a következő alakú:

$$y(t) = \sin t + n(t), \quad (4.55)$$

ahol a zaj $n(t) = a_n \sin(\omega_n t)$ alakú, ω frekvenciájú szinusz jel. A deriválást elvégezve:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \cos t + n(t), \quad (4.56)$$

ahol $n(t) = a_n \omega \cos(\omega_n t)$. Az eredmény azt mutatja, hogy habár az n zaj hatása az y eredeti jelre $1/a_n$, de a derivált alakban ez az arány ω/a_n . A zaj aránya tetszőlegesen nagy lehet, ha ω nagy értékű. Deriválási művelet esetén a magas frekvenciás komponens hatását csökkenteni kell. Ennek érdekében az $A_P T_D s$ ideális PD tag helyett egy egytárolós komponenssel módosított tagot alkalmazunk:

$$D = \frac{A_P T_D s}{1 + s \frac{T_D}{N}} \quad (4.57)$$

A komponens erősítése a nagyfrekvencia tartományban $N A_P$ értékre van korlátozva. Következésképpen megakadályozzuk, hogy az n zaj y jelre való hatása túl nagy értékre növekedjen.

A PID szabályozó általános alakja a következőképpen módosul:

$$K(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right) \quad (4.58)$$

Nagyfrekvenciás tartományban az erősítés értéke:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K(s) = A_P (1 + N) \quad (4.59)$$

N növelésével a sávzélesség növekszik, ami stabilitási szempontból kedvezőtlen. Emiatt további elsőrendű szűrőket alkalmazunk:

$$F(s) = \frac{1}{(1 + s T_f)^n} \quad (4.60)$$

ahol T_f a filter állandója, ami kölcsönhatásban van a szabályozó időállandóival. T_f célszerű megválasztása $T_f = T_D/N$.

Egy példa a szűrő lehetséges megválasztására:

$$K(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) (1 + T_D s) \frac{1}{(1 + s \frac{T_D}{N})^2} \quad (4.61)$$

4.2.2. Referenciajel súlyozás

Gyorsan változó alapjel (egységugrás) esetén a szabályozó jelen impulzusszerű gyors válaszok jelenhetnek meg. Ezt a nemkívánatos jelenséget a referenciajel szűrésével oldhatjuk meg. Egy másik megoldási lehetőség a referenciajel megfelelő erősítésével történhet, amit referenciajel súlyozási eljárásnak nevezünk. A klasszikus PID esetén az $u(t)$ jel:

$$u(t) = A_P \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (4.62)$$

A módosított PID szabályozó esetén az $u(t)$ jel:

$$u(t) = A_P \left((br(t) - y(t)) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \left(c \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \right) \quad (4.63)$$

Az integrátort közvetlenül a hibajelre alkalmazzuk, viszont az arányos komponens és a deriválás komponensét a súlyozott referenciajel és a kimenőjel különbségére alkalmazzuk. A bemenőjel összefüggése:

$$u(t) = A_P \left((br(t) - y(t)) + \frac{1}{T_I} \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau + T_D \left(c \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \right) \quad (4.64)$$

$$U(s) = A_P \left(b + \frac{1}{sT_I} + csT_D \right) R(s) - A_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) Y(s) \quad (4.65)$$

Az összefüggés azt mutatja, hogy a szabályozó struktúra elvileg két-szabadságfokú, melyeket egyrészt a referenciajelre, másrészt a kimenőjelre kell alkalmazni: $U(s) = U_1(s) - U_2(s)$, ahol

$$U_1(s) = A_P \left(b + \frac{1}{sT_I} + csT_D \right) R(s) = C_r(s)R(s) \quad (4.66)$$

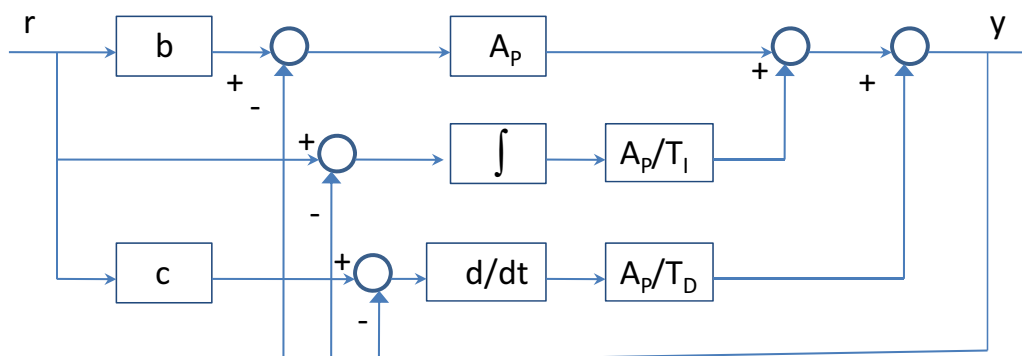
$$U_2(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) Y(s) = C_y(s)Y(s) \quad (4.67)$$

A referenciajel értékét egyrészt b erősítéssel, másrészt c erősítéssel módosítjuk.

$$U_1(s) = A_P \left(b + \frac{1}{sT_I} + csT_D \right) R(s) = C_r(s)R(s) \quad (4.68)$$

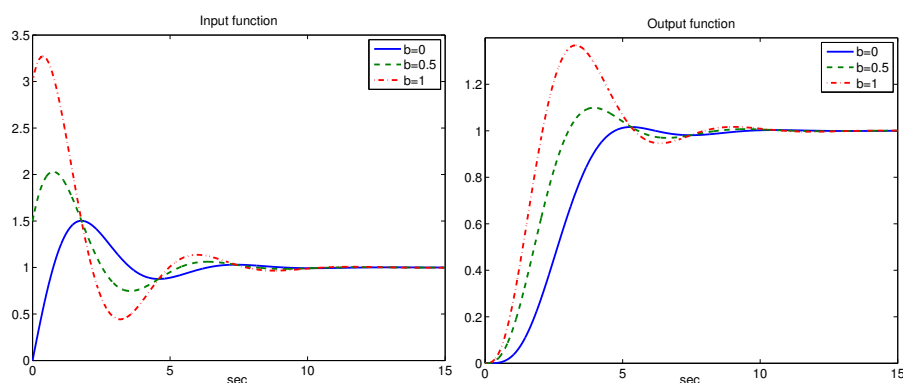
$$U_2(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) Y(s) = C_y(s)Y(s) \quad (4.69)$$

Megfelelő megválasztással (hangolásukkal) a nagy tranziensek és túllendülések elkerülhetők.



4.14. ábra. Referenciajél súlyozás

4.7. Példa. Példaként tekintünk a $G = \frac{1}{(s+1)^3}$ átviteli függvényű rendszert, amit PID kompenzátorral szabályoztunk: $A_P = 3$; $T_I = 2$; $T_D = 0.5$. A példában a súlyokat rendre $b = 0$; $b = 0.5$; $b = 1$ és $c = 0$ értékekre választottuk. Az ábra a b erősítés hatását mutatja. A legkisebb túllendülést $b = 0$ esetén értük el, ami azt jelenti, hogy a



4.15. ábra. Referenciajél súlyozás

referenciajelet az arányos komponensbe nem vittük be. Növekvő b mellett a túllendülés növekszik.

4.2.3. Beavatkozó telítődése

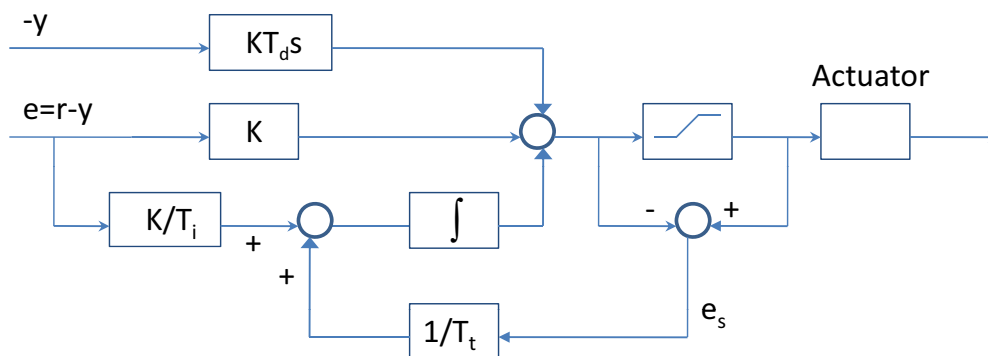
Minden beavatkozó elemnek vannak korlátai. Ha a beavatkozó működése során telítésbe megy, akkor a rendszer nyílt hurokként működik, hiszen a beavatkozó nem tud nagyobb értéket generálni, bármit is kíván a szabályozó. Ha a szabályozó integrátort tartalmaz

és az aktuátor telítésbe megy, akkor a rendszer kimenetén egyre nagyobb érték jelenik meg, azaz nagy tranziensek keletkeznek. Több módszer van a windup elkerülésére.

- **Referenciajel korlátozás:** Annak érdekében, hogy elkerüljük az integrátor által okozott növekvő tranziensű jeleket, a referenciajel értékét korlátozzuk. Ez a megoldás konzervatív eredményhez és gyenge minőségi tulajdonságokhoz vezet.
- **Sebesség algoritmus:** Az algoritmus kiszámítja az irányítójel változásának (sebességének) értékét. Abban az esetben, ha az aktuátor telítésbe ment, az integrátorra adott jelet korlátozzuk, s ezzel megakadályozzuk a tranziensek növekedését. Tulajdonképpen az irányítójel változásának értékét korlátozzuk.
- **Beavatkozójel számítása:** Ha az aktuátor telítésbe megy, akkor az integrál jel értékét kiszámítjuk és módosítjuk annak érdekében, hogy a kimenetének korlátozását figyelembe vegyük.

Az ábrán látható szabályozó egy további visszacsatolást tartalmaz, ami a beavatkozóra kiadott jel és a számított jel közötti különbségét alkalmazza. A két jel között egy sebességjel korlátozás van.

- Ha a nincs telítés, akkor a hibajel zérus és a visszacsatolásnak nincs hatása. Ha a jel telítésbe megy, akkor a nem zérus hibajelet a visszacsatoláson keresztül a szabályozó figyelembe veszi.



4.16. ábra. Referenciajel súlyozás

Az integrátor bemenete: $\frac{1}{T_i}e_s + \frac{K}{T_i}e$, ahol $e = r - y$ a követési hiba, $e_s = u - v$ a szaturációs blokk bemenete és kimenete közötti eltérés.

