Sorbanállás, készletgazdálkodás

CI LaTeX

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Sorbanállás, készletgazdálkodás

írta CI LaTeX

Publication date 2013
Szerzői jog © 2013 CI LaTeX

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Tartalom

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Sorbanállás, készletgazdálkodás

1. 1 Készletgazdálkodás

1.1. 1.1 Optimális tételnagyság

A megrendelendő tételek optimális nagyságát határozzuk meg az alábbi feltételek esetén:

1. Egy bizonyos anyag egy adott T időszakra vonatkozó készletezési problémáját vizsgáljuk.

2. Az adott időszak összes szükséglete R .

3. A vizsgált anyagból a felhasználás egyenletes, a kereslet időegységenként állandó

$$r = \frac{R}{T}.$$

4. Az anyagból nem engedhető meg hiány.

5. Rendelésnél az új tétel azonnal beérkezik.

6. A rendelési költség c_1.

7. A fajlagos beszerzési költség (egységár) c_b .

8. A készletezési költség (egységnyi készlet időegységre eső raktározási költsége) c_2.

Kérdésünk: mekkora $q_1, q_2, \ldots, q_n$ nagyságú tételekben és milyen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ idő eltelése után szerezzük be az R szükségletet oly módon, hogy az összes költség minimális legyen.

Megmutatjuk, hogy a költségek összege akkor lesz minimális, ha egyenlő időközönként egyenlő nagyságú tételeket rendelünk és mindig akkor töltjük fel a raktárt, amikor a készlet nullára csökken.

Legyen a rendelések száma n , ekkor a teljes rendelési költség $c_1 n$. A beszerzés költsége (ár) $c_b R$.

Az egyes rendelési tételek nagysága legyen rendre $q_1, q_2, \ldots, q_n$ és ezek elégí tsék ki a szükségleteket $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ideig. Az átlagos tárolt készletnagyság a q_i értékek fele, í gy a raktározási költség

$$c_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i q_i}{2}.$$

Az egységnyi idő alatti felhasználás r , ebből

$$t_i = \frac{q_i}{r}.$$

Az összes költség

$$c_1 n + c_b R + c_2 \left(\frac{t_1 q_1}{2} + \frac{t_2 q_2}{2} + \ldots + \frac{t_n q_n}{2} \right) = c_1 n + c_b R + c_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{2r},$$

ahol

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = R \quad \text{és} \quad t_1 + t_2 + \ldots + t_n = T.$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Rögzí tett rendelésszám esetén a fenti kifejezésben a $q_1, \dots, q_n$ értékek változók, a szélsőérték ismeretéhez ezen értékeket kell meghatároznunk. Erre a célra a Lagrange-szorzók módszerét használjuk. Tekintsük a

$$c_1 n + c_b R + c_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{2r} + \lambda \sum_{i=1}^{n} q_i$$

kifejezést és deriváljuk a $q_1, \dots, q_n$ változók szerint, ezeknek kell nullával egyenlőknek lenni:

$$\frac{c_2}{r} q_i + \lambda = 0, \quad \text{azaz} \quad q_i = -\frac{\lambda r}{c_2} = \text{const},$$

amiből szélsőérték akkor lesz ha $q_1 = \dots = q_n$, azaz $q = R/n$.

Egyenletes felhasználást feltételezve a T idő alatt tárolt összes anyagmennyiség

$$T \cdot \frac{q}{2},$$

a készletezési (raktározási) költség

$$c_2 \cdot \frac{Tq}{2}.$$

A beszerzések száma R/q , a rendelési költség $c_1 \cdot \frac{R}{q}$. Ekkor az összes költség

$$K = c_1 \frac{R}{q} + c_b R + c_2 \frac{Tq}{2}.$$

Mivel $R = r \cdot T$,

$$K = c_1 \frac{rT}{q} + c_b \cdot r \cdot T + c_2 \frac{Tq}{2}.$$

Az időegységre jutó költséggel számolva

$$k(q) = c_1 \frac{r}{q} + c_b r + c_2 \frac{q}{2}.$$

A q szerinti szélsőérték meghatározásához deriváljuk ezt a kifejezést és a deriváltat tegyük egyenlővé nullával:

$$k'(q) = -\frac{c_1 r}{q^2} + \frac{c_2}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{c_2}{2} - \frac{c_1 r}{q^2} = 0,$$

amiből

$$q = q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}.$$

Tekintsük a második deriváltat

$$k''(q) = \frac{2c_1 r}{q^3} \quad \longrightarrow \quad k''(q_0) = \frac{2c_1 r}{\sqrt{\left(\frac{2c_1 r}{c_2}\right)^3}} > 0,$$

í gy a költségnek itt minimuma van.

A $k(q)$ függvény második tagja konstans, í gy széls oértéke ugyanott van mint az

$$f = k - c_b r$$

függvénynek. f két függvény összege, az egyik függvény a tételnagysággal fordí tottan, a másik pedig egyenesen arányos. A számtani és mértani közepekre vonatkozó összefüggés szerint f -nek ott van minimuma, ahol a két összeadandó egyenlő. Ebből

$$c_1 \frac{r}{q} = c_2 \frac{q}{2},$$

amiből ismét

$$q = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

adódik.

A beszerzések közötti optimális időtartam

$$t_0 = \frac{q_0}{r} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}.$$

Optimális beszerzés esetén az időegységre eső összköltség

$$k(q_0) = c_1 r \sqrt{\frac{c_2}{2c_1 r}} + c_b r + \frac{c_2}{2} \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} c_1 c_2 r} + c_b r + \sqrt{\frac{1}{2} c_1 c_2 r} = \sqrt{2c_1 c_2 r} + c_b r.$$

Példa. Egy adott anyagból 200 napon át minden nap ugyanakkora mennyiséget használunk fel. Az összes igény 400 tonna, a rendelési költség 300 Ft, a készletezés napi költsége 3 Ft tonnánként. Minimalizáljuk a költségeket, ehhez

- milyen részletekben rendeljük meg a 400 tonnát és

- milyen időközönként rendeljük meg azokat?

- Határozzuk meg az optimális költség értékét, ha egy tonna ára 100 Ft.

Jelöléseinkkel

$c_1 = 300$ (Ft),

$c_2 = 3$ (Ft/tonna, naponta),

$R = 400$ (tonna),

$T = 200$ (nap).

Ezekkel az adatokkal a napi felhasználás

$$r = \frac{R}{T} = \frac{400}{200} = 2.$$

Az optimális tételnagyság

$$q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 300}{3}} = 20 \text{ (tonna)}.$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Két rendelés között eltelő idő

$$t_0 = \frac{q_0}{r} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (nap)}.$$

Az egy napra vonatkozó optimális költség

$$k(q_0) = \sqrt{2c_1c_2r} + c_b r = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot 3 \cdot 2} + 100 \cdot 2 = 60 + 200 = 260,$$

a teljes költség 200 napra

$$K(q_0) = 200 \cdot 260 = 52000 Ft.$$

Ha a beszerzés egy tételben történne, akkor a készletezési költség

$$c_2 \cdot \frac{T \cdot R}{2}$$

lenne, í gy az összköltség

$$K = c_1 + c_2\frac{T \cdot R}{2} + c_b R = 300 + 3 \cdot \frac{400 \cdot 200}{2} + 100 \cdot 400 =$$

$$= 300 + 120000 + 40000 = 160300$$

lenne.

Érzékenységvizsgálat. A gyakorlatban a modellben szereplő paraméterek értékét gyakran csak becsülni tudjuk. Ezért érdekes, hogy a modell hogyan reagál a paraméterek értékeinek változására, a becslésből adódó pontatlanságok mennyire befolyásolják az optimális költséget.

Tegyük fel, hogy a kereslet előre becsült értéke (r') a valódi érték α -szorosa

$$r' = \alpha r.$$

r' -vel számolva az optimális tételnagyság

$$q_0' = \sqrt{\frac{2c_1\alpha r}{c_2}} = \sqrt{\alpha} \cdot q_0.$$

Nagyobb tétel beszerzése esetén az ár nyilvánvalóan magasabb lesz, í gy csak a beszerzés állandó költségét és a raktározási költség változását vizsgáljuk. Ezek időegységre jutó összege

$$c_1\frac{r}{\sqrt{\alpha}q_0} + c_2\frac{\sqrt{\alpha}q_0}{2},$$

amely q_0 értékét behelyettesí tve

$$\frac{2c_1r + c_2\alpha q_0^2}{2\sqrt{\alpha}q_0} = \frac{2c_1r + c_2\alpha\frac{2c_1r}{c_2}}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}} =$$

$$= \frac{(c_1r + c_1\alpha r)\sqrt{c_2}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{2c_1r}} = \frac{c_1r(1+\alpha)\sqrt{c_2}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{2c_1r}} = \frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{c_1c_2r}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c_1c_2r}{2}}\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ebben az esetben a becsült és optimális költségek aránya

$$\frac{\sqrt{\frac{c_1c_2r}{2}}\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\sqrt{2c_1c_2r}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Így például a nagyon durva $\alpha = 2$ becslés esetén (azaz a tényleges szükséglet duplájával számolunk)

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx 1.06,$$

azaz a járulékos költségek csak kb. 6% -kal magasabbak.

Diszkrét beszerzési tételek. Ha eltérünk az optimális tételnagyságtól, az a költségek növekedését vonja maga után. Az optimális tételnagyság meghatározásánál q bármilyen értéket felvehetett, folytonosan változhatott. Tegyük fel, hogy a rendelések értékei csak diszkrétek lehetnek, egy rögzí tett u érték többszörösei ($u, 2u, 3u, \ldots$). Legyen az optimális érték q_0^*, ekkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek

$$k(q_0^*) \le k(q_0^* + u),$$

$$k(q_0^*) \le k(q_0^* - u).$$

Az első egyenlőtlenség alapján

$$c_1\frac{r}{q_0^*}+c_br+c_2\frac{q_0^*}{2}\le c_1\frac{r}{(q_0^*+u)}+c_br+c_2\frac{(q_0^*+u)}{2},$$

amiből

$$2c_1r(q_0^*+u)+c_2{q_0^*}^2(q_0^*+u)\le 2c_1rq_0^*+c_2q_0^*(q_0^*+u)^2,$$

$$2c_1ru\le c_2q_0^*(q_0^*+u)[q_0^*+u-q_0^*],$$

azaz

$$\frac{2c_1r}{c_2}\le q_0^*(q_0^*+u-q_0^*].$$

A második egyenlőtlenségből

$$c_1\frac{r}{q_0^*}+c_br+c_2\frac{q_0^*}{2}\le c_1\frac{r}{(q_0^*-u)}+c_br+c_2\frac{(q_0^*-u)}{2},$$

amiből

$$2c_1r(q_0^*-u)+c_2{q_0^*}^2(q_0^*-u)\le 2c_1rq_0^*+c_2q_0^*(q_0^*-u)^2,$$

$$c_2q_0^*(q_0^*-u)[q_0^*-q_0^*+u]\le 2c_1ru,$$

azaz

$$q_0^*(q_0^*-u)\le\frac{2c_1r}{c_2}.$$

A fenti két egyenlőtlenség alapján

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$q_0^*(q_0^* - u) \leq \frac{2c_1 r}{c_2} \leq q_0^*(q_0^* + u).$$

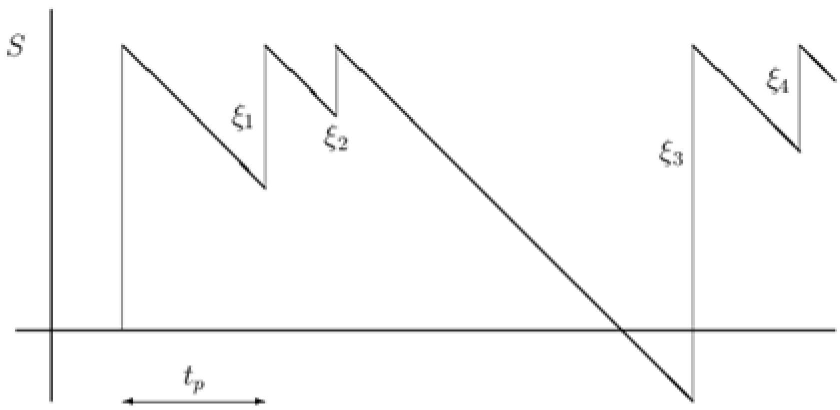
Ezután q_0 értékét a következőképpen határozhatjuk meg. A rendszer paramétereiből kiszámí tjuk a $\frac{2c_1 r}{c_2}$ értéket, majd q_0^* helyébe rendre u -t, $2u$ -t, $3u$ -t, ... helyettesí tve megnézzük, hogy a fenti egyenlőtlenség mikor teljesül.

1.2. 1.2 Költségminimalizáló sztochasztikus modell

Tekintsünk egy készletgazdálkodási rendszert a következ o feltételekkel:

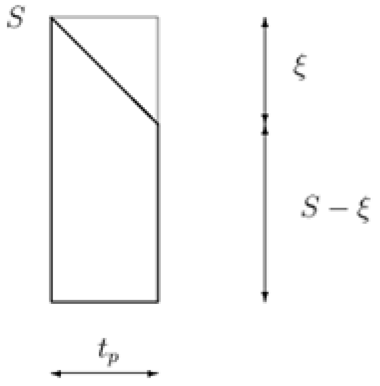
1. Adott időközönként (t_p) rendelünk.
2. Minden beszerzésnél akkora mennyiséget rendelünk, hogy a tétel beérkezése után a készletszint ugyanakkora (S) legyen.
3. Az utánpótlás időigénye nulla.
4. A t_p hosszúságú időszak alatti felhasználás mennyisége sztochasztikus (ξ).
5. A felhasználás a t_p hosszúságú időszak alatt egyenletes.
6. ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$.
7. Egy rendelés költsége c_1.
8. A készletezési költség c_2.
9. A hinyköltség (egységnyi anyagmennyiség hiányából származó időegységre eső költség) c_3.