Az integrátor bemenete:

$$\frac{1}{T_t}e_s + \frac{K}{T_i}e, \quad (4.70)$$

ahol e a követési hiba. Állandósult állapotban az integrátor bemenetén zérus van, ezért az állandósult állapotú jel értéke $e_s = -\frac{KT_t}{T_i}e$. Mivel

$$e_s = u - v, \quad (4.71)$$

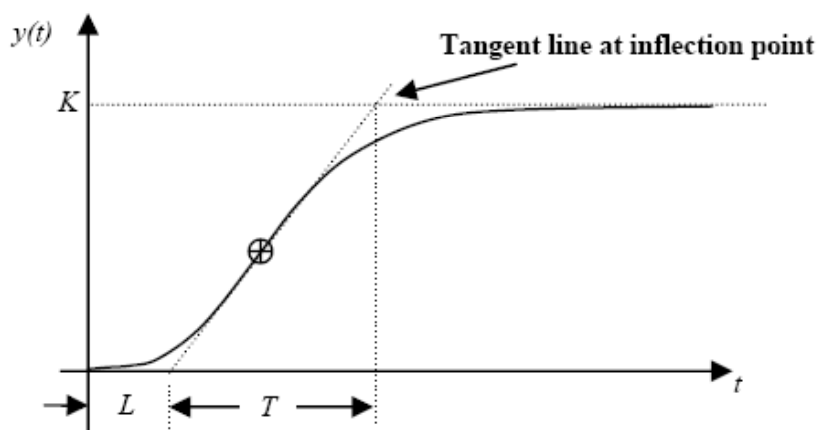
az irányítójel értéke:

$$v = u_{lim} + \frac{KT_t}{T_i}e \quad (4.72)$$

ahol u_{lim} az irányítójel telítési értéke. Ez azt jelenti, hogy a v jel a telítési értékre beáll és azt csak rövid ideig haladja meg. A visszacsatolásban alkalmazott T_t időállandó megválasztása az integrátorra való hatás dinamikáját szabja meg.

4.2.4. Tuningolás, hangolás

A szabályozó hangolásának egyik legegyszerűbb módszere a felnyitott hurok átmeneti függvénye alapján dolgozik. PI és PID szabályozóra a hurokerősítés az I hatás kiiktatásával történik. L az úgynevezett lappangási idő (holtidő és késleltetés), míg T a felfutási idő. Az ábráról leolvasott értékek alapján a hurokerősítés, az integrálási időállandó és a



4.17. ábra. Referenciajel súlyozás

deriválási időállandó beállítható.

	A_P	T_I	T_D
P	$A_P \leq T/L$	∞	0
PI	$A_P \leq 0.9T/L$	$T_I > 3.3L$	0
PD	$A_P \leq 1.2T/L$	∞	$T_D < 0.25L$
PID	$A_P \leq 1.2T/L$	$T_I > 2L$	$T_D < 0.5L$

- PI szabályozásban a hurokerősítést a P szabályozáshoz képest célszerű lecsökkenteni. Ennek az oka, hogy a PI kompenzáció a -20dB/dek meredekségű szakaszt a kisfrekvenciák irányába tolja el az amplitudó görbét. A stabilitási tartalék növeléséhez emiatt a hurokerősítést célszerű kissé lecsökkenteni.
- PD és PID szabályozások esetén a hurokerősítés valamelyest növelhető a P szabályozáshoz képest. Ennek oka, hogy a PD és PID kompenzáció esetén a -20dB/dek meredekségű szakasz a nagyobb frekvenciák tartományában is folytatódik. A stabilitási tartalék még megfelelő marad, ha a hurokerősítést kissé növeljük.

A szabályozó hangolásának Ziegler-Nichols módszere a szabályozási kör belengése alapján dolgozik. A módszer lényege, hogy a szabályozást a hurokerősítés növelésével az állandósult lengés állapotába hozzuk. A stabilitás határhelyzetében megmérjük a lengések T_k periódusidejét és a beállított A_k kritikus hurokerősítést. A meghatározott értékek alapján a hurokerősítés, az integrálási időállandó és a deriválási időállandó beállítható.

	A_P	T_I	T_D
P	$A_P \leq 0.5A_k$	∞	0
PI	$A_P \leq 0.45A_k$	$T_I > 0.8T_k$	0
PID	$A_P \leq 0.6A_k$	$T_I > 0.5T_k$	$T_D < 0.125T_k$

4.3. Pólusallokációs módszer

4.3.1. A módszer elve és algoritmus

Adott egy rendszer n -dimenziós $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ állapotter reprezentációja:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

A rendszer karakterisztikus polinomja:

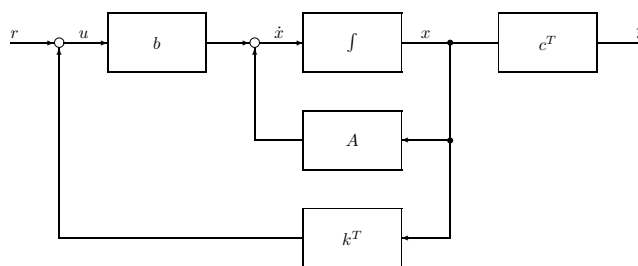
$$a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0. \quad (4.74)$$

Módosítsuk a rendszer dinamikáját az $\mathbf{x}(t)$ állapot visszacsatolásával, azaz legyen a bemenőjel

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + r, \quad (4.75)$$

ahol $r(t)$ egy külső alap-, vagy referencia jel a \mathbf{k} pedig az állapot visszacsatolás erősítési tényezője:

$$\mathbf{k}^T = [k_{n-1} \quad \dots \quad k_0]. \quad (4.76)$$



4.18. ábra. A visszacsatolt (zárt) rendszer blokkdiagramja

Behelyettesítve a bemenőjel alakját az állapotegyenletbe, a zárt rendszer állapotegyenlete a következő lesz:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}r \quad (4.77)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (4.78)$$

amiből a zárt rendszer karakterisztikus egyenletére azt kapjuk, hogy

$$\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0. \quad (4.79)$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a \mathbf{k} erősítés megfelelő megválasztásával a zárt rendszer karakterisztikus polinomja tetszőlegesen beállítható, ha az $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ rendszer irányítható.

Mivel minden irányítható állapotér reprezentáció irányítható alakra hozható, tegyük fel hogy az alábbi rendszert irányítható alakra hoztuk.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{b}_c u \\ y &= \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Ekkor a visszacsatolással módosult állapotmátrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c \mathbf{k}^T &= \\ &= \begin{bmatrix} -(a_{n-1} + k_{n-1}) & \dots & -(a_1 + k_1) & -(a_0 + k_0) \\ 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.81)$$

A zárt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c \mathbf{k}^T) \\ &= s^n + (a_{n-1} + k_{n-1})s^{n-1} + \dots + (a_1 + k_1)s + (a_0 + k_0), \end{aligned} \quad (4.82)$$

Ha a zárt rendszer pólusait előírjuk, akkor rögzítjük a $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ pólusokat, amiből az $\bar{a}(s)$ karakterisztikus polinom számítható:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s - \bar{p}_1) \cdots (s - \bar{p}_n) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0.\end{aligned}\quad (4.83)$$

Ebben a kifejezésben α_i -k az állapot visszacsatolással módosított karakterisztikus polinom együtthatói. A k_i , a_i és α_i együtthatók közötti kapcsolat:

$$\alpha_i = a_i + k_i, \quad i = 0, \dots, n - 1. \quad (4.84)$$

A kompenzátor elemeinek számítása:

$$k_i = \alpha_i - a_i, \quad i = 0, \dots, n - 1. \quad (4.85)$$

ahol a_i -k az eredeti, míg α_i -k a módosított karakterisztikus polinom együtthatói.

A tervezés során tehát előbb meghatározzuk az eredeti rendszer, majd a tervezett rendszer karakterisztikus polinomját. Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (4.86)$$

A tervezett zárt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A + bk^T) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (4.87)$$

Az együtthatók közötti összefüggések:

$$a_i + k_i = \alpha_i \quad (4.88)$$

Az állapot visszacsatolás értékei:

$$k_i = \alpha_i - a_i \quad (4.89)$$

Ha a rendszer irányítható, de nem irányíthatósági alakban adott, akkor egy T nem szinguláris transzformációs mátrix segítségével irányíthatósági alakra hozható. Az irányíthatósági alakban jelöljük A_c és b_c -vel az állapotegyenlet együtthatóit. A tervezés ebben az irányíthatósági alakban történik, ami azt jelenti, hogy a tervezés eredményeként egy olyan k_c állapot-visszacsatolást tervezünk, amely az irányíthatósági állapotér reprezentációra működik.

A tervezett állapot visszacsatolt erősítőt vissza kell transzformálni az eredeti rendszer állapotterére. A transzformálás összefüggése az alábbi:

$$k^T = k_c^T \cdot T \quad (4.90)$$

A tervezési lépések a következők:

1. Az irányíthatóság ellenőrzése. Ha a rendszer nem irányítható, akkor az állapot visszacsatolás módszere nem alkalmazható.
2. A rendszert irányíthatósági alakra hozzuk, azaz meghatározzuk T nem szinguláris mátrixot, amely a rendszert irányíthatósági alakúra hozza.

$$T = (\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\tau(a))^{-1} \quad (4.91)$$

Ha a rendszer eleve irányíthatósági alakban adott, akkor T mátrixot egységmátrixnak választjuk, azaz $T = I$.

Megjegyezzük, hogy az új állapottérbe való transzformálás tényleges elvégzésére nincs szükség, elegendő a transzformációs mátrix meghatározása.

3. Meghatározzuk az eredeti rendszer karakterisztikus polinomját:

$$\mathbf{a} = [a_{n-1} \ \cdots \ a_1 \ a_0]^T. \quad (4.92)$$

Ezután meghatározzuk a tervezett rendszer karakterisztikus polinomját:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{n-1} \ \cdots \ \alpha_1 \ \alpha_0]^T. \quad (4.93)$$

Ezekhez a műveletekhez az eredeti rendszer A mátrixát és a szabályozott rendszertől megkövetelt új pólusokat kell felhasználni.

4. A kompenzátor komponenseit kiszámítjuk:

$$k_c^T = [k_{n-1} \ \cdots \ k_1 \ k_0] \quad (4.94)$$

ahol $k_{n-1} = \alpha_{n-1} - a_{n-1}, \dots, k_1 = \alpha_1 - a_1, k_0 = \alpha_0 - a_0$

5. Meghatározzuk az eredeti rendszerre vonatkozó erősítés együtthatóit.

$$k^T = k_c^T \cdot T \quad (4.95)$$

Az irányítójel az alábbi:

$$u = -k_{n-1}x_1 - \cdots - k_1x_{n-1} - k_0x_n + r \quad (4.96)$$

4.1. Megjegyzés. A fenti lépéseket egyetlen összefüggésbe sűrítethetjük:

$$(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})^T = k^T \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\tau(a) \quad (4.97)$$

ahol a $T = (\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\tau(a))^{-1}$ az irányíthatósági alak előállítására szolgáló transzformációs mátrix. Az állapotvisszacsatolt erősítő:

$$k^T = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})^T \tau(a)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{b})^{-1} \quad (4.98)$$

Az összefüggést az állapotvisszacsatolás erősítésének meghatározására szolgáló Bass Gura formulának nevezzük.