Az összes költség a beszerzési, készletezési és a hiány miatti költségek összegét jelenti. A rendszer m uködését a következő ábra szemlélteti:



Legyen $0 \leq \xi \leq S$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

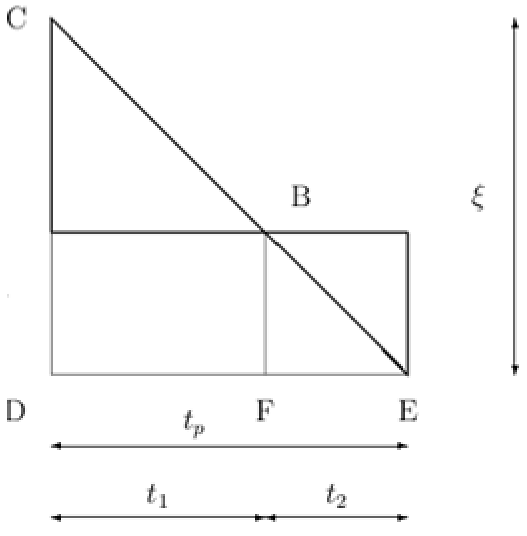


1cm

Ekkor az S szintről indulunk, a t_p idő alatt a készlet egyenletesen csökken, a megmaradó készlet nagysága $S-\xi$ lesz. t_p alatt az átlagos készlet

$$\frac{S+S-\xi}{2}=S-\frac{\xi}{2}.$$

Legyen most $\xi > S$.



2cm

A t_p alatt tárolt átlagos mennyiség (súlyozva a t_p alatti idővel)

$$\frac{S\cdot t_1}{2}.$$

Mivel az ABC és DEC háromszögek hasonlók

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\frac{t_1}{t_p} = \frac{S}{\xi},$$

amiből

$$t_1 = \frac{S}{\xi} t_p$$

és a t_p alatt tárolt átlagos mennyiség

$$\frac{S}{2} t_1 = \frac{S}{2} \cdot \frac{S}{\xi} t_p = \frac{S^2}{2\xi} t_p,$$

az időegységre eső készlet nagysága

$$\frac{S^2}{2\xi}.$$

A fentiek alapján az átlagos készlet nagysága

$$Q(\xi) = \begin{cases} S - \dfrac{\xi}{2} & \text{ha } 0 \le \xi \le S, \\ \dfrac{S^2}{2\xi} & \text{ha } \xi > S. \end{cases}$$

Az átlagos készlet várható értéke

$$M_Q(S) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) f(x) = \int_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) f(x) dx + \int_S^{\infty} \frac{S^2}{2x} f(x) dx.$$

Meghatározzuk az átlagos hiányt a következő feltételek esetén:

1. Ha $0 \le \xi \le S$, akkor nincs hiány.

2. Ha $\xi > S$, akkor a hiány nagysága

$$\frac{\xi - S}{2} t_2,$$

ahol a

$$\frac{t_2}{t_p} = \frac{\xi - S}{\xi}$$

arányból

$$t_2 = \frac{\xi - S}{\xi} t_p,$$

í gy a t_p alatti hiány nagysága

$$\frac{\xi - S}{2} \cdot \frac{\xi - S}{\xi} t_p = \frac{(\xi - S)^2}{2\xi} t_p.$$

Együtt az átlagos hiány egységnyi idő alatt

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \le \xi \le S, \\ \dfrac{(\xi - S)^2}{2\xi} & \text{ha } \xi > S. \end{cases}$$

Az átlagos hiány várható értéke

$$M_H(S) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x) dx = \int\limits_{S}^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} f(x) dx.$$

Az időegységre eső összköltség várható értéke

$$M(S) = \frac{c_1}{t_p} + c_2 M_Q(S) + c_3 M_H(S) =$$

$$= \frac{c_1}{t_p} + c_2 \int\limits_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) f(x) dx + c_2 \int\limits_S^{\infty} \frac{S^2}{2x} f(x) dx + c_3 \int\limits_S^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} f(x) dx =$$

$$= \frac{c_1}{t_p} + c_2 S \int\limits_0^S f(x) dx - c_2 \int\limits_0^S \frac{x}{2} f(x) dx + c_2 S^2 \int\limits_S^{\infty} \frac{f(x)}{2x} dx +$$

$$+ c_3 \int\limits_S^{\infty} \frac{x}{2} f(x) dx - c_3 S \int\limits_S^{\infty} f(x) dx + c_3 S^2 \int\limits_S^{\infty} \frac{f(x)}{2x} dx =$$

$$= \frac{c_1}{t_p} + c_2 S \int\limits_0^S f(x) dx - c_2 \int\limits_0^S \frac{x}{2} dx + (c_2 + c_3) S^2 \int\limits_S^{\infty} \frac{f(x)}{2x} dx +$$

$$+ c_3 \int\limits_S^{\infty} \frac{x}{2} dx - c_3 S \int\limits_S^{\infty} f(x) dx.$$

Keressük azt az S értéket, ahol $M(S)$ -nek széls oértéke van, azaz $M'(S) = 0$:

$$M'(S) =$$

$$= c_2 \int\limits_0^S f(x) dx + c_2 S f(S) - c_2 \cdot \frac{S}{2} f(S) + 2S(c_2 + c_3) \int\limits_S^{\infty} \frac{f(x)}{2x} dx +$$

$$+ (c_2 + c_3) S^2 \left[-\frac{f(S)}{2S} \right] - c_3 \frac{S}{2} f(S) - c_3 \int\limits_S^{\infty} f(x) - c_3 S[-f(S)] =$$

$$= c_2 \int\limits_0^S f(x) dx + (c_2 + c_3) S \int\limits_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - c_3 \int\limits_S^{\infty} f(x) dx =$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$= c_2 \int_0^S f(x)dx + (c_2 + c_3)S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x}dx - c_3 \left[1 - \int_0^S f(x)dx\right].$$

Szélsőérték ott lesz, ahol ez a kifejezés nullával egyenlő, azaz

$$(c_2 + c_3) \int_0^S f(x)dx + (c_2 + c_3)S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x}dx = c_3,$$

vagy

$$\int_0^{S_0} f(x)dx + S_0 \int_{S_0}^\infty \frac{f(x)}{x}dx = \frac{c_3}{c_2 + c_3}.$$

Innen az S_0 értéket numerikusan lehet megtalálni. A második derivált

$$M''(S) =$$

$$= c_2 f(S) + (c_2 + c_3) \int_S^\infty \frac{f(x)}{x}dx - (c_2 + c_3)f(S) + c_3 f(S) =$$

$$= (c_2 + c_3) \int_S^\infty \frac{f(x)}{x}dx > 0,$$

í gy minimum van.

2. 2 Egyszerű sorbanállási rendszerek

A sorbanállás-elmélet kezdetei a Koppenhágai Telefontársaság munkatársa, A.K. Erlang (1878-1929) nevéhez fűződnek, aki telefonközpontok működésének problémáival foglalkozott, az 1909-1922-es években publikálta a sorbanálláselmélet kezdetét jelentő eredményeit.

Ez az időszak a telefonok elterjedésének kezdete volt, az előfizetők közötti összeköttetés kézi kapcsolású telefonközpontokon keresztül valósult meg operátorok személyes közreműködésével. Két szempontot kellett figyelembe venni. A telefonhálózat gazdaságos működtetéséhez minél nagyobb számú el ofizetőt kell toborozni, amely magával hozza, hogy az egyidej uleg kért kapcsolások gyors megvalósulásához nagyszámú operátorra van szükség, í gy a várakozási időt elfogadható szinten lehet tartani. Másrészt túl sok operátor esetén a munkaidejük nincs kihasználva, feleslegesen kapnak munkabért. A cél egy kompromisszum elérése, az operátorok számát olyan szinten határozzuk meg, ami a rendszer normális üzemeltetését teszi lehet ové, azaz az operátorok számát minimalizálva elfogadható kapcsolási idők legyenek. A kérdés megválaszolását bonyolí tja, hogy az egyes hí vások véletlen időközönként érkeznek be és a beszélgetések hosszát sem lehet előre meghatározni. Erlang olyan modelleket vizsgált, amelyekbe Poisson igényfolyamat lép be (két hí vás között eltelő idő exponenciális eloszlású valószí nűségi változó) és a kiszolgálási idő is exponenciális eloszlású. A későbbiekben kiderült, hogy az erre a célra kidolgozott modellek számos más területen felmerül o kérdésre is választ adhatnak. A 30-as években Hincsin foglalkozott a témakörbe tartozó problémákkal, majd az alkalmazások kiszélesedésével az 50-es évektől a terület nagyon intenzí v fejlődésnek indult. A számí tógépes és mobiltelefon hálózatok megjelenése és intenzí v fejlődése újabb lökést adott a terület kutatásának, itt más matematikai apparátus nem is áll rendelkezésre. Fogalmazhatunk úgy, hogy ha egy kiszolgáló eszközre igények lépnek be, ott kiszolgáljuk őket és ezután elhagyják a kiszolgáló eszközt, akkor sorbanállási (vagy más kifejezéssel tömegkiszolgálási) problémával állunk szemben.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A tárgyban az alapvető sorbanállási modellekkel fogunk foglalkozni, ezek - legalább valamilyen mértékben - analitikus úton is kezelhetők, zárt formában megadható eredményekre vezetnek. Ugyanakkor a gyakorlatban felmerül o sorbanállási problémák bonyolultsága és méretei miatt gyakran nincs lehetőség azok pontos analitikus modellekkel való leí rására. Ezekben az esetekben a szimuláció használatos, megfelelő finomí tásokkal ezek a modellek elég pontosan imitálják a valós rendszereket és módot adnak optimális működésük meghatározására. A szimuláció alkalmazásának sarkalatos kérdése a felhasznált modell érvényesí tése (verifikálása), azaz annak ellen orzése, hogy az mennyire tükrözi a valós rendszert. Ennek egyik lehetősége a leegyszerűsí tett, de pontosan számí tható sorbanállási modellekkel való összevetés.

A sorbanállási rendszerek különböző változatait a Kendall által bevezetett jelöléssel szokták megadni, amely

$$A/B/m/n$$

alakú. Az egyes betűk jelentése:

- A - a belépő igényfolyamat tí pusa, amelyet két szomszédos belépés között eltelő idő eloszlásával azonosí tunk. Általában használt értékei a következők: M - exponenciális, D - konstans, E_r - r -ed rendű Erlang, G - általános.
- B - egy igény kiszolgálási idejének eloszlása, lehetséges értékei megegyeznek a belépések között eltelő időre vonatkozókkal.
- m - a kiszolgáló eszközök száma.
- n - két interpretációja szokásos. Egyik esetben a rendszer várakozási helyeinek számát, másik esetben a rendszerben egyszerre jelenlévő igények maximális számát (kiszolgálás alatt lévők plusz várakozók) adja meg. Amennyiben a várakozási sor hosszára nincs korlátozás, nem szokták megadni.

Ezek az objektumok elég jól jellemzik a sorbanállási rendszerek fajtáit, de nem tartalmaznak egy fontos körülményt. Ez pedig az a kiszolgálási diszciplinának nevezett szabály, amely a kiszolgálás sorrendjét határozza meg. Lehet nagyon egyszerű (kiszolgálás a belépés sorrendjében, fordí tott sorrendben, véletlenszerűen) vagy viszonylag bonyolult (függhet a jelenlévő igények számától, a szükséges vagy már felhasznált kiszolgálási időtől, az egyes igények prioritásától). Látni fogjuk, hogy viszonylag egyszerű valószí nűségi jellemzőkkel bí ró rendszerek vizsgálata meglehetősen bonyolulttá válhat a kiszolgálás sorrendjére és körülményeire vonatkozó szabályok miatt.

2.1. 2.1 A Poisson-eloszlás levezetése

A sorbanállási rendszerek vizsgálata esetén kitüntetett szerepet játszik a Poisson eloszlás. A valószí n uségszámí tási tanulmányok során rendszerint mint a binomiális eloszlás közelí tését vezetik be, de más módon is levezethető.

Tegyük fel, hogy az igények rendre a $t_1, t_2, t_3, \dots$ id opontokban lépnek be. Általában célszerű az egymás utáni igények közötti időtartamokat vizsgálni. Teljesüljenek a következő tulajdonságok:

Stacionaritás: annak valószí nűsége, hogy a T időponttól a $T+t$ időpontig pontosan k esemény következik be, nem függ T értékétől, hanem csak k -tól és t -től.

Markovitás: a $(T, T+t)$ időszakaszon bekövetkező események száma nem függ attól, hogy hány esemény hogyan következett be T -ig. Más szóval a $(T, T+t)$ intervallumban k esemény bekövetkezésének feltételes valószí n usége az esemény T -ig való bekövetkezésére vonatkozó bármely feltétel esetén megegyezik a feltétel nélküli valószí nűséggel.