Összefoglalás

1. A pólusallokációs módszer alkalmazásának feltétele:
 - Az állapotvektor elemei mérték legyenek.
 - Az állapotter reprezentáció teljesítse az irányíthatósági feltételt.
 - A szabályozott rendszer pólusai adottak legyenek.
2. A pólusallokációs módszer előnyei:
 - A módszer végrehajtása egyszerű mátrix műveletekkel történik.
 - A szabályozott rendszer stabilis.
3. A pólusallokációs módszer hátrányai:
 - Az irányítójel tetszőlegesen nagy lehet.
 - A pólusok elhelyezkedése és a minőségi tulajdonságok közötti kapcsolat bonyolult, heurisztikus szabályokra és mérnöki intuíciókra hagyatkozva kell a pólusok helyét előírni.
 - A szabályozott rendszer minőségi tulajdonságai az állapot-visszacsatolt erősítő megtervezése után utólagosan vizsgálандók.

4.3.2. Példák a pólusallokációs módszerre

4.8. Példa. Irányíthatósági alakban adott rendszer pólus allokációja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (4.99)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (4.100)$$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -17 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (4.101)$$

Tervezzünk állapotvisszacsatolást, amelyik a rendszer pólusait az alábbi értékekbe helyezi:

$$p = [-1 \quad -2 \quad -3] \quad (4.102)$$

Megoldás

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A) = s^3 - 11s^2 + 17s + 7 \quad (4.103)$$

$$a_2 = -11; a_1 = 17; a_0 = 7 \quad (4.104)$$

Szabályozott rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = (s + 1)(s + 2)(s + 3) \\ = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \quad (4.105)$$

$$\alpha_2 = 6; \alpha_1 = 11; \alpha_0 = 6. \quad (4.106)$$

Állapotvisszacsatolás erősítései: $k_2 = 17; k_1 = -6; k_0 = -1$

$$k^T = [17 \quad -6 \quad -1] \quad (4.107)$$

4.9. Példa. Adott egy BMW 325ix lambda-szondájának átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 9s + 20} \quad (4.108)$$

Írja fel az átviteli függvényhez tartozó állapotér reprezentációt diagonális alakban! Tervezzon az így felírt állapotér reprezentációhoz állapot-visszacsatolást a $p_1 = -2 + i$, $p_2 = -2 - i$ pólusokkal!

Megoldás:

Diagonális alak előállítás:

$$G = \frac{2s + 3}{s^2 + 9s + 20} = \frac{2s + 3}{(s + 4)(s + 5)} \quad (4.109)$$

$$r_1 = \lim_{s \rightarrow -4} (s + 4) \frac{2s + 3}{(s + 4)(s + 5)} = -5, \quad (4.110)$$

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow -5} (s + 5) \frac{2s + 3}{(s + 4)(s + 5)} = 7. \quad (4.111)$$

Vezessük be új változóként az $X_1(s)$, $X_2(s)$ változókat, ahol

$$X_1(s) = \frac{r_1}{s - \lambda_1} U(s) = \frac{-5}{s + 4} U(s), \quad (4.112)$$

$$X_2(s) = \frac{r_2}{s - \lambda_2} U(s) = \frac{7}{s + 5} U(s) \quad (4.113)$$

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \quad (4.114)$$

Az állapotér reprezentáció diagonális alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} u \quad (4.115)$$

$$y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja:

$$s^2 + 9s + 20 \implies a_1 = 9; a_0 = 20 \quad (4.117)$$

Szabályozott rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + 4s + 5 \implies \alpha_1 = 4; \alpha_0 = 5 \quad (4.118)$$

Állapotvisszacsatolás erősítései: $k_1 = -5; k_0 = -17$

$$k_c^T = [-5 \quad -15] \quad (4.119)$$

Ha a rendszer irányítható, de nem irányíthatósági alakban adott, akkor egy T nem szinguláris transzformációs mátrix segítségével irányíthatósági alakra hozható.

$$x_c = Tx$$

ahol $T = T_c$ a transzformációs mátrix. Az állapotvisszacsatolt-erősítő összefüggése: a hasonlósági transzformáció alapján az alábbi:

$$k^T = k_c^T \cdot T. \quad (4.120)$$

Transzformációs mátrix:

$$T^{-1} = C\tau = \begin{bmatrix} -5 & -25 \\ 7 & 28 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

ahol

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 20 \\ 7 & -35 \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.122)$$

$$\det(sI - A) = s^2 + 9s + 20. \quad (4.123)$$

Transzformációs mátrix:

$$T = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 28 & 25 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Az eredeti állapotterbe transzformálva:

$$k^T = k_c^T T = \frac{1}{35} [-5 \quad -15] \begin{bmatrix} 28 & 25 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

$$= [-1 \quad -1.4286] \quad (4.126)$$

4.10. Példa. Adott a

$$G(s) = \frac{2s + 3}{s^3 + s^2 + 9s + 22} \quad (4.127)$$

átviteli függvénnyel jellemzett rendszer. Írja fel a rendszer állapotter reprezentációját irányíthatósági alakban! Tervezzen az így felírt állapotter reprezentációhoz állapotvisszacsatolást a $p_1 = -2 + i$, $p_2 = -2 - i$, $p_3 = -1$ pólusokkal!

Megoldás

Vezessünk be egy új változót:

$$Z = \frac{1}{s^3 + s^2 + 9s + 22} \quad (4.128)$$

Inverz Laplace transzformációval:

$$\ddot{z} = -\ddot{z} - 9\dot{z} - 22z + u \quad (4.129)$$

Az állapotváltozókat a z deriváltjai csökkenő rendje szerint választjuk: $x_1 = \ddot{z}$, $x_2 = \dot{z}$, $x_3 = z$. Az állapotok deriváltjai: $\dot{x}_1 = \ddot{z} = -x_1 - 9x_2 - 22x_3 + u$, $\dot{x}_2 = \dot{z} = x_1$, $\dot{x}_3 = z = x_2$. A kimeneti jel: $y = 2\dot{z} + 3z = 2x_2 + 3x_3$. Az állapotter reprezentáció irányíthatósági alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -22 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.130)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja:

$$s^3 + s^2 + 9s + 22 \implies a_2 = 1; a_1 = 9; a_0 = 22 \quad (4.132)$$

Szabályozott rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = s^3 + 5s^2 + 9s + 5 \implies \alpha_2 = 5; \alpha_1 = 9; \alpha_0 = 5 \quad (4.133)$$

Állapotvisszacsatolás erősítései: $k_2 = 4; k_1 = 0; k_0 = -17$

$$k^T = [4 \quad 0 \quad -17] \quad (4.134)$$

4.11. Példa. Nem irányíthatósági alakban adott rendszer pólus allokációja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (4.135)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (4.136)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c^T = [1 \ 0 \ 0] \quad (4.137)$$

Tervezzünk állapotvisszacsatolást, amelyik a rendszer pólusait az alábbi értékekbe helyezi:

$$p = [-1 \ -2 \ -5] \quad (4.138)$$

Megoldás

Transzformációs mátrix:

$$T^{-1} = CW = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -19 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

ahol

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 11 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.140)$$

$$\det(sI - A) = s^3 + s^2 - 8s. \quad (4.141)$$

Transzformációs mátrix:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 2.0000 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ -0.0526 & 0.4211 & 0.1053 \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A) = s^3 + s^2 - 8s$$

$$a_2 = 1; a_1 = -8; a_0 = 0$$

Szabályozott rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = (s + 1)(s + 2)(s + 3) \\ = s^3 + 8s^2 + 17s + 10. \quad (4.143)$$

$$\alpha_2 = 8; \alpha_1 = 17; \alpha_0 = 10 \quad (4.144)$$

Állapotvisszacsatolás erősítései:

$$k_2 = 7; k_1 = 25; k_0 = -10 \quad (4.145)$$

$$k_c^T = [7 \ 25 \ 10] \quad (4.146)$$

Megoldás az eredeti rendszerben:

$$k_c^T = [7 \ 25 \ 10] \quad (4.147)$$

Az eredeti állapot térbe transzformálva:

$$\begin{aligned} k^T = k_c^T T &= [7 \ 25 \ 10] \begin{bmatrix} 0 & 2.0000 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ -0.0526 & 0.4211 & 0.1053 \end{bmatrix} \\ &= [-0.526 \ 43.21 \ 8.05] \end{aligned} \quad (4.148)$$

4.4. Lineáris kvadratikus szabályozótervezés

4.4.1. Az LQ módszer elve és algoritmusa

Írányítandó rendszer:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (4.149)$$

$$y = c^T x \quad (4.150)$$

Tervezzünk állapotvisszacsatoló erősítést, ami egy lineáris kvadratikus (LQ) funkcionált minimalizál:

$$u = -k^T x + r \quad (4.151)$$

LQ kritérium:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x(t)^T Q x(t) + r u(t)^2] dt \quad (4.152)$$

ahol $Q = Q^T$, $Q \geq 0$ és $r > 0$ konstansok. A tervezési paraméterek meghatározzák az állapotok lineáris kombinációinak és az input energia fontosságát (súlyát): Q és R .

- A funkcionálban szereplő $x^T Q x$ tag a rendszer minőségi jellemzőit súlyozza, a rendszer teljes energiáját bünteti egy $Q \geq 0$ súlymátrix segítségével
- A funkcionálban szereplő $r u^2$ a rendszerbe betáplált szabályozó energiát súlyozza, $r > 0$ skalár segítségével.

Az irányítójel:

$$u = -k^T x + r \quad (4.153)$$

ahol

$$k^T = r^{-1} b^T P \quad (4.154)$$

és P mátrixnak a következő Riccati egyenletet kell kielégítenie:

$$A^T P + P A - P b r^{-1} b^T P + Q = 0, \quad (4.155)$$

$$P > 0 \quad (4.156)$$

Fontos feltétel: Az állapottér reprezentációnak teljesítenie kell az irányíthatósági feltételt.

Az optimális állapotvisszacsatolás megoldása

1. Az irányíthatóság ellenőrzése.

$$C = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots] \quad (4.157)$$

2. Q és r súlyozó mátrixok megtervezése.

- Q tervezése az x állapotok alapján.
- r tervezése az irányítójel alapján,
pl. $r = 10^6$ hatására az input jelet minimalizálni akarjuk,
 $r = 10^{-6}$ esetén az input jelre nincs korlátozó előírás.

3. A Riccati egyenlet megoldása.

$$A^T P + PA - Pbr^{-1}b^T P + Q = 0, P > 0 \quad (4.158)$$

4. k^T állapotvisszacsatolás számítása.

$$k^T = r^{-1}b^T P \quad (4.159)$$

Az optimális irányítójel:

$$u = -k^T x \quad (4.160)$$

5. A zárt rendszer analízise.

$$\dot{x} = (A - bk^T)x + br \quad (4.161)$$

$$y = c^T x \quad (4.162)$$

Az LQ megoldás létezésére a következőket mondhatjuk:

- k^T optimális a költségfüggvényre nézve.
- Az optimális megoldás létezik és egyértelmű. Az optimális megoldás létezik, ha a rendszer stabil és teljesíti az irányíthatósági (és a megfigyelhetőségi) feltételt. Ha a rendszer stabil, akkor a költségfüggvény értéke véges, mivel az állapotok és a szabályozó jel exponenciálisan zérushoz tart. Ha a rendszer nemstabil, de irányítható, akkor a pólusok a negatív félsíkba mozgathatók állapotvisszacsatolás alkalmazásával.