Ritkaság: egy rövid h időtartam alatt gyakorlatilag kizárható két vagy több esemény bekövetkezése, azaz

$$P_{>1}(h) = o(h).$$

Továbbá tegyük fel, hogy

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$P_1(h) = \lambda h + o(h),$$

ahol $\lambda > 0$ valamilyen konstans.

Azon esemény, hogy $t+h$ idő alatt k igény lépjen be a rendszerbe $k+1$ -féleképpen lehetséges:

1. t alatt k igény lép be, h alatt egy sem;

2. t alatt $k-1$ igény lép be, h alatt egy;

....

$n+1$. t alatt nem lép be igény, h alatt k .

A teljes valószí nűség képlete alapján

$$P_k(t+h) = \sum_{j=0}^{k} P_j(t)P_{k-j}(h).$$

Legyen $R_k = \sum_{j=0}^{k-2} P_j(t)P_{k-j}(h)$. Mivel $P_j(t) \leq 1$, í gy

$$R_k \leq \sum_{j=0}^{k-2} P_{k-j}(h) = \sum_{s=2}^{k} P_s(h).$$

Ha $k \to \infty$, akkor

$$R_k \leq \sum_{s=2}^{k} P_s(h) \leq \sum_{s=2}^{\infty} P_s(h) = P_{>1}(h),$$

í gy a ritkasági feltétel miatt $P_{>1}(h) = o(h)$. Ennek alapján

$$P_k(t+h) = P_k(t)P_0(h) + P_{k-1}(t)P_1(h) + o(h).$$

Feltételezésünk szerint $P_1(h) = \lambda h + o(h)$ és

$$P_0(h) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} P_s(h) = 1 - P_1(h) - \sum_{s=2}^{\infty} P_s(h) = 1 - \lambda h + 0(h).$$

Így

$$P_k(t+h) = P_k(t)[1-\lambda h] + P_{k-1}(t)\lambda h + o(h),$$

vagy

$$\frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h},$$

ahonnan

$$P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t), \qquad k \geq 1.$$

Továbbá

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_(0(h),$$

$$P_0(t+h) = P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)],$$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t),$$

amiből

$$P_0(t) = Ce^{-\lambda t},$$

és a $P_0(0) = 1$ kezdeti feltételt felhasználva

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Legyen $P_k(t) = e^{-\lambda t}v_k(t)$, ekkor az eredeti egyenletrendszer

$$v_k'(t) = \lambda v_{k-1}(t),$$

$$v_0'(t) = 0$$

alakba í rható, a kezdeti feltételek pedig

$$v_0(0) = P_0(0) = 1,$$

$$v_k(0) = P_k(0) = 0.$$

Ennek megoldása

$$v_0(t) = 1, \quad v_1(t) = \lambda t, \quad v_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}, \dots, v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \dots,$$

és í gy

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Most a negyedik, kiegészí tő feltételt levezetjük az előző háromból. Tekintsük az egységnyi hosszúságú szakaszt és legyen θ annak valószí nűsége, hogy ez alatt nem lép be egy igény sem

$$\theta = P_0(1).$$

Osszuk fel a szakaszt n egyenlő részre. A stacionaritás és a markovitás miatt

$$\theta = \left[P_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \quad \text{vagy} \quad P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \theta^{1/n}.$$

Így annak a valószí nűsége, hogy k/n hosszúságú szakasz alatt nem lép be igény

$$P_0\left(\frac{k}{n}\right) = \theta^{k/n}.$$

Legyen t valamilyen nemnegatí v szám. Ehhez mindig található olyan k egész, hogy

$$\frac{k-1}{n} \le t \le \frac{k}{n}.$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Mivel $P_0(t)$ az időtől nemnövekvő függvény

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq P_0(t) \geq P_0\left(\frac{k}{n}\right),$$

azaz

$$\theta^{\frac{k-1}{n}} \geq P_0(t) \geq \theta^{\frac{k}{n}}.$$

Legyen $n \to \infty$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{n} = t.$$

Innen

$$P_0(t) = \theta^t.$$

Mivel $P_0(t)$ valószí nűség, í gy $0 \leq P_0(t) \leq 1$. Válasszuk θ -t $e^{-\lambda}$ -nak, í gy $P_0(t) = \exp\{-\lambda t\}$.

Megjegyzés.

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h)$$

Cauchy-féle függvényegyenlet, $P_0(t)$ t -nek monoton függvénye. Ennek a függvényegyenletnek egyetlen megoldása van, ha $P_0(1)$ rögzí tett érték.

A levezetésnél nem használtuk ki a ritkasági tulajdonságot. Annak valószí nűsége, hogy két szomszédos beérkezési időpont közötti távolság nagyobb t -nél $e^{-\lambda t}$. Így a két időpont közötti távolság eloszlásfüggvénye

$$1 - e^{-\lambda t}.$$

Mivel t alatt valamennyi igény belép

$$P_0(t) + P_1(t) + P_{>1}(t) = 1.$$

Elég kis t esetén

$$1 - e^{-\lambda t} = \lambda t + o(t),$$

í gy

$$P_0(t) = 1 - \lambda t + o(t),$$

ezért

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) - P_{>1}(t) = \lambda t + o(t).$$

2.2. 2.2 Kiszolgálás várakozással

Legyen n kiszolgáló eszközünk és ezekre lépjen be egy λ paraméterű Poisson-tí pusú igényfolyamat (azaz két szomszédos belépés között eltelő idő λ paraméterű exponenciális eloszlású valószí nűségi változó). Ha a belépés pillanatában legalább egy kiszolgáló eszköz szabad, akkor az igény azonnal kiszolgálásra kerül, ha mindegyik foglalt, akkor csatlakozik egy várakozó sorhoz. Minden igényt egy eszköz szolgál ki és egy adott

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

pillanatban egy eszköz egy igény kiszolgálásával foglalkozik. Ha egy kiszolgáló eszköz felszabadul, azonnal elkezdi a következő igény kiszolgálását. Egy igény kiszolgálási ideje

$$B(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

eloszlásfüggvényű valószí nűségi változó.

Az exponencális eloszlás alaptulajdonsága. Megmutatjuk, hogy ilyen eloszlás esetében a kiszolgálásból hátralévő idő eloszlása nem függ attól, hogy a kiszolgálás már mennyi ideje tart.

Legyen $f_a(t)$ annak valószí nűsége, hogy az a ideje tartó kiszolgálás még legalább t ideig folytatódik. Ekkor

$$f_0(t) = e^{-\mu a}, \qquad f_0(a+t) = e^{-\mu(a+t)}.$$

Mivel

$$f_0(a+t) = f_0(a) f_a(t),$$

ezért

$$e^{-\mu(a+t)} = e^{-\mu a} f_a(t),$$

amiből

$$f_a(t) = e^{-\mu t} = f_0(t).$$

A rendszer működését leí ró egyenletek. Meghatározzuk annak valószí nűségét, hogy a $t+h$ id opontban minden kiszolgáló eszköz szabad. Ez a következő módokon lehetséges:

- t -ben minden eszköz szabad volt és h alatt nem lépett be igény;
- t -ben egy kiszolgáló eszköz foglalt volt, h alatt ennek kiszolgálása befejeződött és újabb igény nem lépett be a rendszerbe;
- a további események valószí nűsége (2, 3,... igény kiszolgálása folyt és ezek kiszolgálása befejez odött, illetve egynél több igény lépett be) $o(h)$ nagyságrendű.

A fentiek alapján

$$P_0(t)e^{-\lambda h} = P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)],$$

$$P_1(t)e^{-\lambda h}[1 - e^{-\mu h}] = P_1(t)\mu h + o(h),$$

ami felhasználásával

$$P_0(t+h) = P_0(t)[1 - \lambda h] + p_1(t)\mu h + o(h)$$

vagy

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t).$$

Tekintsük most az $1 \le k < n$ esetet. A következő lehet oségeink vannak:

- t -ben a rendszerben k darab igény van, h alatt nem lép be új igény és egyetlen igény kiszolgálása sem fejeződik be. Ennek valószí nűsége

$$P_k(t)e^{-\lambda h}(e^{-\mu h})^k = P_k(t)[1 - \lambda h - k\mu h + o(h)].$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

- t -ben a rendszerben $k-1$ darab igényt szolgálunk ki, h alatt belép egy új igény és egy igény kiszolgálása sem fejeződik be. Az esemény valószí nűsége

$$P_{k-1}(t)[1-e^{-\lambda h}](e^{-\mu h})^{k-1} = \lambda h P_{k-1}(t) + o(h).$$

- t -ben a rendszerben $k+1$ darab igény kiszolgálása folyik, új igény nem lép be és egy igény kiszolgálása befejeződik. Ennek valószí nűsége

$$P_{k+1}(t)e^{-\lambda h}C^1_{k+1}(e^{-\mu h})^k(1-e^{-\mu h}) = P_{k+1}(t)(k+1)\mu h + o(h).$$

A további lehetőségek valószí nűsége $o(h)$. A fenti három esetből $P_0(t)$ meghatározásához hasonló módon a következő egyenlet adódik

$$P'_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t).$$

Végül legyen $k \geq n$. Tekintsük először a $k > n$ esetet, a következő lehetőségeink vannak:

- t -ben $k-1$ igény van jelen a rendszerben, h alatt belép egy új igény és az n kiszolgálás alatt lévő igény közül egy kiszolgálása sem fejeződik be. Az esemény valószí nűsége

$$P_{k-1}(t)(1-e^{-\lambda h})(e^{-\mu h})^n = P_{k-1}(t)\lambda h + o(h).$$

- t -ben k igény van jelen, új igény nem lép be és egy igény kiszolgálása sem fejeződik be. Ennek valószí nűsége

$$P_k(t)e^{-\lambda h}(e^{-\mu h})^n = P_k(t)[1 - \lambda h - n\mu h + o(h)].$$

- t -ben $k+1$ igény van jelen, h alatt újabb igény nem lép be és a kiszolgálás alatt lévő n igényből egy kiszolgálása befejeződik. Ezen esemény valószí n usége

$$P_{k+1}(t)e^{-\lambda h}C^1_n(e^{-\mu h})^{n-1}(1-e^{-\mu h}) = P_{k+1}(t)n\mu h + o(h).$$

A három lehetőség alapján

$$P_k(t+h) = P_{k-1}(t)\lambda h + P_k(t)[1-\lambda h - n\mu h] + P_{k+1}(t)n\mu h + o(h),$$

amiből

$$P'_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t).$$

A $k = n$ esetben a $k-1 \to k$ átmenet különbözik a $k > n$ esettől. Ekkor a vonatkozó valószí nűség ($n-1$ igény van jelen, egy új igény lép be és az éppen kiszolgált $n-1$ igény közül egy igény kiszolgálása sem fejeződik be)

$$P_{n-1}(t)(1-e^{-\lambda h})(e^{-\mu h})^{n-1} = P_{n-1}(t)\lambda h + o(h)$$

jobb oldala egybe esik a $k > n$ esetre vonatkozó valószí n uséggel. Ezért a rendszer működését leí ró differenciálegyenlet alakja a $k \geq n$ esetben

$$P'_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t)$$

lesz.

Stacionárius eloszlás. Tegyük fel, hogy a rendszernek létezik nem elfajuló egyensúlyi eloszlása $t \to \infty$ esetén. Ekkor a $P_k(t)$ valószí nűségek valamilyen konstans P_k értékekhez tartanak, a $P'_k(t) \to P'_k$ értékek pedig egy konstans deriváltjaként nullához. Ebben az esetben a

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P_k'(t) &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \quad 1 \le k < n, \\ P_k'(t) &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t), \quad k \ge n \end{aligned}$$

differenciálegyenlet rendszer a

$$\begin{aligned} -\lambda P_0 + \mu P_1 &= 0, \\ \lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu)P_k + (k+1)\mu P_{k+1} &= 0, \quad 1 \le k < n, \\ \lambda P_{k-1} - (\lambda + n\mu)P_k + n\mu P_{k+1} &= 0, \quad k \ge n \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszerbe megy át és

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} z_k &= \lambda P_{k-1} - k\mu P_k, \qquad 1 \le k < n, \\ z_k &= z_k = \lambda P_{k-1} - n\mu P_k, \qquad k \ge n. \end{aligned}$$

Ezzel a jelöléssel egyenletrendszerünk

$$z_1 = 0, \qquad z_k - z_{k+1} = 0, \quad k \ge 1$$

alakba í rható, amiből

$$z_k = 0,$$

továbbá $1 \le k < n$ esetén

$$k\mu P_k = \lambda P_{k-1}, \tag{1}$$

$k \ge n$ esetén

$$n\mu P_k = \lambda P_{k-1}.$$

Vezessük be a $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ jelölést, ekkor (1)-ből

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0$$

ha $1 \le k \le n$ és

$$P_k = \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} P_n = \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0$$

ha $k \ge n$. (Megjegyezzük, hogy $k = n$ esetén a két képlet egybeesik.) Ezek a képletek a P_k valószí nűségeket a P_0 értéken keresztül fejezik ki, P_0 meghatározására a

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$P_0\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k\right]=1$$

feltétel adódik. A szögletes zárójelben az első összeadandó véges, a második összeadandó konvergens ha $\frac{\rho}{n}<1$
.

Meghatározzuk annak valószí nűségét, hogy egy adott időpontban belépő igény γ várakozási ideje legalább t . Jelölje ezt a valószí nűséget $P(\gamma\geq t)$ és $P_k(\gamma\geq t)$ legyen a megfelelő feltételes valószí nűség k jelenlévő igény esetén. Nyilvánvalóan

$$P(\gamma\geq t)=\sum_{k=n}^{\infty}P_k\cdot P_k(\gamma\geq t),$$

ahol $P_k\quad(k=0,1,2,\ldots)$ a fentiekben meghatározott stacionárius valószí nűségek.

Egy igény kiszolgálási ideje μ paraméterű exponenciális eloszlású valószí nűségi változó, í gy annak valószí nűsége, hogy az t -nél hosszabb legyen, $e^{-\mu t}$. Várakozási sor létezése esetén a rendszerben egyszerre n igény kiszolgálása folyik. Annak valószí nűsége, hogy t alatt ezek közül egy kiszolgálása sem fejeződik be $(e^{-\mu t})^n=e^{-n\mu t}$. Következésképpen azon esemény valószí nűsége, hogy t előtt legalább egy igény kiszolgálása véget ér (azaz két befejeződés közötti időtartam eloszlásfüggvénye)

$$1-e^{-n\mu t}.$$

Ahhoz, hogy egy újonnan belépő igény kiszolgálásra kerüljön (vagyis a várakozási idő t -nél rövidebb legyen) a belépés időpontjában várakozó $k-n$ igény és az újonnan belépett igény kiszolgálásának el kell kezdődni, azaz t -ig $k-n+1$ kiszolgálás befejeződésnek kell realizálódni. Ezen esemény bekövetkezéséig eltel o idő $k-n+1$ darab $n\mu$ paraméterű exponenciális eloszlású valószí nűségi változó összege, eloszlása pedig $k-n+1$ darab $n\mu$ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúciója

$$1-e^{-n\mu t}-\ldots-\frac{(n\mu t)^{k-n}}{(k-n)!}e^{-n\mu t}.$$

Így annak valószí nűsége, hogy a várakozási idő t -nél hosszabb

$$\sum_{s=0}^{k-n}\frac{(n\mu t)^s}{s!}e^{-n\mu t},$$

aminek felhasználásával

$$\begin{aligned}P(\gamma\geq t) &= P_n e^{-n\mu t}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n}\sum_{s=0}^{k-n}\frac{(n\mu t)^s}{s!}=\\ &= P_n e^{-n\mu t}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n\mu t)^s}{s!}\sum_{n=k+s}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n}=\\ &= P_n e^{-n\mu t}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n\lambda t)^s}{s!n^s}\sum_{k=n+s}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n-s}=\\ &= \frac{P_n}{1-\frac{\rho}{n}}e^{-n\mu t}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^s}{s!}=\frac{P_n}{1-\frac{\rho}{n}}e^{-(n\mu-\lambda)t}.\end{aligned}$$

Annak valószí nűsége, hogy az összes kiszolgáló eszköz foglalt

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=n}^{\infty} P_n \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} = P_n \frac{1}{1-\frac{\rho}{n}},$$

ebből

$$P_n = \pi\left(1 - \frac{\rho}{n}\right).$$

Ezt felhasználva

$$P(\gamma \geq t) = \pi e^{-(n\mu-\lambda)t}.$$

Mivel

$$P(\gamma \leq t) = 1 - \pi e^{-(n\mu-\lambda)t},$$

a megfelelő sűrűségfüggvény

$$\pi(n\mu - \lambda)e^{-(n\mu-\lambda)t},$$

a várakozási idő várható értéke pedig

$$\int_0^{\infty} t\pi(n\mu - \lambda)e^{-(n\mu-\lambda)t}dt = \frac{\pi}{n\mu - \lambda}.$$

2.3. 2.3 További Markov-tí pusú kiszolgálási rendszerek

Ebben a részben olyan kiszolgálási rendszerekkel foglalkozunk, amelyekben a beérkező igényfolyamat Poisson tí pusú, a kiszolgálási idő pedig exponenciális eloszlású valószí nűségi változó.

2.3.1. 2.3.1 Tiszta visszautasí tásos rendszer

Tekintsünk egy n kiszolgáló eszközt tartalmazó rendszert. Ha van szabad kiszolgáló, akkor a belépő igény azonnal kiszolgálásra kerül, ellenkező esetben elveszik. A rendszernek $n+1$ különböző állapota lehetséges:

- minden eszköz szabad;

- egy eszköz foglalt;

....

- minden eszköz foglalt.

Felí rjuk a rendszer állapotaira vonatkozó egyenleteket, legyen $p_k(t)$ annak valószí nűsége, hogy a t id opontban k darab igény van jelen a rendszerben és tekintsük a rendszer állapotát a $t+h$ időpontban:

- $k=0$ esetén t -ben a rendszer szabad és h alatt nem lép be új igény, vagy t -ben egy igény kiszolgálása folyik és az t -ig befejeződik, a további lehetőségek valószí nűsége $o(h)$;

  $$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda h) + p_1(t)\mu h + o(h),$$

  amiből

  $$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

- $0 < k < n$ esetén t -ben $k-1$ igény van jelen és h alatt belép egy új igény; vagy k igény van jelen és h alatt sem igény nem lép be, sem kiszolgálás nem fejeződik be; vagy $k+1$ igény kiszolgálása folyik és h alatt ezek közül egy kiszolgálása befejeződik. A további események valószí nűsége $o(h)$. Ezért

$$p_k(t+h) = p_{k-1}(t)\lambda h + p_k(t)[1 - (\lambda + k\mu)h] + p_{k+1}(t)(k+1)\mu h + o(h),$$

  amiből

$$p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t).$$

- $k = n$ esetén t -ben $n-1$ igény van jelen és h alatt belép egy újabb igény, vagy n igény van jelen és ezek közül egy kiszolgálása sem fejeződik be.

$$p_n(t+h) = p_{n-1}(t)\lambda h + p_n(t)(1 - n\mu h) + o(h),$$

  amiből

$$p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t).$$

A fenti egyenletekből az előzőekhez hasonló módon $t \to \infty$ esetén a következő algebrai egyenletrendszer adódik:

$$\begin{array}{rcll} -\lambda p_0 + \mu p_1 & = & 0, & \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} & = & 0 & \quad (0 < k < n), \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n & = & 0. & \end{array}$$

Ezt az egyenletrendszert a következőképpen oldhatjuk meg:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0, \qquad p_2 = \frac{1}{2\mu}[-\lambda p_0 + (\lambda + \mu)p_1] = \frac{1}{2\mu}\left[-\lambda p_0 + \frac{\lambda^2}{\mu}p_0 + \lambda p_0\right] = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}p_0, \ldots,$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k}p_0, \ldots,$$

vagy $\rho = \lambda/\mu$ jelöléssel

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0.$$

A

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} = 1$$

feltétel fenhasználásával

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1}$$

és

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ezek az ú.n. Erlang-Szevasztyanov formulák. Erlang exponenciális kiszolgálási eloszlás esetén vezette le oket, Szevasztyanov pedig megmutatta, hogy a kiszolgálási idő tetszőleges eloszlása esetén érvényben maradnak.

Példa. Egy központba 4 vonalon érkezhetnek be hí vások. A beérkezési ráta $\lambda = 3$ (hí vás/perc). Ha minden vonal foglalt, akkor a beérkező hí vásokat elutasí tjuk. Egy beszélgetés átlagos hossza 2 perc. Határozzuk meg az elutasí tás valószí nűségét, illetve milyen valószí nűséggel szabad valamennyi vonal.

Egy beszélgetés átlagos hossza 2 perc, ebből a kiszolgálási ráta $\mu = 0.5$ beszélgetés/perc; $\rho = \lambda/\mu = 6$.

$$\begin{aligned} P_v &= P_4 = \frac{\frac{\rho^4}{4!}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}} \approx 0.47, \\ P_0 &= \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}} \approx 0.0087. \end{aligned}$$

2.3.2. 2.3.2 Korlátos várakozási sor

Olyan rendszert vizsgálunk, amelyben a várakozási helyek száma véges. Ha egy igény belépésekor valamennyi kiszolgáló eszköz foglalt, csak akkor csatlakozik a várakozási sorhoz, ha ott kevesebb mint m igény található. Ha mind az m várakozási hely foglalt, akkor elveszik. Legyen a kiszolgáló eszközök száma n, a beérkező igényfolyamat az előzőekhez hasonlóan Poisson-tí pusú és egy igény kiszolgálási ideje exponenciális eloszlású μ paraméterrel.

A következő állapotok lehetségesek:

X_0 - minden eszköz szabad és nincs várakozó igény;

X_1 - egy eszköz foglalt;

....

X_k - k eszköz foglalt;

....

X_{n-1} - $n-1$ eszköz foglalt;

X_n - minden kiszolgáló eszköz foglalt;

X_{n+1} - minden kiszolgáló eszköz foglalt, egy igény várakozik;

....

X_{n+m} - minden kiszolgáló eszköz foglalt, m darab igény várakozik.

A $p_0(t), \ldots, p_{n-1}(t)$ valószí nűségekre vonatkozó egyenletek egybeesnek az Erlang-formulák levezetésénél kapott egyenletekkel. Meghatározzuk a további állapotokra vonatkozó egyenleteket.

X_n esetében

$$p_n(t+h) = p_{n-1}(t)\lambda h + p_n(t)[1 - \lambda h - n\mu h] + p_{n+1}(t)n\mu h + o(h),$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

amiből

$$p'_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t).$$

$X_{n+s}\ (1 \leq s < m)$ esetén

$$p_{n+s}(t+h) = p_{n+s-1}(t)\lambda h + p_{n+s}(t)[1 - \lambda h - n\mu h] + p_{n+s+1}(t)n\mu h + o(h),$$

amiből

$$p'_{n+s}(t) = \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t).$$

Végül az $s = m$ esetben

$$p_{n+m}(t+h) = p_{n+m-1}(t)\lambda h + p_{n+m}(t)(1 - n\mu h) + o(h),$$

amiből

$$p'_{n+m}(t) = \lambda p_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t).$$

A fenti egyenleteket összegyűjtve a rendszer működését a következő egyenletrendszer í rja le:

$$\begin{aligned}
p'_0(t) &= -\lambda p_{k-1}(t) + \mu p_1(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_k(t) &= \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) \qquad (0 < k \leq n-1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_{n+s}(t) &= \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_{n+s}(t) + p_{n+s+1}(t) \qquad (1 \leq s < m), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_{n+m}(t) &= \lambda p'_{n+m-1}(t) - n\mu p_{n+m}(t).
\end{aligned}$$

Az előzőekhez hasonló módon eljárva $t \to \infty$ esetén a stacionárius valószí nűségeket a következ o algebrai egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
-\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} &= 0 \qquad (0 < k \leq n-1), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + n\mu p_{n+1} &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\lambda p_{n+s-1} - (\lambda + n\mu)p_{n+s} + n\mu p_{n+s+1} &= 0 \qquad (1 \leq s < m), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} &= 0, \\
\sum_{k=0}^{n+m} p_k &= 1.
\end{aligned}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\frac{\rho}{n}\right)^s} \qquad (0 \le k \le n), \\ p_{n+s} &= \frac{\frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^s}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\frac{\rho}{n}\right)^s} \qquad (1 \le s \le m). \end{aligned}$$

Példa. Egy autójaví tó műhelybe a javí tandó autók egy $\lambda = 0.5$ (autó/óra) paraméterű Poisson-folyamat szerint lépnek be. A műhelyben egy szerel oakna és az udvaron 3 várakozási hely van. Egy jármű átlagos javí tási ideje $m_j = 1/\mu = 2$ (óra). Mi a valószí nűsége, hogy egy autó javí tását elutasí tják? Mi a valószí nűsége, hogy a m uhelyben nem folyik munka? Hogyan változnak ezek az értékek, ha a műhelyt még egy szerelőaknával bőví tjük?

A feladat adatai alapján $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\rho = \lambda/\mu = 1$, $m = 3$. $n = 1$ esetén az elutasí tás valószí nűsége

$$p_{1+3} = \frac{1}{1+1+3} = 0.2.$$

Annak valószí nűsége, hogy ott nem folyik munka

$$p_0 = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Az $n = 2$ esetben

$$p_{2+3} = \frac{\frac{1}{16}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} \approx 0.021,$$

a szabad állapot valószí nűsége jelentősen megnő

$$p_0 = \frac{16}{47} \approx 0.34,$$

azaz az elutasí tás valószí nűsége jelentősen, tizedére csökken, de ennek ára, hogy az állásidő több mint másfélszeres lesz.

2.3.3. 2.3.3 Az $M/M/1$ rendszer

A Kendall-féle jelölés szerinti M/M/1 tí pus a kiszolgálási rendszerek legegyszerűbb változata. Mind a belépések között eltelő, mind a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású λ , illetve μ paraméterrel, egy kiszolgáló eszköz van és a várakozási helyek számára nincs semmilyen megszorí tás. A rendszer egyszerű struktúrája miatt jól interpretálható eredményekhez vezet és lehetőséget ad a bonyolultabb rendszerekre kapott eredmények ellen orzésére.