Megjegyzés: A megfigyelhetőség bizonyos esetekben szükséges: a nem megfigyelhető állapotoknak szerepelnie kell a költségfüggvényben. Ha van olyan nem megfigyelhető állapot, ami nem hat a költségfüggvényre, akkor a tervezés eredményeként a rendszer akár nemstabil is maradhatna.

Az LQ megoldás robusztussága

- A zárt rendszer mindig stabil lesz. Az LQ tervezés a szabályozott rendszer pólusait automatikusan a bal oldali félsíkba helyezi.
- Az LQ optimális megoldás a végtelen erősítési tartalékot és a 60° -os fázistartalékot biztosít.

$$GM = \infty \quad (4.163)$$

$$PM \geq 60^\circ \quad (4.164)$$

4.4.2. Példák az LQ módszerre

4.12. Példa. Tervezzünk optimális állapot visszacsatolást LQ módszerrel a következő nem irányítható rendszerre:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.165)$$

Megoldás:

Az irányíthatóság ellenőrzése:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rang}C = 1 \quad (4.166)$$

Az állapotvisszacsatolás $k = [k_1 \quad k_2]^T$ alkalmazásával:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 - k_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.167)$$

mutatja, hogy x_2 állapot az input jellel nem módosítható.

4.13. Példa. Tervezzék LQ optimális szabályozást a

$$G(s) = \frac{2}{s-1} \quad (4.168)$$

átviteli függvénnyel leírt rendszerre, ha az irányíthatósági állapotter reprezentációjában mérjük a rendszer állapotait a következő költségfüggvény minimalizálásával:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + ru^2) dt, \quad (4.169)$$

ahol az $r = 3.2$ súly adott. Tervezze meg a q súly értékét! Tervezze meg az optimális állapotvisszacsatolást!

Megoldás:

Az állapotter reprezentáció irányíthatósági alakban:

$$\dot{x} = -x + u \quad (4.170)$$

$$y = 2x \quad (4.171)$$

A feladatot visszavezetjük az optimalizálás standard alakjára az $y = 2x$ összefüggés felhasználásával:

$$J = \int_0^{\infty} (4x^2 + 3.2u^2) dt \quad (4.172)$$

azaz az állapotokat súlyozó mátrix $q = 4$.

A Riccati egyenlet megoldása:

$$A^T P + PA - Pbr^{-1}b^T P + Q = 0, \quad P > 0 \quad (4.173)$$

ahol $A = -1$, $b = 1$, $Q = 4$, $r = 3.2$. A megoldás: $P = 1.6$.

Az állapot-visszacsatolt erősítő:

$$k^T = r^{-1}b^T P = 0.5, \quad (4.174)$$

azaz az optimális irányítójel: $u = -0.5x + v$.

4.14. Példa. Tervezzünk optimális állapot visszacsatolást LQ módszerrel a következő rendszerhez:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.175)$$

A tervezési paraméterek: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $r = 1$.

Megoldás:

Az irányíthatóság ellenőrzése:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rang}C = 2 \quad (4.176)$$

Riccati egyenlet megoldása:

$$A^T P + PA - Pbr^{-1}b^T P + Q = 0. \quad (4.177)$$

A CARE megoldását keressük $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$. Három megoldást találunk:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezek közül P_3 a pozitív definit megoldás.

k számítása:

$$k = r^{-1}b^T P. \quad (4.178)$$

Az optimális állapotvisszacsatolás: $k^T = [1 \ 1]$ és

az optimális irányítójel: $u = -x_1 - x_2$.

4.15. Példa. Tervezzünk optimális állapot visszacsatolást LQ módszerrel a következő nem megfigyelhető rendszerre:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.179)$$

$$y = [0 \ 1] x \quad (4.180)$$

A tervezési paraméterek: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $r = 1$.

Megoldás:

A nem megfigyelhető állapot szerepet játszik a költségfüggvényben. $P > 0$ megoldást találunk. Az optimális állapotvisszacsatolás: $k^T = [1.0000 \ 0.7321]$ és az optimális irányítójel: $u = -x_1 - 0.7321x_2$.

4.16. Példa. Tervezzünk optimális állapot visszacsatolást LQ módszerrel a következő nem megfigyelhető rendszerre:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.181)$$

$$y = [0 \ 1] x \quad (4.182)$$

A tervezési paraméterek: $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $r = 1$.

Megoldás:

A nem megfigyelhető állapot nem játszik szerepet a költségfüggvényben. $P > 0$ megoldás nem található. A tervezés nem végrehajtható.

4.17. Példa. Az u magassági kormány kitérítési szöge és a repülőgép bólintó szöge közötti kapcsolat állapotér reprezentációja irányíthatósági alakban a következő:

$$\dot{x} = -2.5x + u \quad (4.183)$$

$$y = 2.5x \quad (4.184)$$

Legyen a tervezési súlymátrixok a következők:

$$Q = 2.75 \quad (4.185)$$

$$r = 1 \quad (4.186)$$

Megoldás:

- A Riccati egyenlet megoldása:

$$A^T P + P A - P b r^{-1} b^T P + Q = 0, \quad P > 0$$

ahol $A = -2.5$, $b = 1$, $Q = 2.75$, $r = 1$.

Behelyettesítve: $P^2 + 5P - 2.75 = 0$. A megoldás: $P = 0.5$.

- Az állapot-visszacsatolt erősítő:

$$k^T = r^{-1} b^T P = 0.5,$$

azaz az optimális irányítójel: $u = -0.5x + v$.

- A zárt rendszer állapotér-reprezentációja:

$$\dot{x} = -3x + v \quad (4.187)$$

$$y = 2.5x \quad (4.188)$$

4.18. Példa. Tervezzünk optimális állapot visszacsatolást LQ módszerrel a következő rendszerhez:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.189)$$

A tervezési paraméterek: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $r = 0.1$.

Megoldás:

1. Riccati egyenlet megoldása:

$$A^T P + PA - Pbr^{-1}b^T P + Q = 0. \quad (4.190)$$

$$A \text{ CARE megoldása: } P = \begin{bmatrix} 0.7953 & 0.3162 \\ 0.3162 & 0.2515 \end{bmatrix}.$$

2. k számítása:

$$k = r^{-1}b^T P. \quad (4.191)$$

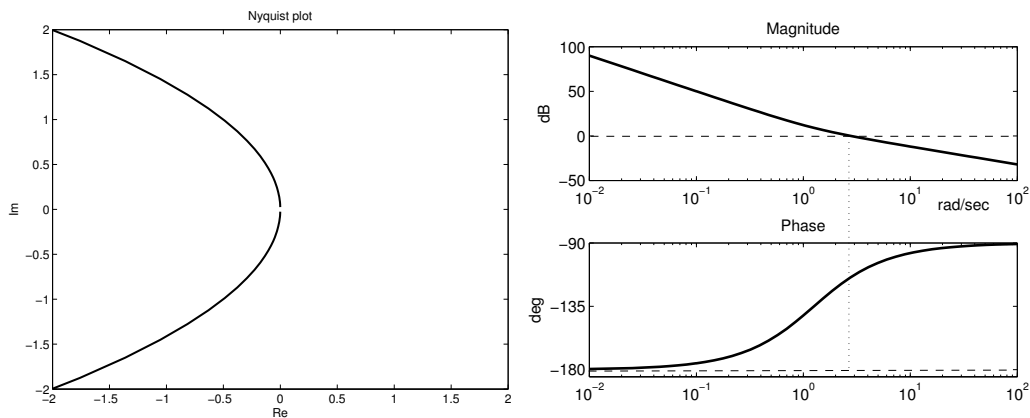
Az optimális állapotviszacsatolás:

$$k^T = [3.1623 \quad 2.5149] \text{ és}$$

$$\text{az optimális irányítójel: } u = -3.1623x_1 - 2.5149x_2.$$

$$GM = \infty \quad (4.192)$$

$$PM = 65.5^\circ \quad (2.76 \text{ rad/sec}) \quad (4.193)$$



4.19. ábra. A tervezés frekvencia tartományban

Megjegyezzük, hogy a témával kapcsolatban további példákat találni az irodalomban [5, 1, 19, 22].

4.4.3. Pólusok és zérusok

A szabályozott rendszer pólusai a $\det(sI - A + bK) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai. A **Hamilton mátrix** tartalmazza az optimális irányítás megoldásait, így sajátértékei az optimális megoldás pólusait is megadják.

$$H = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{r}bb^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

Felhasználva a $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$ összefüggést, felírhatjuk a Hamilton mátrixra vonatkozó *karakterisztikus egyenletet*:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & \frac{1}{r}bb^T \\ Q & sI + A^T \end{bmatrix} \quad (4.195)$$

$$= \det(sI - A) \det(sI + A^T - \frac{1}{r}Q(sI - A)^{-1}bb^T) = 0 \quad (4.196)$$

A karakterisztikus egyenlet (a levezetést mellőzve) a következő alakra hozható:

$$\det(sI - A) \det(-sI - A^T) \cdot \quad (4.197)$$

$$\cdot \det[r + b^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}b] = 0 \quad (4.198)$$

A Hamilton rendszer pólusai tartalmazzák a zárt rendszer pólusait, valamint a pólusok ellenkező előjelű értékeit egyaránt.

Vizsgáljuk meg, hogy a szabályozó tervezésben alkalmazott **súlyozás** hogyan hat a szabályozott rendszer pólusaira. Válasszuk meg az irányítójelre adott súlyt a következőképpen:

$$r = \rho r_0,$$

ahol r_0 rögzített és ρ értékét változtatjuk.

Válasszuk az irányítójelre adott súlyt nagy értékre: $\rho \rightarrow \infty$.

Az irányítási feladatot *minél kisebb irányítójellel* kívánjuk megoldani.

A karakterisztikus egyenlet a következő alakhoz tart:

$$\det(sI - A) \det(-sI - A^T) \det(\rho r_0) = 0 \quad (4.199)$$

A szabályozott rendszer pólusai megközelítik az eredeti rendszer stabil pólusait, valamint az eredeti rendszer nemstabil pólusainak a képzetes tengelyre való tükörképét.

Válasszuk az irányítójelre adott súlyt kis értékre: $\rho \rightarrow 0$.

Az irányítási feladatban nincs előírás az irányítójel nagyságára nézve.

A karakterisztikus egyenlet a következő alakhoz tart:

$$\det(sI - A) \det(-sI - A^T) \cdot \quad (4.200)$$

$$\cdot \det[b^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}b] = 0 \quad (4.201)$$

Átalakítva:

$$\det [b^T \text{adj}(-sI - A^T)Q \text{adj}(sI - A)b] = 0 \quad (4.202)$$

A szabályozott rendszer pólusai megközelítik az eredeti rendszer bal félsíkra eső zérusait vagy az eredeti rendszer jobb oldali zérusainak a képzetes tengelyre való tükörképét, illetve végtelenül nagy negatív értéket vesznek fel.