Levezetjük a működését leí ró egyenleteket. $k = 0$ esetén

$$p_0(t+h) = p_0(t)[1-\lambda h] + p_1(t)\mu h + o(h),$$

amiből

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

$k \ge 1$ esetén

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$p_k(t+h) = p_{k-1}(t)\lambda h + p_k(t)[1 - \lambda h - \mu h] + p_{k+1}(t)\mu h + o(h),$$

amiből

$$p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu)p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) \qquad (k \geq 1).$$

Innen a szokásos módon eljárva a

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + \mu)p_k + \mu p_{k+1} &= 0 \qquad (k \geq 1), \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k &= 1 \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszer adódik. Ennek megoldása

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda}{\mu} p_0, \\ \mu p_2 &= (\lambda + \mu)p_1 - \lambda p_0 = \frac{\lambda^2}{\mu} p_0 \quad \rightarrow \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0, \\ p_3 &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_2 - \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0 - \lambda^2 \mu^2 p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_k &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = p_0 \rho^k, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

a normáló feltételt figyelembe véve

$$1 = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{p_0}{1 - \rho} \quad \rightarrow \quad p_0 = 1 - \rho.$$

Ennek alapján

$$p_k = (1 - \rho)\rho^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

ilyen módon a geometriai eloszlást kapjuk.

Határozzuk meg a várakozási idő várható értékét ebben a rendszerben. Ez nem lesz más mint a jelenlévő igények száma várható értékének szorzata egy igény kiszolgálási idejének várható értékével:

$$t_{\text{varakozas}} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1 - \rho)\rho^k = \frac{(1 - \rho)\rho}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{(1 - \rho)\rho}{\mu} \frac{1}{(1 - \rho)^2} =$$

$$= \frac{\rho}{\mu} \frac{1}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu^2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}.$$

3. 3 Az M/G/1 rendszer

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Az exponenciális eloszlás emlékezetnélküli tulajdonsága jelentősen egyszerűsí ti a kiszolgálási rendszerek vizsgálatát, hiszen egy aktuális időpontban nem kell a m uködés előtörténetével foglalkozni. Tekinthetjük úgy, hogy a rendszer működése ebben a pillanatban indult adott kezdeti feltételekkel, az aktuális állapot ismeretében a múltat nem kell figyelembe vennünk. Ez a megközelí tés tökéletesen megfelelt a telefonközpontok vizsgálatánál, de a további alkalmazások ennél árnyaltabb leí rást követeltek. Természetesen az ideális a G/G/... tí pusú rendszerek általános megoldása lenne, ami bonyolultsága miatt gyakorlatilag lehetetlen. Ezért következő lépésként a beérkezések közötti, illetve a kiszolgálási idő exponencialitásától tekintettek el, ez az M/G/1 és G/M/1 tí pusú rendszerek vizsgálatához vezetett. Ebben a fejezetben az M/G/1 rendszer egy lehetséges megközelí tésével fogunk foglalkozni.

Az M/G/1 rendszer teljes leí rását a Takács-féle integro-differenciálegyenlet adja meg. A rendszerbe λ paraméterű Poisson-folyamat lép be, egy igény kiszolgálási ideje tetszőleges eloszlású valószí n uségi változó $B(x)$ eloszlásfüggvénnyel. A rendszerben egy kiszolgáló eszköz van, a várakozási sor hosszára nincs korlátozás.

Jelölje $\gamma(t)$ a virtuális várakozási időt, azaz a t időpontban belépő igénynek ennyit kell kiszolgálása megkezdésére várakozni, ennyi idő szükséges a már jelenlévő igények kiszolgálására. Legyen

$$F(t,x) = P\{\gamma(t) \leq x\}.$$

A virtuális várakozási idő viselkedését leí ró Takács-féle integro-differenciálegyenlet

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} - \lambda F(t,x) + \lambda \int_0^x B(x-y) d_y F(t,y)$$

alakú. Megoldása a Laplace-Stieltjes transzformáció kétszeres alkalmazásával lehetséges, de ez meglehetősen bonyolult, ezért mi egy más megközelí tést fogunk használni. A Laplace-Stieltjes transzformáció alkalmazásánál szükség van az $F(t,0)$ valószí n uség ismeretére, azaz a rendszer szabad állapotának valószí nűségére az idő függvényében. Differenciálegyenletek esetében az ilyen peremfeltételek általában természetes fizikai meggondolásokból adódnak, itt ennek kiszámí tása további problémát jelent. Meghatározásához szükségünk lesz a foglaltsági periódus eloszlásfüggvényére, ez önmagában sem egyszerű feladat.

3.1. 3.1 Leí rás beágyazott Markov-lánc segí tségével

A Takács-féle integro-differenciálegyenlet bármilyen t időpontban leí rja az M/G/1 rendszer állapotát, viszont megoldása gyakorlati szempontból problematikus. Ha nem törekszünk teljes információra, akkor elégséges lehet, ha a rendszer állapotát csak bizonyos időpontokban vizsgáljuk. Ez a megközelí tés vezetett a beágyazott Markov-láncok módszeréhez, amely alkalmazásánál a rendszer állapotát a Markov tulajdonsággal rendelkező pillanatokban tekintjük. Ha az M/G/1 rendszert a jelenlév o igények számával jellemezzük, akkor ilyenek az egyes igények kiszolgálásai befejeződéseinek időpontjai.

Legyen t_n az n -edik igény kiszolgálása befejez odésének pillanata, N_{t_n} pedig ezen kiszolgálás befejezése után a rendszerben maradó igények száma. Fennáll a következő összefüggés:

$$N_{t_{n+1}} = \begin{cases} \Delta_{n+1} & \text{ha} N_{t_n} = 0, \\ N_{t_n} + \Delta_{n+1} - 1 & \text{ha } N_{t_n} \geq 1, \end{cases}$$

ahol Δ_{n+1} a $[t_n, t_{n+1})$ alatt belépő új igények száma. Az n -edik igény kiszolgálása után N_{t_n} igény marad a rendszerben, ezt növelik az $n+1$-edik igény kiszolgálása alatt belépő újabb igények és csökkenti a kiszolgált $n+1$-edik igény. $N_{t_n} = 0$ esetén az n -edik igény kiszolgálása után a rendszer felszabadul, a szabad állapot után belép az $n+1$-edik igény, a rendszer következő állapotát az ő kiszolgálása alatt belépő igények száma határozza meg. Mindkét esetben látható, hogy a t_{n+1}-beli állapotot a t_n -beli állapot (a jelenlévő igények száma) és az ezután belépő igények száma határozza meg, ami - mivel Poisson-igényfolyamatunk van - nem függ az előtörténett ol. Így az N_{t_n} valószí nűségi változók Markov-láncot alkotnak.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Meghatározzuk a Markov-lánc átmenetvalószí nűségeit. Legyen

$$a_j = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} dB(x)$$

annak valószí nűsége, hogy egy igény kiszolgálása alatt a rendszerbe j darab új igény lép be. Az átmenetvalószí nűségek mátrixa

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

alakú. Ekkor a Markov-láncok egyensúlyi eloszlására fennálló

$$p_i = \sum_j p_j p_{ji}$$

egyenletrendszer

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0 a_0 + p_1 a_0, \\ p_k &= \sum_{j=1}^{k+1} p_j a_{k-j+1} + p_0 a_k \qquad k \geq 1, \end{aligned}$$

alakot vesz fel.

Szorozzuk meg a p_k -ra $(k \geq 1)$ vonatkozó egyenletet z^k -val és összegezzük k szerint:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty p_k z^k &= \sum_{k=1}^\infty z^k \sum_{j=1}^{k+1} p_j a_{k-j+1} + p_0 \sum_{k=1}^\infty a_k z^k = \\ &= \sum_{k=1}^\infty z^k \sum_{j=1}^{k} p_j a_{k-j+1} + \sum_{k=1}^\infty z^k p_{k+1} a_0 + p_0 \sum_{k=1}^\infty a_k z^k = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^{k} p_j z^j a_{k-j+1} z^{k-j+1} + \frac{1}{z} a_0 \sum_{k=1}^\infty p_{k+1} z^{k+1} + p_0 \sum_{k=1}^\infty a_k z^k = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{j=1}^\infty p_j z^j \sum_{k=j}^{\infty} a_{k-j+1} z^{k-j+1} + \frac{1}{z} a_0 \sum_{k=1}^\infty p_{k+1} z^{k+1} + p_0 \sum_{k=1}^\infty a_k z^k. \end{aligned}$$

Hozzáadva ehhez a p_0-ra vonatkozó egyenletet

$$\sum_{k=0}^\infty = \frac{1}{z} \sum_{j=1}^\infty p_j z^j \sum_{k=j}^{\infty} a_{k-j+1} z^{k-j+1} + \frac{1}{z} a_0 \sum_{k=0}^\infty p_{k+1} z^{k+1} + p_0 \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$$

vagy

$$P(z) = \frac{1}{z}[P(z) - p_0][A(z) - a_0] + \frac{1}{z} a_0 [P(z) - p_0] + p_0 A(z),$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

ahol

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad \text{és} \qquad A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

A fenti kifejezés jobboldala

$$\frac{1}{z}P(z)A(z) - \frac{1}{z}A(z)p_0 - \frac{1}{z}a_0P(z) + \frac{1}{z}p_0a_0 + \frac{1}{z}a_0P(z) - \frac{1}{z}p_0a_0 + p_0A(z),$$

ennek felhasználásával

$$zP(z) = P(z)A(z) - p_0A(z) + p_0zA(z),$$

amiből

$$P(z) = \frac{(z-1)A(z)}{z - A(z)}p_0.$$

A generátorfüggvényre kapott kifejezés tartalmazza a rendszer szabad állapotának valószí nűségét, p_0-t, ezt a $P(1) = 1$ feltételből határozzuk meg:

$$p_0 = \lim_{z\to 1} \frac{z - A(z)}{(z-1)A(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{1 - A'(z)}{A(z) + zA'(z) - A'(z)} = 1 - A'(1).$$

$A(z)$ az egy igény kiszolgálása alatt belépő igények számának generátorfüggvénye, azaz

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dB(x) = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dB(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x(1-z)} dB(x) = b(\lambda(1-z)), \end{aligned}$$

ahol $B(x)$ egy igény kiszolgálási idejének eloszlásfüggvénye,

$$b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x)$$

pedig annak Laplace-Stieltjes transzformációja. Így

$$A'(1) = -\lambda b'(\lambda(1-z))|_{z=1} = -\lambda b'(0) = \lambda\tau,$$

ahol τ egy igény kiszolgálási idejének várható értéke.

Az M/M/1 rendszer esetében az egyensúly létezésének feltétele a

$$\rho = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} < 1$$

egyenlőtlenség teljesülése volt, ρ értéke a beérkezési ráta szorzata egy igény kiszolgálási idejének várható értékével. Az M/G/1 rendszer esetén hasonló a helyzet: a belépési rátát (λ) szorozzuk egy igény kiszolgálási idejének várható értékével (τ), í gy célszerű a $\rho = \lambda\tau$ jelölés használata. A rendszerben tartózkodó igények számának generátorfüggvénye

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)A(z)}{z-A(z)} = \frac{(1-\rho)(1-z)b(\lambda(1-z))}{b(\lambda(1-z))-z}$$

alakba í rható. Ezt a képletet az orosz nyelvű irodalomban Pollaczek-Hincsin formulaként, az angol nyelvűben Pollaczek-Hincsin transzformált egyenletként emlí tik.

3.2. 3.2 A foglaltsági periódus eloszlásfüggvénye

Mint a korábbiakban emlí tettük, a Takács-féle integro-differenciálegyenlet Laplace-Stieltjes transzformációval való megoldása esetén ismernünk kell a szabad állapot valószí nűségét az idő függvényében. Ennek meghatározásához szükséges a foglaltsági periódus hosszának eloszlásfüggvénye. Másrészt a foglaltsági periódus a rendszer m ködésének egyik fontos jellemzője, információt nyújt a kiszolgáló eszközzel szemben támasztott követelményekről.

A foglaltsági periódus a kí vülálló számára is könnyen érthető dolog: a szabad állapot egy igény belépésével ér véget és elkezdődik a belépett igény kiszolgálása. Ez alatt további igények lépnek be, amelyeket szintén ki kell szolgálnunk, az ő kiszolgálásuk alatt újabb igények generálódnak. Ez a folyamat folytatódik és csak akkor ér véget, amikor a már egyetlen jelenlévő igény kiszolgálása alatt egyetlen újabb igény sem lép be. Fogalmazhatunk úgy, hogy a foglaltsági periódus egy szabad állapot után belépő és az általa generált összes többi igény kiszolgálását jelenti.

Fontos szerepet játszanak az első igény kiszolgálása alatt belépő igények, mivel az ő és az általuk generált igények kiszolgálásának struktúrája megegyezik a teljes foglaltsági periódus struktúrájával.

Legyen $G(x)$ a foglaltsági periódus eloszlásfüggvénye. A foglaltsági periódus két részből áll: az első igény és az összes további igény kiszolgálásából. Tartson az első igény kiszolgálása y ideig, ez alatt k igény

$$\frac{(\lambda y)^k}{k!}e^{-\lambda y}$$

valószí nűséggel lép be. Minden belépő igényt és az általa generált igényeket is ki kell szolgálnunk, a kiszolgálás struktúrája megegyezik a teljes foglaltsági periódus struktúrájával. Ennek alapján

$$G(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} G_k(x-y)dB(y),$$

ahol $G_k(x)$ a $G(x)$ függvény k -szoros konvolúcióját jelenti. Legyen

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}dG(x), \qquad b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}dB(x),$$

ekkor a foglaltsági periódus $G(x)$ eloszlásfüggvényének Laplace-Stieltjes transzformációja

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[\Gamma(s)]^k \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x}(\lambda x)^k dB(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k [\Gamma(s)]^k b^{(k)}(s+\lambda)}{k!} = \\
&= b(s+\lambda-\lambda\Gamma(s)),
\end{aligned}$$

ahol $b^{(k)}(s)$ a $b(s)$ függvény k -adik deriváltja, a második sor pedig a $b(s+\lambda-\lambda\Gamma(s))$ függvény Taylor-sora. Így a keresett transzformáció a

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\Gamma(s) = b(s + \lambda - \lambda\Gamma(s))$$

függvényegyenlet megoldása.