4.19. Példa. Tervezzünk optimális állapot visszacsatolást LQ módszerrel a következő rendszerhez:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.203)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (4.204)$$

A rendszer pólusai $p = [0.302; -3.302]$, zérusai $z = -4$. A tervezési paraméterek: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $r = \rho$ változó. Megjegyzés: Az első állapotváltozót tekintjük kimenetnek, a többi állapotváltozóra 0 súlyt alkalmazunk a tervezésben.

Megoldás:

- $\rho = 1$ választással a Hamilton mátrix sajátértékei: $p_H = [\pm 3.218; \pm 1.281]$, míg a tervezett szabályozott rendszer pólusai: $p_z = [-3.218; -1.281]$,
- $\rho \rightarrow \infty$ választással a Hamilton mátrix sajátértékei: $p_H = [\pm 3.302; \pm 0.302]$, míg a tervezett szabályozott rendszer pólusai: $p_z = [-3.302; -0.302]$,
- $\rho \rightarrow 0$ választással a Hamilton mátrix sajátértékei: $p_H = [\pm 9.99 \cdot 10^4; \pm 4]$, míg a tervezett szabályozott rendszer pólusai: $p_z = [-9.99 \cdot 10^4; -4]$,

4.20. Példa. Tervezzünk optimális állapot visszacsatolást LQ módszerrel a következő nem minimálfázisú rendszerhez:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.205)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (4.206)$$

A rendszer pólusai $p = [2.500 \pm 0.866]$, zérusai $z = 4$ (pozitív). A tervezési paraméterek: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $r = \rho$ változó. Megjegyzés: Az első állapotváltozót tekintjük kimenetnek, a többi állapotváltozóra 0 súlyt alkalmazunk a tervezésben.

Megoldás:

- $\rho = 1$ választással a Hamilton mátrix sajátértékei:
 $p_H = [2.651 \pm 1.015i; -2.651 \pm 1.015i]$,
 míg a tervezett szabályozott rendszer pólusai: $p_z = [-2.651 \pm 1.015i]$,
- $\rho \rightarrow \infty$ választással a Hamilton mátrix sajátértékei:
 $p_H = [2.500 \pm 0.866i; -2.500 \pm 0.866i]$,
 míg a tervezett szabályozott rendszer pólusai: $p_z = [-2.500 \pm 0.866i]$,
- $\rho \rightarrow 0$ választással a Hamilton mátrix sajátértékei:
 $p_H = [\pm 9.99 \cdot 10^4; \pm 4]$,
 míg a tervezett szabályozott rendszer pólusai: $p_z = [-9.99 \cdot 10^4; -4]$,

A módszer alkalmazásának feltétele:

- Az állapotvektor elemei mértek legyenek.
- Az állapottér reprezentáció teljesítse az irányíthatósági feltételt.

A módszer előnyei:

- A szabályozott rendszer stabilis.
- A szabályozással szemben megfogalmazott minőségi követelmények a Q és r súlyok megválasztásával beépíthetők a szabályozás tervezésbe.

A módszer hátrányai:

- A különböző minőségi követelmények közötti ellentmondások és konfliktusok miatt a súlyok megválasztása bonyolult feladat. A súlyok tervezése során törekedni kell a minőségi követelmények közötti összhang megteremtésére. Emiatt az elért minőségi tulajdonságokat utólagosan ellenőrizni kell.
- A Riccati egyenlet megoldása numerikusan nehéz feladat.

4.5. Jelkövető irányítástervezés

4.5.1. Állapot szeparálás módszere

Induljunk ki az alábbi integráló tulajdonságú rendszerből, melynek állapotter reprezentációja a következő:

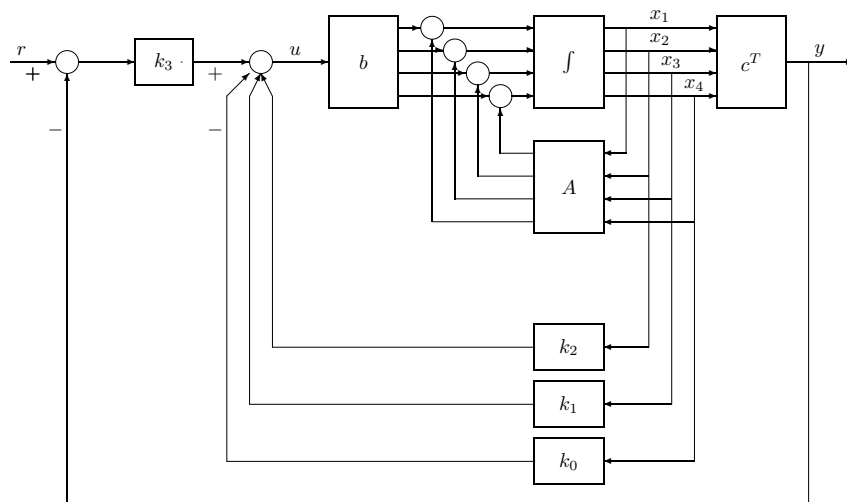
$$\dot{x} = Ax + bu \quad (4.207)$$

$$y = cx \quad (4.208)$$

Integráló tulajdonságú rendszerhez jelkövetést biztosító szabályozó struktúra egy output visszacsatolt soros kompenzátort kombinál az állapot-visszacsatolással.

Ha a rendszer maga integráló tulajdonságú, és a rendszer kimenetét is visszacsatoljuk, akkor ez a struktúra automatikusan biztosítja a referencia jelkövetést és az állapot-visszacsatolás a pólusok megfelelő elhelyezését.

Válasszuk meg az állapotvektort úgy, hogy az első komponense éppen a rendszer kimenete legyen. Ebben a rendszerben az x_1 állapotjelet nem csatoljuk vissza, helyette a rendszer kimenőjelét csatoljuk vissza negatívan és az így képzett különbséget erősítjük a k_{n-1} értékkel.



4.20. ábra. Állapot szeparálás módszere

Ekkor a bemenőjel és a kimenőjel az állapotvektor elemeivel a következőképpen

írható fel:

$$\begin{aligned} u &= -k_{n-1}(y-r) - k_{n-2}x_2 - \dots - k_1x_{n-1} - k_0x_n \\ &= -k_{n-1}x_1 - k_{n-2}x_2 - \dots - k_1x_{n-1} - k_0x_n + k_{n-1}r \\ &= -k^T x + k_{n-1}r \end{aligned} \quad (4.209)$$

$$y = x_1 \quad (4.210)$$

ahol

$$k^T = [k_{n-1} \quad \dots \quad k_1 \quad k_0] \quad (4.211)$$

az állapotvisszacsatolás komponensei.

Az input jelet az állapotegyenletbe helyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b(-k^T x + k_{n-1}r) \\ &= (A - bk^T)x + bk_{n-1}r. \end{aligned} \quad (4.212)$$

A követési hiba:

$$e = r - y = r - x_1.$$

- A szabályozott rendszer pólusai az $A - bk^T$ mátrix sajátértékei, ami azt jelenti, hogy a fenti struktúra alkalmazásával a pólus allokációs technika gyakorlatilag változtatás nélkül használható.
- A szabályozott rendszer állapotmátrixa: $A_c = A - bk^T$ és input vektora: $b_c = bk_{n-1}$.

Megjegyzés: állapotér átalakítása

A megoldásban feltételeztük, hogy az állapotváltozókat sikerült úgy összeállítani, hogy a rendszer kimenete azonos az első állapotváltozóval.

Ha ez nincs így, akkor egy transzformációt kell végrehajtani.

Tegyük fel, hogy a rendszer átviteli függvénye a következő:

$$Y(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} U(s) \quad (4.213)$$

Az első állapotváltozót úgy választjuk meg, hogy az azonos legyen a rendszer kimenetével: $x_1 = y$. A többi állapotváltozó megválasztása a következőképpen történik:

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\dots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{aligned} \quad (4.214)$$

ahol $\beta_1 = b_1$, $\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1$, $\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1$, ..., $\beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \dots - a_{n-2}\beta_1$. Végül az x_n elsőrendű deriváltjára a következő alakot kapjuk:

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u. \quad (4.215)$$

ahol $\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \dots - a_{n-1}\beta_1$.

A fentiek alapján az állapottér reprezentáció a következő alakot kapjuk:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \quad (4.216)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] x \quad (4.217)$$

A hasonlósági transzformációval kapott állapottérben az első állapotváltozó a kimenőjellel azonos.

4.5.2. Struktúra módosítás módszere

Egy integrátort nem tartalmazó rendszer esetén a jelkövetést úgy kell megoldani, hogy integráló típusú soros kompenzátort alkalmazunk a visszacsatolásban.

Ez állapot-visszacsatolást tartalmazó rendszerben azt jelenti, hogy az állapot-visszacsatolt struktúrát egy olyan output visszacsatolással kombináljuk, amely integráló tulajdonságú. Ebben a struktúrában valamennyi állapotvektort visszacsatoljuk a rendszer bemenetére. Ezen túlmenően egy integráló elemet építünk a rendszer előrevető ágába és ezt k_i -vel erősítjük. Fentiek miatt ebben a struktúrában $n + 1$ számú erősítést alkalmazunk.

Egy új állapotváltozót definiálunk:

$$z = \int_0^t (r - y) dt \quad (4.218)$$

Az állapot-visszacsatolt struktúrával a rendszer állapottér reprezentációja a következő:

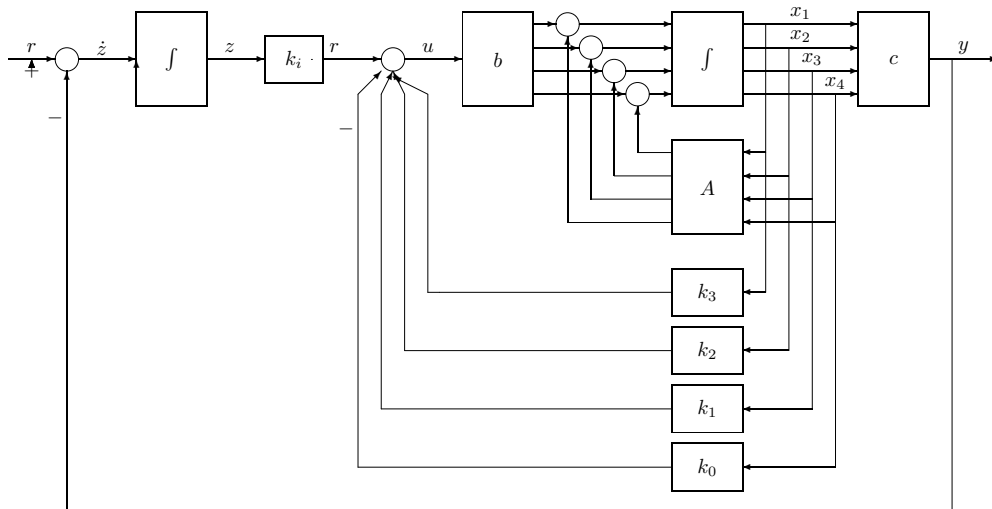
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (4.219)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (4.220)$$

$$u(t) = -k^T x(t) + k_i z(t) \quad (4.221)$$

$$\dot{z}(t) = r(t) - y(t) \quad (4.222)$$

Az állapot-visszacsatolt struktúrában a bemenőjelet az x_1 , x_2 , x_n komponenseken kívül



4.21. ábra. Struktúra módosítás módszere

az $r - y$ hibajel figyelembe vételével állítjuk elő. A rendszer állapotér struktúráját a z komponenssel bővítjük, s ebben a bővített rendszerben végezzük el a tervezést.