Megmutatjuk, hogy a fenti függvényegyenletnek van megoldása. Vezessük be az

$$s + \lambda - \lambda\Gamma(s) = x$$

jelölést, ekkor

$$\frac{s + \lambda - x}{\lambda} = b(x).$$

A

$$b(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$$

függvény egy Laplace-Stieltjes transzformáció, nyilvánvalóan

$$b(0) = 1, \qquad b'(s) = -\int_0^\infty x e^{-sx} dB(x) < 0, \qquad b''(s) = \int_0^\infty x^2 e^{-sx} dB(x) > 0,$$

azaz $b(s)$ egy konkáv, a $[0, \infty)$-n monoton csökkenő függvény, amely a nulla pontban az 1 értéket veszi fel és aszimptotikusan közelí ti az x tengelyt.

$$\frac{s + \lambda - x}{\lambda}$$

egy egyenes egyenlete, amely a nulla pontban egynél nagyobb értéket vesz fel, $x = s$ esetén értéke 1 és az $x = s + \lambda$ pontban átmetszi az x tengelyt. Következésképpen az egyenes és a Laplace-Stieltjes transzformáció (a fenti egyenlet jobb- és baloldala) s és $s + \lambda$ között metszi egymást, rögzí tett s érték esetén ez lesz a megoldás, a $\Gamma(s)$ függvény megfelelő értéke.

Megjegyezzük, hogy a kiszolgálási idő általános eloszlása esetén ez a függvényegyenlet expliciten nem megoldható, numerikusan minden s értékre külön-külön meg kell határozni a megfelelő $\Gamma(s)$ értéket. Ebb ol approximálható $\Gamma(s)$, a foglaltsági periódus eloszlásfüggvénye ennek inverz transzformációja lesz.

Mint látjuk a foglaltsági periódus eloszlásfüggvényének meghatározása meglehetősen bonyolult, de hosszának várható értéke könnyen kiszámí tható a

$$\Gamma(s) = b(s + \lambda - \lambda\Gamma(s))$$

függvényegyenletből. Deriválással

$$\Gamma'(s) = b'(s + \lambda - \lambda\Gamma(s))[1 - \lambda\Gamma'(s)],$$

amiből

$$\Gamma'(s) = \frac{b'(s + \lambda - \lambda\Gamma(s))}{1 + \lambda b'(s + \lambda - \lambda\Gamma(s))}$$

és

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$-\Gamma'(0) = \frac{\tau}{1-\lambda\tau} = \frac{\tau}{1-\rho},$$

ahol $\tau = \int_0^\infty x dB(x)$, egy igény kiszolgálási idejének várható értéke.

A Takács-féle integro-differenciálegyenlet megoldásánál szükség van az $F(t,0)$ valószí nűség ismeretére. Ez meghatározható a foglaltsági periódus eloszlásfüggvénye $\Gamma(s)$ Laplace-Stieljes transzformációjának segí tségével.

Ha tekintjük a foglalt állapotból szabad állapotba való átmenetek időpontjait, akkor ezek egy felújí tási folyamat regenerációs pontjai lesznek. Két ilyen pont között eltelő idő egy exponenciális eloszlású valószí nűségi változó és egy foglaltsági periódus összege. A t időpontban a rendszer akkor lesz szabad állapotban ha 1. t -ig nem lépett be igény a rendszerbe; 2. valamely τ időpontban egy foglaltsági periódus után a rendszer szabad állapotba kerül és a fennmaradó $t-\tau$ idő alatt újabb igény nem lép be a rendszerbe. Az utolsó felújí tási pont bármelyik lehet, í gy az az esemény, hogy t -ben a rendszer szabad legyen, felbontható diszjunkt események összegére, azaz

$$\begin{aligned} F(t,0) &= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} dF^{(n)}(\tau) = \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\left(\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(\tau)\right) = \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} dH(\tau), \end{aligned}$$

ahol $H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$ a folyamat felújí tási függvénye. Két felújí tási pont között eltelő idő eloszlásfüggvényének Laplace-Stieltjes transzformációja

$$\frac{\lambda}{\lambda+s}\Gamma(s)$$

(az eloszlásfüggvény egy exponenciális eloszlás és a foglaltsági periódus konvolúciója), a

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$$

felújí tási függvény Laplace-Stieltjes transzformációja

$$h(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda\Gamma(s)}{\lambda+s}\right]^n = \frac{\frac{\lambda\Gamma s}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda\Gamma(s)}{\lambda+s}} = \frac{\lambda\Gamma(s)}{s+\lambda-\lambda\Gamma(s)}.$$

Mivel a szabad állapot valószí nűsége

$$F(t,0) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} dH(\tau),$$

a $h(s)$ függvényre kapott kifejezés felhasználásával a szabad állapot valószí nűségének Laplace transzformációja

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t,0)dt = \frac{1}{s+\lambda} + \frac{1}{s+\lambda}\frac{\lambda\Gamma(s)}{s+\lambda-\lambda\Gamma(s)} = \frac{1}{s+\lambda-\lambda\Gamma(s)}.$$

3.3. 3.3 A Pollaczek-Hincsin formula más levezetése

Az előzőekben az M/G/1 rendszerben tartózkodó igények számának generátorfüggvényét a beágyazott Markov-lánc segí tségével vezettük le. Az egyes valószí nűségeket ebből a generátorfüggvényből legtermészetesebb módon deriválással kaphatjuk meg. Kisebb indexű állapotok esetén ez járható útnak tűnik, de a többszöri deriválás egyre bonyolultabb képletekre vezet. Már a 80-as években voltak törekvések kerülő utak keresésére, amelyek például a kiszolgálási idő racionális Laplace-Stieltjes transzformációja esetén bizonyos sikerre vezettek. A későbbiekben az FFT mószer alkalmazására is sor került, ez a sorbafejtéshez ad hatékony eszközt.

A különböző rendszerek vizsgálatának hatékony eszközei lehetnek a regenerratí v folyamatok. Ezek lényege, hogy a működés során a rendszer egy olyan állapotba kerül, ahol megújul és minden ilyen regenerációs pont után sztochasztikusan azonosan viselkedik. Egyszerű példa lehet valamilyen műszaki berendezés, amely minden karbantartás, javí tás után "újként" m uködik. A két szomszédos regenerációs pont közötti szakaszt regenerációs ciklusnak nevezzük, ezek hosszai független azonos eloszlású valószí nűségi változók. Egy cikluson belül a rendszer több különböző állapotban lehet. Az egyes állapotokban való tartózkodás egyensúlyi valószí nűsége a regeneratí v folyamatokra vonatkozó eredmények alapján meghatározható (lásd [Tijms, 1994]) mint az egy ciklus alatt az adott állapotban töltött idő várható értékének és a regenerációs ciklus hossza várható értékének hányadosa. Az alábbiakban ezt a megközelí tést az M/G/1 rendszerre alkalmazzuk.

Vezessük be a következő jelöléseket:

ζ - a foglaltsági periódus hosszának várható értéke;

ζ_i - egy foglaltsági periódus alatt az i -edik szint fölött töltött idő várható értéke;

ξ_i - egy foglaltsági periódus alatt az i -edik szinten töltött idő várható értéke.

Tétel. Tekintsük az M/G/1 kiszolgálási rendszert. A belépő folyamat Poisson λ paraméterrel, egy igény kiszolgálási idejének eloszlásfüggvénye $B(x)$. Ha egy igény kiszolgálási idejének τ várható értéke véges, $\lambda\tau < 1$, akkor a rendszerben létezik egyensúlyi eloszlás. Ezt a $p_i = \xi_i/\zeta \ \ (i = 0, 1, 2, \dots)$ hányadosok adják, ahol ζ a foglaltsági periódus hosszának várható értéke, ξ_i pedig az i -edik szinten töltött idő várható értéke egy foglaltsági periódus alatt.

A foglaltsági periódus hosszának várható értéke az előzőekből ismert, í gy az alatta az egyes szinteken töltött idők várható értékeit kell meghatároznunk.

Lemma. Az M/G/1 rendszerben

$$\xi_0 = \tau, \qquad \xi_1 = \frac{1-a_0}{a_0}\tau, \qquad \xi_2 = \frac{1-a_0-a_1}{a_0}(\xi_0+\xi_1)$$

és a $\xi_k \ \ (k \geq 3)$ értékek kielégí tik a

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_i}{a_0}\xi_{k-i} + \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_0}(\xi_0+\xi_1)$$

rekurzí v összefüggést.

A Pollaczek-Hincsin transzformált egyenlet levezetésénél a rendszer állapotait az egyes igények kiszolgálása utáni időpontokban a rendszerben maradó igények számával jellemeztük. A további számolás szempontjából viszont kényelmesebb lesz számunkra a kiszolgálások kezdetén jelenlévő igényeket tekinteni. Az í gy meghatározott állapotokat és a jelenlévő igények számát meg kell különböztetnünk, a kettő közötti eltérést az alábbiakban világí tjuk meg.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ha egy igény kiszolgálásának megkezdésekor csak ő van jelen a rendszerben, akkor a jelenlévő igények száma nyilvánvalóan 1. Az állapotot viszont az határozza meg, hogy kiszolgálása után hány igény marad a rendszerben. Ha legalább két igény lép be, akkor az igény kiszolgálása ehhez a magasabb szinthez fog tartozni; ha egy igény lép be, akkor az 1-es állapothoz; ha nem lép be igény, akkor pedig a 0 állapothoz, ez a szituáció a foglaltsági periódus utolsó igényének kiszolgálásakor következik be. Ha az állapotok és a jelenlévő igények viszonyát vizsgáljuk, akkor az első esetben a jelenlévő igények számát eggyel csökkentjük, viszont az 1-es szintre való visszatéréskor ezt visszakapjuk, mivel a második szinten az utolsó kiszolgáláskor két igény van jelen, de az adott kiszolgálás már az 1-es állapothoz fog tartozni. Az első szint esetében hasonló a helyzet az utolsó igény kiszolgálását kivéve. Magasabb szinteknél először kapunk egy igényt amikor erre a szintre kerülünk, majd veszí tünk egyet, amikor a szintről lejjebb megyünk. Így a jelenlévő igények számát tekintve ugyanazt az értéket kapjuk mint az állapotok esetében.

A beágyazott Markov-lánchoz hasonlóan a rendszer állapotait az egyes igények kiszolgálását követő id opontokban fogjuk vizsgálni, azaz amikor az adott igény már elhagyta a rendszert. Legyen j igény jelen. Ennek kiszolgálása után a_1 valószí nűséggel maradunk ugyanezen a szinten (egy új igény lép be és egy kiszolgálása befejeződik), $1-a_1$ valószí n uséggel hagyjuk el azt; pontosabban $\frac{a_0}{1-a_1}$ valószí nűséggel a $j-1$ -ik, $\frac{1-a_0-a_1}{1-a_1}$ valószí n uséggel pedig egy magasabb szintre kerülünk.

Egy olyan periódus alatt, amikor csak egy igény van jelen a rendszerben, átlagosan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_1^{k-1}(1-a_1) = \frac{1}{1-a_1}$$

igényt szolgálunk ki ($k-1$ esetben egy új igény lép be, utolsó esetben pedig vagy szabad állapotba, vagy egy magasabb szintre kerülünk).

Tekintsünk most egy olyan periódust, amely alatt az első szint fölött tartózkodunk. Az ezalatt kiszolgált igények átlagos száma

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{1-a_0-a_1}(k-1)\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{(1-\rho)(1-a_0-a_1)}[\rho - a_1 - (1-a_0-a_1)] =$$

$$= \frac{\rho - 1 + a_0}{(1-\rho)(1-a_0-a_1)}$$

ahol felhasználtuk a

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$$

egyenlőségeket.

(Az első szintről $1-a_0-a_1$ valószí nűséggel kerülünk egy magasabb szintre, ezen feltétel mellett a_k valószí nűséggel a k -adikra. Ahhoz, hogy ismét az első szintre kerüljünk ki kell szolgálnunk ezt a $k-1$ darab igényt, de az általuk generált igényekkel együtt. Ez egy igény kiszolgálásával kezdődik és akkor ér véget amikor az adott igényhez tartozó összes további igény is elhagyja a rendszert, azaz struktúrája megegyezik a foglaltsági periódus struktúrájával, a kiszolgált igények számának várható értéke $(1-\rho)^{-1}$.)