Az állapotegyenletek a következők:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (4.223)$$

$$\dot{z}(t) = -cz(t) + r(t) \quad (4.224)$$

A kimeneti egyenlet:

$$y = cx(t) \quad (4.225)$$

A bővített rendszer állapotér reprezentációja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (4.226)$$

$$y(t) = [c^T \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (4.227)$$

Az irányítójel összefüggése:

$$u = -k^T x(t) + k_i z(t) \quad (4.228)$$

Az állapotér reprezentáció:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -c^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -bk^T & bk_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ &= \begin{bmatrix} A - bk^T & bk_i \\ -c^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \end{aligned} \quad (4.229)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \quad (4.230)$$

A követési hiba:

$$e = r - y = r - cx_1.$$

Ezzel a struktúrával automatikusan elérjük, hogy a szabályozott rendszer jelkövetést biztosítson. A pólus allokációt a bővített rendszerben végezzük el. A továbbiakban a hagyományos pólus allokációs technika használható.

Az állapotvisszacsatolt erősítés $n + 1$ komponensű:

$$k_a^T = [k_{n-1} \quad \dots \quad k_1 \quad k_0 \quad k_i]. \quad (4.231)$$

Az állapotvisszacsatolás tervezésének feltétele, hogy az irányíthatósági mátrix teljes rangú legyen: $\text{rang} \left(\begin{bmatrix} A - bk^T & bk_i \\ -c^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = n + 1$.

4.5.3. Példák a jelkövető irányításra

4.21. Példa (Házi feladat). Rajzoljon fel egy jelkövető irányítási struktúrát az alábbi rendszerhez, amelyben a követendő jel az x_1 állapot. Formalizálja az irányítójel és az x_1, x_2, x_3 állapotok közötti kapcsolatot.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T = [0 \quad 2 \quad 10]$$

4.22. Példa (Házi feladat). Rajzoljon fel egy jelkövető irányítási struktúrát az alábbi rendszerhez, amelyben a követendő jel az x_1 állapot. Formalizálja az irányítójel és az x_1, x_2, x_3 állapotok közötti kapcsolatot és írja fel az irányítástervezés alapjául szolgáló modellt.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T = [0 \quad 2 \quad 10]$$

4.23. Példa. Tekintsük példaként a következő integráló tulajdonságú rendszert:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (4.232)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] x \quad (4.233)$$

Az első állapot azonos a rendszer kimenetével. Tervezzünk jelkövető szabványozást LQ módszerrel. Az LQ tervezés súlyozó tényezői:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1 \quad (4.234)$$

Az LQ tervezés eredménye:

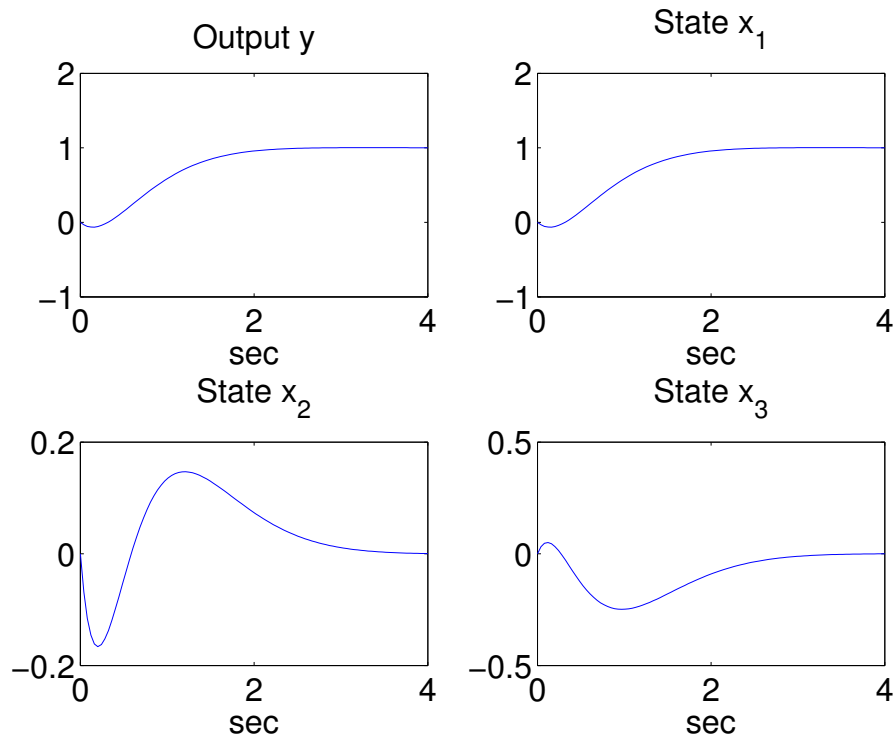
$$k^T = [-1 \quad 8 \quad 7]. \quad (4.235)$$

A zárt rendszer állapotter reprezentációja:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -10 \\ 2 & -15 & -12 \\ -1 & 10 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (4.236)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] x \quad (4.237)$$

A megoldás szimulációját az alábbi ábrásor illusztrálja:



4.24. Példa. Tekintsük példaként az alábbi állapotér reprezentációban adott rendszert:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (4.238)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x \quad (4.239)$$

A bővített rendszer állapotér reprezentációja:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.240)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x \quad (4.241)$$

Az LQ tervezés súlyozó tényezői:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1 \quad (4.242)$$

Az LQ tervezés eredménye:

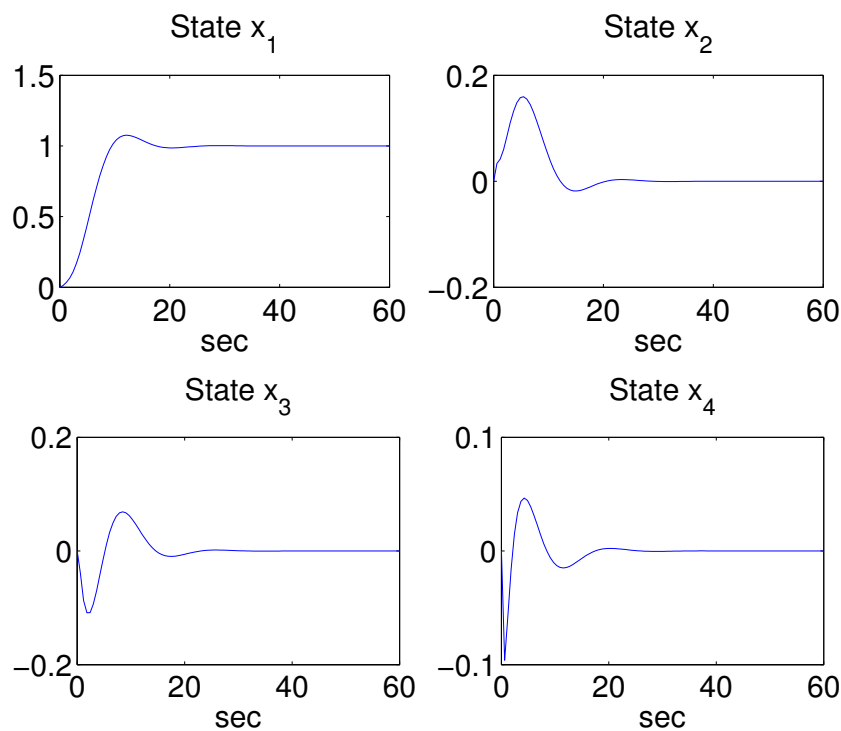
$$k^T = [-0.4535 \quad 1.1147 \quad 2.7423 \quad 1]. \quad (4.243)$$

A zárt rendszer állapotter reprezentációja:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2.5465 & -3.1147 & -3.7423 & -1.0000 \\ 2.2267 & -1.5573 & -1.3712 & -0.5000 \\ -0.0931 & -1.2294 & -3.4846 & -2.0000 \\ -1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.244)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x \quad (4.245)$$

A megoldás szimulációját az alábbi ábrásor illusztrálja:



4.22. ábra. A 4.24 példa megoldása

Megjegyezzük, hogy a témával kapcsolatban további példákat találni az irodalomban [6, 1, 19, 22].

4.6. Megfigyelőtervezés

4.6.1. Tervezési feladat

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a rendszer állapotát mérni tudjuk. Az állapot ismerete szükséges az állapot-visszacsatolt szabályzó tervezéséhez. Ha nem ismerjük az $x(t)$ állapotvektort, akkor egy olyan $\hat{x}(t)$ (azonos dimenziójú) mennyiséget képzünk, mely aszimptotikusan közelíti az eredeti állapotot, tehát

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t) \quad (4.246)$$

miközben $t \rightarrow \infty$.

Ha ismert (A, b, c^T) akkor

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) \quad (4.247)$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t) \quad (4.248)$$

$$\hat{x}(t) |_{t=0} = \hat{x}_0 \quad (4.249)$$

ahol az állapot-becslés hibája $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ minden $t \in [0, \infty)$. Az állapotbecslés hibájának időbeli változását annak differenciál egyenlete adja meg:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (4.250)$$

Levezethető, hogy $e(t) |_{t=0} = \hat{e}_0$ kezdeti értékkel egy homogén lineáris differenciál-egyenlet:

$$\dot{e}(t) = Ae(t). \quad (4.251)$$

Vizsgáljuk az egyenlet megoldását:

$$s. e(s) - e_0 = Ae(s) \quad (4.252)$$

$$e(s) = (sI - A)^{-1}e_0 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}e_0\} \quad (4.253)$$

$$e(s) = e^{At}e_0 \quad (4.254)$$

Ha e_0 nem zérus, akkor az állapothiba lecseng, feltéve hogy az A mátrix stabil azaz, $Re(\lambda_i) < 0, i = 1..n$. és így $e(t) \rightarrow 0$ miközben $t \rightarrow \infty$.

Az állapotegyenlet:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + \ell\{y(t) - \hat{y}(t)\} \quad (4.255)$$

ahol $\ell = [\ell_{n-1} \ \ell_{n-2} \ \dots \ \ell_0]^T$, ℓ -nek n sora van. Ekkor az állapothiba

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (4.256)$$

$$= (A - \ell c^T)e(t), \quad (4.257)$$

ha adott $e(t) |_{t=0} = \hat{e}_0$ akkor $e^{(A - \ell c^T)t}e_0$. Így az A minden elemét módosítani tudjuk, és minden sajátértékét tetszőlegesen meg tudjuk választani.

- Ha az (A, b) irányítható volt hozzá rendelhetünk egy ún. irányíthatósági állapotér reprezentációt, $n = 2$ -re a következőképpen :

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c_c^T = [b_1 \quad b_0] \quad (4.258)$$

- Ha az (c^T, A) megfigyelhető hozzá rendelhetünk egy ún. megfigyelhetőségi alakot, $n = 2$ -re a következőképpen :

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix}, b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, c_o^T = [1 \quad 0] \quad (4.259)$$

A két felírási mód között a dualitás teremt kapcsolatot. A két állapotér ekvivalens állapotterek, melynek bizonyítására írjuk fel az átviteli függvényeiket:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ &= c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c \\ &= c_o^T (sI - A_o)^{-1} b_o \end{aligned} \quad (4.260)$$

$$\begin{aligned} (sI - A_o)^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} s + a_1 & -1 \\ a_0 & s \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A_o)}{\det(sI - A_o)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}}{(s + a_1)s + a_0} \end{aligned} \quad (4.261)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{aligned} \quad (4.262)$$

Ez az (A_o, b_o, c_o^T) reprezentáció átviteli függvénye, és azonos az irányíthatósági állapotérből képzett átviteli függvénnyel.

4.6.2. Állapotmegfigyelő tervezése

A megfigyelhetőségi és az irányíthatósági alakok között a dualitás teremt kapcsolatot. A két állapottér ekvivalens állapotterek:

$$A_o = A_c^T, \quad (4.263)$$

$$b_o = c_c, \quad (4.264)$$

$$c_o^T = b_c^T, \quad (4.265)$$

A megfigyelő tervezés adott (A_o, b_o, c_o^T) esetén, ismert $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}$, mellett $\ell_i = \bar{a}_i - a_i$ ($i = 0, \dots, (n-1)$) megválasztásával történik.

A módosult állapotmátrix alakja a következő:

$$\bar{A}_o = A_o - \ell c^T = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_{n-1} \\ \ell_{n-2} \\ \vdots \\ \ell_0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (4.266)$$

A megfigyelő ℓ erősítésére vonatkozó összefüggést dualitással kapjuk, ahol elvégezzük az alábbi megfeleltetéseket:

$$A \rightarrow A^T, \quad (4.267)$$

$$b \rightarrow c^T, \quad (4.268)$$

$$k \rightarrow \ell, \quad (4.269)$$

amivel ellenőrizhető, hogy $C(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{O}(\mathbf{A}^T, \mathbf{c})^T$.

$$\ell^T = k^T = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a})^T \tau(a)^{-1} \mathbf{O}(\mathbf{A}^T, \mathbf{c})^T \quad (4.270)$$

A dualitási elvből levezetett és a megfigyelő tervezésére vonatkozó Bass Gura formula az alábbi:

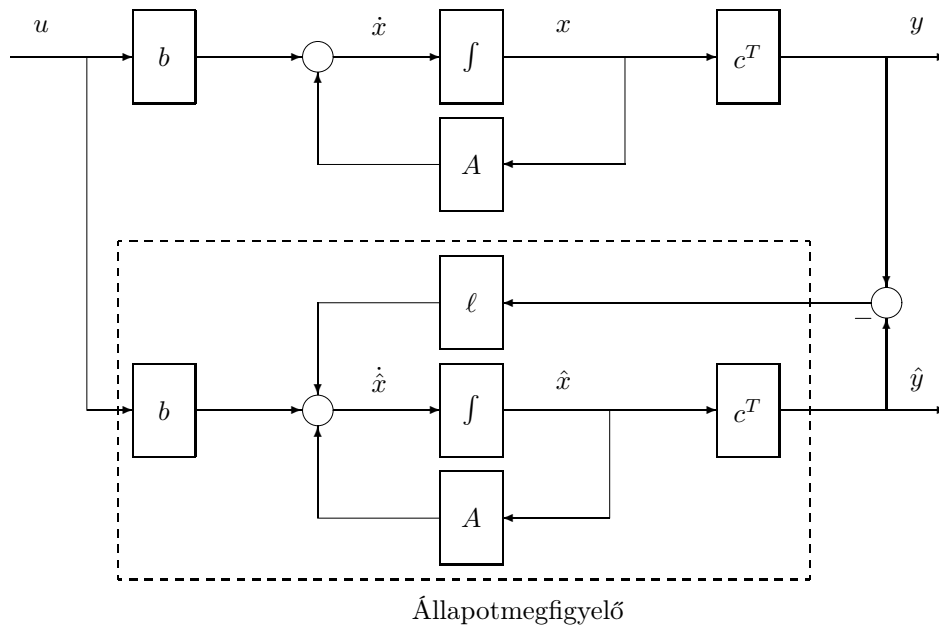
$$\ell = \mathbf{O}(\mathbf{A}^T, \mathbf{c})^{-1} \tau(a)^{-T} (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a}) \quad (4.271)$$

ahol $\boldsymbol{\alpha}$ a megfigyelő karakterisztikus egyenletének együtthatóiból képzett vektor. Az állapotmegfigyelővel ellátott körben a megfigyelő, mint dinamikus rendszer

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_o \hat{x}(t) + b_o u(t) \quad (4.272)$$

$$\hat{y}(t) = c_o^T \hat{x}(t) \quad (4.273)$$

[tbp]



4.23. ábra. Állapotmegfigyelő

4.6.3. Illusztrációs példák

4.25. Példa. Tervezzen megfigyelőt az alábbi megfigyelhetőségi állapotter reprezentációban ismert rendszerre:

$$A_o = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad b_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c_o^T = [1 \quad 0] \quad (4.274)$$

A tervezést pólusallokációs módszerrel végezze el $p_1 = -1$ és $p_2 = -2$ pólusokkal. Írja fel a megfigyelő állapotegyenletét! Adja meg a megfigyelő állapotegyenletének ℓ vektorát!

Megoldás:

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A_o) = s^2 + 4s + 3$$

$$a_1 = 4; a_0 = 3$$

A megfigyelt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

$$\bar{a}_1 = 3; \bar{a}_0 = 2$$

Az eredeti és tervezett karakterisztikus polinom együtthatók alapján az megfigyelő erősítései a következők: $\ell_1 = -1; \ell_0 = -1$

$$\ell = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.275)$$

Ellenőrzés: A megfigyelőt alkalmazó rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} & \det [sI - A_o + \ell c_o^T] \\ &= \det \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \det \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 \end{aligned} \quad (4.276)$$

4.26. Példa. Tervezzon megfigyelőt $p_1 = -1$ és $p_2 = -3$ pólusokkal az alábbi állapotér reprezentációban ismert rendszerre:

$$A_c = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_c^T = [1 \quad 2] \quad (4.277)$$

A megfigyelő tervezését az állapotvisszacsatolásnál megismert elvek alapján végezzük el. Az irányíthatósági alakból a megfigyelhetőségi alak közvetlenül megkapható:

$$A_o = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad b_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c_o^T = [1 \quad 0] \quad (4.278)$$

A megfigyelő tervezését az A_o és b_o mátrixok alapján végezzük el pólusallokációs módszerrel. Vegyük észre, hogy ez a rendszer nem irányíthatósági alakú, ezért a transzformációs mátrixot meg kell határozni.

A rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det (sI - A_c) = s^2 - 4s + 3 \quad (4.279)$$

$$a_1 = -4; a_0 = 3$$

A szabályozott rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 1)(s + 3) = s^2 + 4s + 3 \quad (4.280)$$

$$\bar{a}_1 = 4; \bar{a}_0 = 3$$

Az eredeti és tervezett karakterisztikus polinomok együtthatói alapján az erősítések a következők: $k_o^T = [8 \ 0]$. Az erősítő a megfigyelhetőségi alakra alkalmazható, ezért át kell transzformálni az eredeti állapotterbe.

A transzformációs mátrix számítása:

$$\begin{aligned} T^{-1} &= C\tau = [b_o \ A_o b_o] \begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -11 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.281)$$

$$T = \frac{\text{adj}(T^{-1})}{\det(T^{-1})} = \frac{\begin{bmatrix} -11 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{-15} = \begin{bmatrix} 0.7333 & 0.1333 \\ 0.1333 & -0.0667 \end{bmatrix} \quad (4.282)$$

Az erősítő számítása:

$$k_c^T = k_o^T T = [5.8667 \ 1.0667] \quad (4.283)$$

A dualitás elvét használva a megfigyelő értéke:

$$l_c = k_c = \begin{bmatrix} 5.8667 \\ 1.0667 \end{bmatrix} \quad (4.284)$$

4.27. Példa. Tervezzen megfigyelőt $p_1 = -1$ és $p_2 = -3$ pólusokkal az alábbi állapotter reprezentációban ismert rendszerre:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_d = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad c_d^T = [3 \ 5]. \quad (4.285)$$

A megfigyelő tervezéséhez előállítjuk az állapotter reprezentációs mátrixokat:

$$A_t = A_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.286)$$

$$b_t = c_d = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (4.287)$$

$$c_t^T = b_d^T = [-0.5 \ 0.5] \quad (4.288)$$

A rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A_d) = s^2 - 4s + 3$$

$$a_1 = -4; a_0 = 3$$

A szabályozott rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 1)(s + 3) = s^2 + 4s + 3$$

$$\bar{a}_1 = 4; \bar{a}_0 = 3$$

Az eredeti és tervezett karakterisztikus polinomok együtthatói alapján az erősítés értékei: $k_t^T = [8 \ 0]$. Az erősítő jelenleg egy mesterséges állapotterben van, amit át kell transzformálni az eredeti állapotterbe.

A transzformációs mátrix számítása:

$$T^{-1} = C\tau = [b_t \ A_t b_t] \begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.289)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (4.290)$$

ahol $\det(sI - A_t) = s^2 - 4s + 3$, $\bar{a}_1 = -4$.

A transzformációs mátrix:

$$T = \frac{\text{adj}(T^{-1})}{\det(T^{-1})} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.291)$$

Az erősítő számítása:

$$k_d^T = k_t^T T = [-1.3333 \ 2.4] \quad (4.292)$$

A dualitás elvét használva a megfigyelő értéke:

$$\ell_d = k_d = \begin{bmatrix} -1.3333 \\ 2.4 \end{bmatrix} \quad (4.293)$$

4.28. Példa. Tervezzon megfigyelőt az alábbi megfigyelhetőségi állapotter reprezentációban ismert rendszerre:

$$A_o = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_o^T = [1 \ 0 \ 0] \quad (4.294)$$

A tervezést pólusallokációs módszerrel végezze el $p_1 = -1, p_2 = -3, p_3 = -10$ pólusokkal. Írja fel a megfigyelő állapotegyenletét! Adja meg a megfigyelő állapotegyenletének ℓ vektorát! Rajzolja fel a megfigyelő blokkdiagramját!