Egy foglaltsági periódus alatt váltakoznak az olyan szakaszok amelyek alatt egy, illetve egynél több igény van a rendszerben. Az első szintű szakaszok két különböző módon fejeződhetnek be: vagy nem lép be új igény (ez a foglaltsági periódus végét jelenti), vagy egynél több igény lép be. A foglaltsági periódus alatt $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k, \ldots$ első szint felett töltött szakaszunk

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\frac{a_0}{1-a_1}, \quad \frac{1-a_0-a_1}{1-a_1}\frac{a_0}{1-a_1}, \ldots, \frac{(1-a_0-a_1)^k}{(1-a_1)^k}\frac{a_0}{1-a_1}, \ldots$$

valószí nűséggel lesz. Ennek felhasználásával a foglaltsági periódus alatt az első szinten és az első szint felett töltött idő várható értéke

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(1-a_0-a_1)^{k-1}}{(1-a_1)^{k-1}}\frac{a_0}{1-a_1}\frac{\tau}{1-a_1} = \frac{\tau}{a_0},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(1-a_0-a_1)^{k}}{(1-a_1)^{k}}\frac{a_0}{1-a_1}\frac{\rho-1+a_0}{(1-\rho)(1-a_0-a_1)}\tau = \frac{\rho-1+a_0}{a_0(1-\rho)}\tau.$$

A két érték összege

$$\frac{\tau}{a_0} + \frac{\rho-1+a_0}{a_0(1-\rho)}\tau = \frac{\tau}{1-\rho}$$

kiadja a foglaltsági periódus hosszának várható értékét.

Az előzőekben a jelenlévő igények alapján számoltunk, í gy az első szinten töltött idő várható értéke a 0 és 1 állapotokban töltött idők várható értékeinek $\xi_0 + \xi_1$ összegét jelenti. Mivel a 0 állapothoz csak a foglaltsági periódusban utolsóként kiszolgált igény tartozik, ezért $\xi_0 = \tau$ és

$$\xi_1 = \frac{\tau}{a_0} - \tau = \frac{1-a_0}{a_0}\tau.$$

Levezetjük az egy foglaltsági periódus alatt a k -adik szint felett töltött idő várható értékére vonatkozó képleteket. Tekintsük először a második szintet. A következő lehetőségeink vannak:

1. az első szintről a második szintre kerülünk;

2. az első szintről legalább a harmadik szintre kerülünk.

Ha az első szintről a második szintre kerülünk, akkor ugyanolyan helyzetben leszünk mint az első szint esetén, a második szinten valamennyi igényt kiszolgálva vagy az első szintre megyünk, vagy a második szint fölé. Első esetben a második szinten és fölötte való tartózkodások váltakoznak, és átlagosan ζ_1 időt fölötte töltve az első szintre kerülünk. Második esetben az első szintről a második szint fölé ugrunk, a második szintre való viszszatérés idejének várható értéke

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{1-a_0-a_1-a_2}(k-2)\frac{\tau}{1-\rho} = \frac{\rho-2+2a_0+a_1}{(1-\rho)(1-a_0-a_1-a_2)}\tau = \varepsilon_2.$$

Ezzel ugyanolyan helyzetbe kerülünk mint az előző esetben voltunk, azaz ezután a második szint felett átlagosan ζ_1 időt töltünk. A két eset valószínűsége

$$\frac{a_2}{1-a_0-a_1} \quad \text{és} \quad \frac{1-a_0-a_1-a_2}{1-a_0-a_1},$$

így az első szinten kezdődő és végződő periódus alatt a második szint felett átlagosan

$$\frac{a_2}{1-a_0-a_1}\zeta_1 + \frac{1-a_0-a_1-a_2}{1-a_0-a_1}(\zeta_1+\varepsilon_2) = \zeta_1 + \varepsilon_2'$$

időt töltünk, ahol

$$\varepsilon_2' = \frac{\rho-2+2a_0+a_1}{(1-\rho)(1-a_0-a_1)}\tau.$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Egy foglaltsági periódus alatt i ilyen szakaszunk $\frac{(1-a_0-a_1)^i}{(1-a_1)^i}\frac{a_0}{1-a_1}$ valószínűséggel lesz, így

$$\zeta_2=\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{(1-a_0-a_1)^i}{(1-a_1)^i}\frac{a_0}{1-a_1}(\zeta_1+\varepsilon_2')=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_1+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\varepsilon_2.$$

A második szinten töltött idő várható értékét mint az első és a második szintek felett töltött idők várható értékeinek különbségét határozzuk meg. Mivel

$$\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\varepsilon_2=\frac{\rho-2+2a_0+a_1}{a_0(1-\rho)}\tau=\frac{\rho-1+a_0}{a_0(1-\rho)}\tau-\frac{1-a_0-a_1}{a_0(1-\rho)}\tau=$$
$$=\zeta_1-\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho},$$

í gy

$$\xi_2=\zeta_1-\zeta_2=\zeta_1-\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_1-\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\varepsilon_2=$$
$$=\zeta_1-\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_1-\zeta_1+\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho}=$$
$$=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}(\zeta-\zeta_1)=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}(\xi_0+\xi_1).$$

Kiszámí tjuk a harmadik szinten töltött idő várható értékét. Az első szintről a második, a harmadik szintre és a harmadik szint fölé kerülhetünk. A három esetben a 3. szint felett töltött idők várható értékei rendre

- ζ_2,

- $\zeta_1+\zeta_2$,

- $\varepsilon_3+\zeta_1+\zeta_2$.

Ezek az értékek a következő meggondolásokból adódnak. Első esetben az 1. szintről a 2. szintre kerülünk, a 3. szint felett töltött idő várható értéke egybeesik azzal mintha az 1. szint szempontjából a 2. szint felett töltött időt vizsgálnánk, azaz a várható érték ζ_2. Második esetben a 3. szinten kezdünk, átlagosan ζ_1 időt a 3. szint felett töltve visszakerülünk a 2. szintre és ezután a msodik szint esetében leí rtak lesznek érvényesek. Így a vonatkozó várható érték $\zeta_1+\zeta_2$. Harmadik esetben a 3. szint fölé kerülünk, legyen ez a k -adik szint, $k-3$ darab igényt és az általuk generáltakat kiszolgálva a 3. szinten leszünk és a második esetben leí rtak lesznek érvényesek. A 3. szintre való visszakerülés idejének várható értéke

$$\varepsilon_3=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{a_k}{1-a_0-a_1-a_2-a_3}(k-3)\frac{\tau}{1-\rho}=\frac{\rho-3+3a_0+2a_1+a_2}{1-a_0-a_1-a_2-a_3}\frac{\tau}{1-\rho}.$$

Az egyes esetek valószí nűségei rendre

$$\frac{a_2}{1-a_0-a_1},\qquad \frac{a_3}{1-a_0-a_1}\quad \text{és}\quad \frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{1-a_0-a_1},$$

í gy a 3. szint felett töltött idő várható értéke egy, az első szinten kezdődő és végződő szakasz alatt

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\frac{a_2}{1-a_0-a_1}\zeta_2+\frac{a_3}{1-a_0-a_1}(\zeta_1+\zeta_2)+\frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{1-a_0-a_1}(\varepsilon_3+\zeta_1+\zeta_2)=$$
$$=\zeta_2+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{1-a_0-a_1}\zeta_1+\frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{1-a_0-a_1}\varepsilon_3.$$

Mivel egy foglaltsági periódus alatt $\frac{(1-a_0-a_1)^i}{(1-a_1)^i}\frac{a_0}{1-a_1}$ valószí nűséggel lesz i darab 1. szint felett töltött szakasz, a 3. szint felett töltött idő várható értéke

$$\zeta_3=\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{(1-a_0-a_1)^i}{(1-a_1)^i}\frac{a_0}{1-a_1}\left[\zeta_2+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{1-a_0-a_1}\zeta_1+\frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{1-a_0-a_1}\varepsilon_3\right]=$$
$$=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_2+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\zeta_1+\frac{\rho-3+3a_0+2a_1+a_2}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho}.$$

A 3. szinten töltött idő várható értékét mint a 2. és a 3. szintek felett töltött idők várható értékeinek különbségét kapjuk

$$\xi_3=\zeta_2-\zeta_3,$$

ahol

$$\zeta_2=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_1+\frac{\rho-2+2a_0+a_1}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho},$$
$$\zeta_3=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_2+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\zeta_1+\frac{\rho-3+3a_0+2a_1+a_2}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho}.$$

Mivel

$$\frac{\rho-2+2a_0+a_1}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho}-\frac{\rho-3+3a_0+2a_1+a_2}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho}=$$
$$=\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho}=\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\zeta,$$

í gy

$$\xi_3=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}(\zeta_1-\zeta_2)-\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\zeta_1+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\zeta=$$
$$=\frac{1-a_0-a_1}{a_0}\xi_2+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}(\xi_0+\xi_1),$$

azaz $k=3$ esetén a lemma eredménye érvényes.

Tekintsük most a k -adik szintet és határozzuk meg az ezen töltött idő várható idő ξ_k várható értékét.

Az első szintről kerülhetünk a második, a harmadik,..., a k -adik szintre és a k -adik szint fölé. Ekkor ζ_k -ra a következő lehetőségeket í rhatjuk fel:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\begin{array}{ll} \zeta_k: & \zeta_{k-1} \\ & \zeta_{k-2}+\zeta_{k-1} \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & \zeta_{k-i}+\zeta_{k-i+1}+\ldots+\zeta_{k-1} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{k-1}+\varepsilon_k \end{array}$$

Az első lehetőség a 2. szint. Ugyanabban a szituációban vagyunk, mintha a $k-1$-edik szint felett töltött időt vizsgálnánk az 1. szint szemszögéből, í gy a várható érték ζ_{k-1}.

A harmadik szint esetében először van egy olyan szakaszunk, amely három igény jelenlétével kezdődik és két igény jelenlétével végződik, ez megfelel a $k-2$-edik szint felett töltött időnek az első szint szemszögéb ol (a várható érték ζ_{k-2}). Ezután az előző szituációban leszünk. Így a 3. szinten induló és az 1. szinten végződő szakasz alatt a k -adik szint felett töltött idő várható értéke $\zeta_{k-2}+\zeta_{k-1}$.

Tekintsük az utolsó lehetőséget. Ekkor az első szintr ol a k -adik fölé ugrunk, legyen ez az i -ik. A k -adik szintre való visszatérés idejének várható értéke

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{a_i}{1-a_0-a_1-\ldots-a_k}(i-k)\frac{\tau}{1-\rho}=$$

$$=\frac{\tau}{(1-\rho)(1-a_0-a_1-\ldots-a_k)}\{\rho-a_1-2a_2-\ldots-ka_k-k(1-a_0-a_1-\ldots-a_k)\}$$

$$=\frac{\rho-k+ka_0+(k-1)a_1+\ldots+2a_{k-2}+a_{k-1}}{(1-\rho)(1-a_0-a_1-\ldots-a_k)}\tau=\varepsilon_k.$$

Ezután a k -adik szinten tartózkodunk, átlagosan ζ_1-et a k -adik felett töltve a $k-1$-edikre, ζ_2-t a k -adik felett töltve a $k-2$-re,..., és végül a 2. szintről indulva és ζ_{k-1} időt a k -adik felett töltve az 1. szintre kerülünk. Így az utolsó esetben a k -adik szint felett töltött idő várható értéke $\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{k-2}+\zeta_{k-1}+\varepsilon_k$. Az első eset valószí nűsége $\frac{a_2}{1-a_0-a_1}$, a másodiké $\frac{a_3}{1-a_0-a_1}$,..., az utolsóé $\frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_k}{1-a_0-a_1}$. Így egy, az első szinten kezdődő és végződő, szakasz alatt a k -adik szint felett töltött idő várható értéke

$$\frac{a_2}{1-a_0-a_1}\zeta_{k-1}+\frac{a_3}{1-a_0-a_1}(\zeta_{k-2}+\zeta_{k-1})+\ldots+\frac{a_k}{1-a_0-a_1}(\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{k-1})+$$

$$+\frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_k}{1-a_0-a_1}(\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{k-1}+\varepsilon_k)=$$

$$=\zeta_{k-1}+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{1-a_0-a_1}\zeta_{k-2}+\ldots+$$

$$+\frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{1-a_0-a_1}\zeta_1+\frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_k}{1-a_0-a_1}\varepsilon_k,$$

vagy

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1-a_0-\ldots-a_i}{a_0}\zeta_{k-i} + \frac{1-a_0-\ldots-a_k}{a_0}\varepsilon_k.$$

A hasonló érték ζ_{k-1}-re

$$\zeta_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1-a_0-\ldots-a_i}{a_0}\zeta_{k-1-i} + \frac{1-a_0-\ldots-a_{k-1}}{a_0}\varepsilon_{k-1}.$$

A két érték különbsége adja a k -adik szinten töltött idő várható értékét

$$\zeta_{k-1} - \zeta_k =$$

$$= \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_{k-2} + \frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\zeta_{k-3} + \ldots + \frac{1-a_0-\ldots-a_{k-2}}{a_0}\zeta_1 +$$

$$+ \frac{\rho-(k-1)+(k-1)a_0+\ldots+2a_{k-3}+a_{k-2}}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho} -$$

$$- \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\zeta_{k-1} - \frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\zeta_{k-2} - \ldots - \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_0}\zeta_1 -$$

$$- \frac{\rho-k+ka_0+(k-1)a_1+\ldots+2a_{k-2}+a_{k-1}}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho}.$$

Mivel

$$\frac{\rho-(k-1)+(k-1)a_0+\ldots+2a_{k-3}+a_{k-2}}{a_0} -$$

$$- \frac{\rho-k+ka_0+(k-1)a_1+\ldots+2a_{k-2}+a_{k-1}}{a_0} =$$

$$= \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_0},$$

ezért

$$\xi_k = \zeta_{k-1} - \zeta_k =$$

$$= \frac{1-a_0-a_1}{a_0}(\zeta_{k-2}-\zeta_{k-1}) + \frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}(\zeta_{k-3}-\zeta_{k-2}) +$$

$$+ \ldots + \frac{1-a_0-\ldots-a_{k-2}}{a_0}(\zeta_1-\zeta_2) -$$

$$- \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_0}\zeta_1 + \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_0}\frac{\tau}{1-\rho} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1-a_0-\ldots-a_i}{a_0}\xi_{k-i} + \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_0}(\xi_0+\xi_1).$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A fentiekben meghatároztuk az egyes állapotokban töltött idők várható értékét egy foglaltsági periódus alatt. Ezek alapján kiszámí thatjuk az egyensúlyi valószí nűségeket. Ha helyesen számoltunk, akkor ennek alapján adódni kell a Pollaczek-Hincsin formulának. Erre vonatkozik a következő

Tétel. Az M/G/1 rendszerben a jelenlévő igények számának

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)b(\lambda(1-z))}{b(\lambda(1-z))-z},$$

generátorfüggvénye levezethető a

$$\xi_0 = \tau, \qquad \xi_1 = \frac{1-a_0}{a_0}\tau, \qquad \xi_2 = \frac{1-a_0-a_1}{a_0}(\xi_0+\xi_1),$$

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_i}{a_0}\xi_{k-i} + \frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_0}(\xi_0+\xi_1)$$

értékekből a regenerratí v folyamatokra vonatkozó eredmények alapján.