Megoldás:

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(sI - A_o) = s^3 - 4s^2 + 3s - 2$$

$$a_2 = -4; a_1 = 3; a_0 = -2$$

A megfigyelt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = (s + 1)(s + 3)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 43s + 30$$

$$\bar{a}_2 = 14; \bar{a}_1 = 43; \bar{a}_0 = 30$$

Az eredeti és tervezett karakterisztikus polinom együtthatók alapján az megfigyelő erősítései a következők: $\ell_2 = 18; \ell_1 = 40; \ell_0 = 32$

$$\ell = \begin{bmatrix} 18 \\ 40 \\ 32 \end{bmatrix} \quad (4.295)$$

4.29. Példa. Adott egy rendszer az alábbi állapotér reprezentációs alakban:

$$A_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad b_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c_o^T = [1 \quad 0]$$

Tervezze meg a megfigyelő állapotegyenletének ℓ vektorát oly módon, hogy az instabil pólust az imaginárius tengelyre tükrözze, míg a stabil pólusot helyben hagyja! Írja fel a megfigyelő állapotegyenletét!

Megoldás:

Az eredeti rendszer karakterisztikus polinomja és pólusai:

$$\det(sI - A_o) = s^2 - s - 2$$

$$a_1 = -1; a_0 = -2$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 2$$

A tervezett megfigyelő pólusai:

$$\bar{\lambda}_1 = -1; \bar{\lambda}_2 = -2$$

A megfigyelt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$(s - \bar{\lambda}_1)(s - \bar{\lambda}_2) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

$$\bar{a}_1 = 3; \bar{a}_0 = 2$$

Az eredeti és tervezett karakterisztikus polinom együtthatók alapján az megfigyelő erősítései a következők: $\ell_1 = 4; \ell_0 = 4$

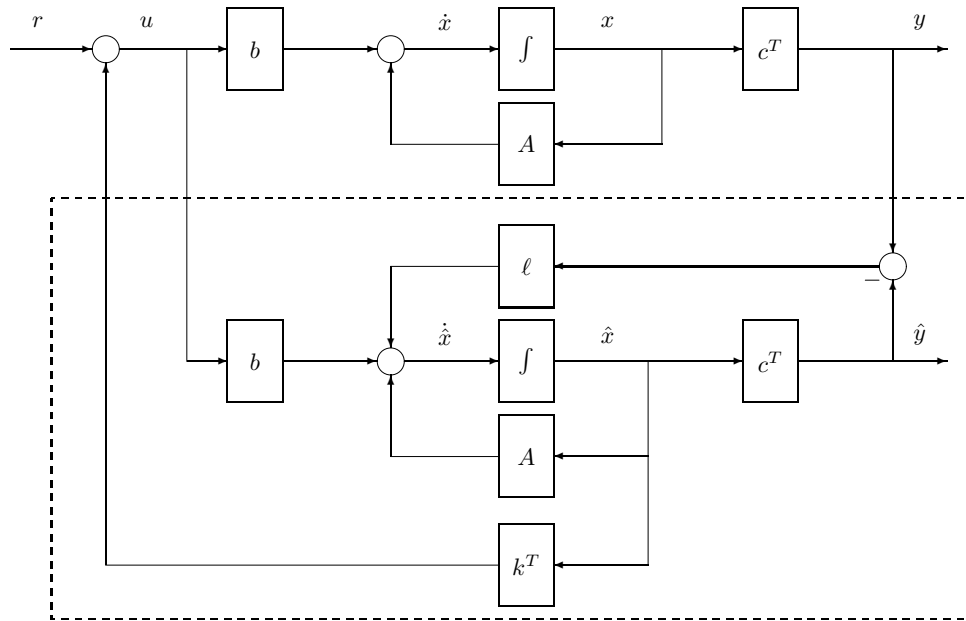
$$\ell = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Megjegyezzük, hogy a témával kapcsolatban további példákat találni az irodalomban [6, 2, 3, 17, 22].

4.7. Dinamikus állapotvisszacsatolás

A szabályozást a becsült állapotvisszacsatolással képezve kimenőjel visszacsatolásról beszélünk.

$$u(t) = -k^T \hat{x}(t) + r(t) \tag{4.296}$$



Állapotmegfigyelővel ellátott állapot-visszacsatolt szabályzási kör

4.24. ábra. Állapotmegfigyelő

Kombinált állapot visszacsatolást és megfigyelőt tartalmazó szabályozó struktúra:
Rendszer

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{4.297}$$

$$y = c^T x \tag{4.298}$$

Megfigyelő

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - \hat{y}) \tag{4.299}$$

$$\hat{y} = c^T \hat{x} \tag{4.300}$$

Írányítás:

$$u = -k^T \hat{x} + r \tag{4.301}$$

A becsült állapot dinamikája:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu + l(y - \hat{y}) \\ &= A\hat{x} - bk^T\hat{x} + br + ly - lc^T\hat{x} \\ &= (A - bk^T - lc^T)\hat{x} + ly + br\end{aligned}\quad (4.302)$$

A becslés hibája: $e = x - \hat{x}$,

továbbá a hiba dinamikája: $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$.

Részletesen kifejtve:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= (Ax + bu) - [A\hat{x} - bk^T\hat{x} - lc^T\hat{x} + lc^T x] \\ &= (A - lc^T)x - (A - lc^T)\hat{x} \\ &= (A - lc^T)e\end{aligned}\quad (4.303)$$

Kombináljuk ezt az egyenletet a rendszer állapot egyenletével:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A - lc^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u\quad (4.304)$$

Figyelembe véve a control inputot:

$$u = -k^T\hat{x} + r\quad (4.305)$$

az állapotegyenlet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - bk^T\hat{x} + br \\ &= Ax - bk^T x + bk^T e + br \\ &= (A - bk^T)x + bk^T e + br\end{aligned}\quad (4.306)$$

Kombinált rendszer:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk^T & bk^T \\ \mathbf{0} & A - lc^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r\quad (4.307)$$

A zárt rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} sI - A + bk^T & -bk^T \\ \mathbf{0} & sI - A + lc^T \end{bmatrix} \\ = \det(sI - A + bk^T) \det(sI - A + lc^T)\end{aligned}\quad (4.308)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} &= \\
 \det \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) &= \\
 \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \\
 \det(A) \det(C) & \quad (4.309)
 \end{aligned}$$

A szabályozott rendszer karakterisztikus egyenlete a következő két egyenlettel (és azok megoldásával) azonos:

$$\det(sI - A + bk^T) = 0 \quad (4.310)$$

$$\det(sI - A + lc^T) = 0 \quad (4.311)$$

Következtetés:

A szabályozott rendszer pólusai az LQ rendszer karakterisztikus egyenletének és a megfigyelő rendszer karakterisztikus egyenletének megoldásai.

4.3. Tétel. *A megfigyelővel és állapot-visszacsatolt szabályzóval ellátott zárt rendszer karakterisztikus polinomja*

$$\det(sI - A_z) = \underbrace{\det(sI - A + bk^T)}_{\text{állapot-visszacsatolás}} \cdot \underbrace{\det(sI - A + lc^T)}_{\text{megfigyelő}} \quad (4.312)$$

4.1. Következmény. *Az állapot-visszacsatolt szabályzó és a megfigyelő függetlenül tervezhető. Az optimális állapot visszacsatolás és a megfigyelő tervezés egymástól függetlenül végrehajtható. A szabályozott rendszer struktúrájában az egyes tervezési eredményeket kombináljuk.*

- k^T megválasztásával az állapotvisszacsatolást tervezzük és a pólusokat az alábbi értékekbe helyezzük:

$$\operatorname{Re} [\lambda_i(A - bk^T)] < 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.313)$$

- l megfigyelő tervezésével a pólusokat a következő helyekre tesszük:

$$\operatorname{Re} [\lambda_i(A - lc^T)] < 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.314)$$

4.30. Példa. *Az inverz inga egy egyenes pályán mozgó kocsiból és arra csuklóval felerősített, a koci mozgásának irányában elforgatható rúdból álló mechanikai rendszer.*

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 - \frac{g}{\ell}} U(s) \quad (4.315)$$

Tegyük fel, hogy állapotviszacsatolást terveztünk pólus allokációs módszerrel, amelyben a pólusokat $p_1 = -1$ és $p_2 = -2$ helyekre tettük. A tervezett állapotviszacsatolás:

$$k^T = [3 \quad 3] \quad (4.316)$$

Tervezzünk állapotmegfigyelőt a szabályozott inverz inga modellhez, ha a megfigyelő pólusai $\bar{p}_{1,2} = -1$.

Megoldás:

Az állapotter reprezentáció megfigyelhetőségi alakja:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (4.317)$$

$$y = [1 \quad 0] x \quad (4.318)$$

A tervezett rendszer karakterisztikus polinomja: $\bar{a}(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$, ahonnan $\bar{a}_1 = 2$, $\bar{a}_0 = 1$. Mivel $a_1 = 0$ és $a_0 = -1$, ezért az állapotmegfigyelő erősítési mátrixa:

$$\ell_0 = \bar{a}_0 - a_0 = 1 - (-1) = 2 \quad (4.319)$$

$$\ell_1 = \bar{a}_1 - a_1 = 2 - (0) = 2 \quad (4.320)$$

A tervezett megfigyelő:

$$\ell = [2 \quad 2]^T \quad (4.321)$$

Irodalomjegyzék

- [1] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Linear Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [2] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [3] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal Control. Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [4] K.J. Astrom and R.M. Murray. *Feedback systems: An introduction for scientist and engineers*. Princeton University Press, 2011.
- [5] M Athans. The role and use of stochastic linear quadratic gaussian problem in control system design. *IEEE Trans. Automatic Control*, 16:529–552, 1971.
- [6] M. Athans and P.L. Falb. *Optimal control*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [7] G. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith. *μ -analysis and synthesis toolbox*. The Mathworks Inc., 1993.
- [8] J. Bokor and P. Gáspár. *Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal*. TypoTex Kiadó, 2008.
- [9] F. Csáki. *Fejezetek a szabályozástechnikából. Állapotegyenletek*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
- [10] R.C. Dorf and R.H. Bishop. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Publ. Comp.Inc., 1984.
- [11] T. Kailath. *Linear systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1980.
- [12] R. Kalman. On the general theory of control systems. *Proc. 1st IFAC Congress, Moscow*, 1:481–492, 1960.

- [13] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Journal of Basic Engineering*, 82D:35–45, 1960.
- [14] L. Keviczky, R. Bars, J. Hetthéssy, and Cs. Bányász. *Szabályozástechnika*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [15] L. Keviczky and Cs. Bányász. *Két-szabadságfokú irányítási rendszerek*. Universitas-Gyor, 2012.
- [16] K. Kurutz. *Szabályozástechnika I*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1981.
- [17] B. Lantos. *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2001.
- [18] L. Ljung. System identification: Theory for the user. *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*, 1987.
- [19] Maciejowski. *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley, 1989.
- [20] R. Tuschák. *Szabályozástechnika*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994.
- [21] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1998.
- [22] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.