Megjegyzés. A fenti generátorfüggvény az M/G/1 rendszerben jelenlévő igények számára vonatkozó klasszikus eredmény, a Pollaczek-Hincsin transzformált egyenlet. Az M/G/1 rendszerben a beágyazott Markov-lánc definiciójának megfelelően a regenerratí v ciklus alatt a foglaltsági periódust, a nulla állapot alatt a foglaltsági periódus utolsó igényének kiszolgálását kell érteni.

Írjuk fel a ξ_i-re vonatkozó képleteket teljes alakjukban:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \xi_0, \\
\xi_1 &= \frac{1-a_0}{a_0}\xi_0, \\
\xi_2 &= \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\xi_1 + \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\xi_0, \\
\xi_3 &= \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\xi_2 + \frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\xi_1 + \frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\xi_0, \\
\xi_4 &= \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\xi_3 + \frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\xi_2 + \\
&\qquad + \frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{a_0}\xi_1 + \frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{a_0}\xi_0, \\
\xi_5 &= \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\xi_4 + \frac{1-a_0-a_1}{a_0}\xi_4 + \\
&\qquad + \frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}\xi_3 + \frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{a_0}\xi_2 + \\
&\qquad + \frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3-a_4}{a_0}\xi_1 + \frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3-a_4}{a_0}\xi_0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Szorozzuk meg a ξ_i-re vonatkozó kifejezést z^i-nel és összegezzük a harmadik sortól (a ξ_2-re vonatkozó képlettől) az utolsó (ξ_0-t tartalmazó) tagot kivéve. Ekkor

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\begin{aligned}
&\frac{1-a_0-a_1}{a_0}z(\xi_1 z+\xi_2 z^2+\ldots)+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}z^2(\xi_1 z+\xi_2 z^2+\ldots)+\\
&\qquad+\frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{a_0}z^3(\xi_1 z+\xi_2 z^2+\ldots)+\ldots=\\
=\;&\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i z^i\right)\left\{\frac{1-a_0-a_1}{a_0}z+\frac{1-a_0-a_1-a_2}{a_0}z^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1-a_0-a_1-a_2-a_3}{a_0}z^3+\ldots\right\}=\\
=\;&\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i z^i\right)\frac{1}{a_0}\left\{\frac{z}{1-z}-\frac{a_0 z}{1-z}-\frac{a_1 z}{1-z}-\frac{a_2 z^2}{1-z}-\frac{a_3 z^3}{1-z}-\ldots\right\}=\\
=\;&\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i z^i\right)\frac{1}{a_0(1-z)}\left\{z(1-a_0)-[A(z)-a_0]\right\}=\\
=\;&\left[\overline{P}(z)-\xi_0\right]\frac{1}{a_0(1-z)}\left\{z(1-a_0)-[A(z)-a_0]\right\}
\end{aligned}$$

adódik, ahol $\overline{P}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i z^i$. A ξ_0-t tartalmazó tagra hasonló módon

$$\begin{aligned}
&\xi_0 z\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-a_0-a_1-\ldots-a_i}{a_0}z^i=\\
=\;&\frac{\xi_0 z}{a_0}\left\{(1-a_0-a_1)z+(1-a_0-a_1-a_2)z^2+(1-a_0-a_1-a_2-a_3)z^3+\ldots\right\}=\\
=\;&\frac{\xi_0 z}{a_0}\left\{\frac{z}{1-z}-\frac{a_0 z}{1-z}-\frac{a_1 z}{1-z}-\frac{a_2 z^2}{1-z}-\frac{a_3 z^3}{1-z}-\ldots\right\}=\\
=\;&\xi_0 z\frac{1}{a_0(1-z)}\left\{z(1-a_0)-[A(z)-a_0]\right\}.
\end{aligned}$$

Összeadva a fenti két kifejezést, az első sort és a második sort z -vel megszorozva, kapjuk

$$\overline{P}(z)=[\overline{P}(z)-\xi_0]\frac{1}{a_0(1-z)}\{z(1-a_0)-[A(z)-a_0]\}+$$

$$+\xi_0 z\frac{1}{a_0(1-z)}\{z(1-a_0)-[A(z)-a_0]\}+\xi_0+\frac{1-a_0}{a_0}\xi_0 z,$$

vagy

$$\begin{aligned}
(a_0-a_0 z)\overline{P}(z)\;&=\;[\overline{P}(z)-\xi_0][z-a_0 z-A(z)+a_0]+\\
&\quad+\xi_0 z[z-a_0 z-A(z)+a_0]+\xi_0(a_0-a_0 z)+\xi_0 z(1-a_0)(1-z),
\end{aligned}$$

amiből

$$\overline{P}(z)=\frac{(1-z)A(z)}{A(z)-z}\xi_0.$$

Ezt elosztva a foglaltsági periódus hosszának

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\frac{\tau}{1-\rho}$$

várható értékével és figyelembe véve, hogy $\xi_0 = \tau$, végül kapjuk

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z)-z} = \frac{(1-\rho)(1-z)b(\lambda(1-z))}{b(\lambda(1-z))}.$$

4. 4 Lagrange szorzók

Tekintsük a $z = f(x, y)$ függvényt és y legyen x implicit függvénye, amelyre teljesül

$$\varphi(x, y) = 0.$$

A $z = f(x, y)$ függvény teljes deriváltja x szerint

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\frac{dy}{dx} = f'_x(x,y) - \frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)} f'_y(x,y),$$

mivel $\varphi(x, y) = 0$, amiből az összetett függvények deriválási szabálya miatt

$$\varphi'_x + \varphi'_y \frac{dy}{dx} = 0,$$

azaz

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

A lokális szélsőérték helyén ez nullával egyenlő, í gy egy x -et és y -t összekapcsoló egyenletet ad. Így két ismeretlenre két egyenletünk lesz

$$f'_x - \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} f'_y = 0 \qquad \text{és} \qquad \varphi(x,y) = 0.$$

Ezt az egyenletrendszert egy kényelmesebb alakra hozzuk és bevezetünk egy ismeretlen segédváltozót:

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda.$$

Ennek felhasználásával

$$f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \qquad f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0,$$

amely a $\varphi(x, y) = 0$ egyenlettel egy háromismeretlenes egyenletrendszert ad x -re, y -ra és λ -ra.

Ez a feltétel könnyen megjegyezhető. Írjuk fel a

$$\Phi(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

segédfüggvényt és keressük ennek szélsőértékét, ahol λ egy ismeretlen konstans.

Példa. Határozzuk meg azt a maximális térfogatú téglatestet, amely felszí ne egy rögzí tett S érték.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Legyenek a téglatest élei x , y és z . Ennek térfogata $V = xyz$, a felszí ne pedig

$$2xy + 2yz + 2zx = S.$$

Tekintsük a

$$\Phi(x,y,z) = xyz + \lambda\left(xy + yz + zx - \frac{S}{2}\right)$$

segédfüggvényt. Ennek deriváltjai

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = yz + \lambda(y+z) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz + \lambda(x+z) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy + \lambda(x+y) = 0.$$

Ezeket az egyenleteket egymásból kivonva

$$(z+\lambda)(y-x) = 0, \qquad (x+\lambda)(z-y) = 0, \qquad (y+\lambda)(x-z) = 0.$$

Innen $x = y = z$, azaz a keresett test egy kocka.

5. 5 A számtani és mértani közép közötti összefüggés

Legyen $a, b \geq 0$. Mindig fennáll

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

azaz

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

vagy

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Egyenlőség akkor lehetséges, ha $a = b$.

6. 6 Markov-láncok

Legyen $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$ egy teljes eseményrendszer, $\xi_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ valószí nűségi változók sorozata. $\xi_n = i$ ha az n -edik kí sérletben az E_i esemény valósul meg. Független valószí nűségi változók esetén

$$P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{\xi_n = j\}.$$

Ha minden n -re és a változók összes lehetséges értékére

$$P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}\},$$

akkor a valószí nűségi változók Markov-láncot alkotnak.

A ξ_0 változó $P\{\xi_0 = i\} = P_i(0)$ eloszlását kezdeti eloszlásnak, a $P\{\xi_j \mid \xi_{n-1} = i\}$ feltételes valószí nűségeket pedig átmenetvalószí n uségeknek nevezzük.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ha ismerjük a kezdeti eloszlást és az átmenetvalószí nűségeket, azok egyértelműen meghatározzák ξ_n eloszlását.

Homogén Markov-láncokról beszélünk, ha az átmenetvalószí nűségek függetlenek n -től, azaz

$$P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\} = p_{ij}.$$

Az átmenetvalószí nűségek felí rhatók egy mátrix alakjában

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ahol nyilvánvalóan

$$p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \ldots = 1.$$

Legyen $P_{ij}(n)$ annak valószí nűsége, hogy n lépés alatt a rendszer az i állapotból a j állapotba kerül. A teljes valószí nűség tétele szerint

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{n} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m).$$

Jelölje π_n az n lépéses átmenetvalószí n uség mátrixot

$$\pi_n = \begin{bmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) & P_{13}(n) & \ldots \\ P_{21}(n) & P_{22}(n) & P_{23}(n) & \ldots \\ P_{31}(n) & P_{32}(n) & P_{33}(n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ekkor az n lépéses átmenetvalószí nűségekre vonatkozó összefüggés szerint

$$\pi_n = \pi_m \cdot \pi_{n-m} \qquad (0 < m < n).$$

Az $n = 2$ esetben

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1^2,$$

$n = 3$ esetén

$$\pi_3 = \pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \cdot \pi_1 = \pi_1^3,$$

és általában

$$\pi_n = \pi_1^n.$$

A Markov-láncok állapotainak osztályozása. Az E_k állapot elérhető az E_j állapotból, ha valamilyen $n > 0$ -ra $p_{jk}^{(n)} > 0$. A Markov-lánc irreducibilis, ha minden állapot elérhető minden állapotból valahány lépésben.

Tekintsünk egy rögzí tett E_j állapotot. Legyen $f_j^{(n)}$ annak valószí nűsége, hogy az első visszatérés az E_j állapotba az n -edik lépésben történik. Ekkor annak valószí nűsége, hogy n lépésben az E_j állapotból az E_j állapotba kerüljünk

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_j^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}.$$

Annak valószí nűsége, hogy a rendszer egyáltalán visszatérjen a j állapotba

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}.$$

Ha $f_j = 1$, akkor a visszatérés biztos. Az átlagos visszatérési idő

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}.$$

Az E_j állapotot rekurrens (visszatérő) állapotnak nevezzük, ha $f_j = 1$. Az E_j állapot tranziens (nem visszatérő), ha $f_j < 1$.

Az E_j rekurrens állapotot visszatérő nulla állapotnak nevezzük, ha a visszatérés idejének várható értéke végtelen.

Az E_j állapot periodikus $t > 1$ periódussal, ha a visszatérés csak a $t, 2t, 3t, \dots$ lépéseknél következhet be.

Az E_j rekurrens állapot ergodikus, ha nem nulla állapot és nem periodikus.

Egy irreducibilis Markov-lánc állapotai mind ugyanazon osztályhoz tartoznak: vagy mind tranziensek, vagy mind rekurrens nulla állapotok, vagy ergodikusak.

Tétel. Ha egy irreducibilis Markov-lánc állapotai nem periodikusak, nem tranziensek és nem nulla állapotok, akkor a $P_j(0)$ kezdeti eloszlástól függetlenül léteznek a

$$\lim_{n \to \infty} P_j(n) = P_j$$

határértékek és

$$\sum_j P_j = 1.$$

A $\{P_j\}$ eloszlás egyértelműen meghatározható a

$$P_j = \sum_i P_i p_{ij}$$

lineáris egyenletrendszerből.

7. Hivatkozások

Created by XMLmind XSL-FO Converter.