

**XXXI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia
Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció
2013. április 18-20.**

Egy egyszerű mechanikai rendszer komplex fázistere

Szerző:

Sándor Bulcsú

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Fizika Kar, számítógépes fizika szak,
mesterképzés, I. év

Témavezetők:

dr. Néda Zoltán egyetemi tanár,

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Fizika Kar, Magyar Tagozat Fizika Intézete

dr. Járai-Szabó Ferenc egyetemi adjunktus,

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Fizika Kar, Magyar Tagozat Fizika Intézete

Tartalomjegyzék

Kivonat.....	3
Bevezetés.....	4
I. Kaotikus dinamika.....	5
I.1. Kaotikus mozgás. Kaotikus rendszer.....	5
I.2. Determinizmus és káosz.....	6
I.3. Káoszhoz vezető utak.....	6
I.4. A tanulmányozott rendszer leírása.....	8
II. A rugó-tömb modell alkalmazásai.....	10
III. Analitikus és szimulációs eredmények egydimenziós rugó-tömb rendszerekre.....	12
IV. A rugó-tömb modell számítógépes vizsgálata.....	14
IV.1. A modell és az alkalmazott numerikus módszerek (1. verzió).....	14
IV.2. A szimulációs program.....	15
IV.3. Fejlesztések (2. verzió).....	16
IV.4. Rendparaméter.....	17
IV.5. Szimulációs eredmények.....	18
V. A rugó-tömb rendszer kísérleti vizsgálata.....	29
V.1. A kísérleti berendezés. A kísérlet menete.....	29
V.2. A kísérleti eredmények.....	32
VI. Következtetések.....	35
Bibliográfia.....	36
Függelék: Numerikus módszerek.....	37

Kivonat

A rugó-tömb modellek számtalan alkalmazásuk mellett a komplex dinamikájuk miatt váltak ismertté. Dolgozatunkban egy egydimenziós rugó-tömb rendszer dinamikáját tanulmányozzuk egyszerű kísérleti eszközök és számítógépes szimulációk segítségével. A láncszerűen összekapcsolt rugókat és testeket egy futószalagra helyezük, miközben az első rugót a földhöz képest rögzítjük. Modellünkben a súrlódási erő nemlinearitása a csúszási és tapadási súrlódási erők különbségéből, valamint a felület egyenetlenségeiből származó zajból adódik. Bevezetünk egy rendparamétert, mellyel a lánc hosszának fluktuációit mérhetjük és számítógépes szimulációk segítségével feltérképezzük a rendszer fázisterét. A rendparaméter segítségével megmutatjuk, hogy kis zaj esetén a szalag sebességének növekedésével fázisátalakulás-szerűen csökken le a lánc hosszának a fluktuációja, állandó sebesség esetén meg a rendezetlenség növekedésével a fázisátalakulásokhoz hasonlóan növekszik. Mindkét esetben egy kritikus paraméterértéket meghaladva, minőségileg megváltozik a rendszer dinamikája. Érdekes módon a rendszer méretének növelésével ezen fázisátalakulás-szerű, hirtelen átmenet mindinkább elmosódik, ellenkező trendet mutatva a termodinamikai rendszereknél megismert fázisátalakulásokkal.

Bevezetés

A rugó-tömb modellek fizika számos olyan területén sikeresen alkalmazhatók, ahol komplex rendszerek kritikus önszerveződést mutatnak. Sok esetben a súrlódási erő a modell egy lényeges alkotóeleme. A legtöbb anyag esetében a tapadási súrlódási együttható maximális értéke nem egyenlő a csúszási súrlódási együtthatóval, a valós fizikai rendszerekben, ahol a felületek érintkezéséből származó súrlódási erők jelentős szerepet játszanak, gyakran találkozunk nemlineáris, „csúszó-tapadó” dinamikával. A súrlódási erők jelenléte lavinák megjelenéséhez és kritikus önszerveződéshez vezethet[1][2], nemlinearitásuk kaotikus dinamikát eredményezhet[3].

Dolgozatunkban egy ilyen, nagyon egyszerű rendszert vizsgálunk molekuláris dinamika típusú szimulációkkal. Téglatest alakú, rugókkal összekapcsolt tömbök dinamikáját modellezzük abban az esetben, amikor az egydimenziós rugó-tömb rendszert egy, a földhöz képest állandó u sebességgel haladó futószalagra helyezzük. Az így kialakított lánc egyik végét a földhöz viszonyítva egy rugóval rögzítjük, a testek pedig súrlódás jelenlétében mozognak a szalag felületén. Megmutatjuk, hogy szalag sebességének és a súrlódási erők eloszlásának szórása függvényében a rendszer nagyon sokféle kaotikus és kollektív viselkedési formát mutat.

A dolgozatban először röviden ismertetjük a káosz tulajdonságait, a rugó-tömb modellek alkalmazási lehetőségeit és az egydimenziós rugó-tömb modellek területén elért eddigi eredményeket. Egy korábbi munkánk során hasonló rugó-tömb modellt alkalmazva autópályán haladó autósor tanulmányozásához, más nézőpontból vizsgálva azt, sikerült kimutatni, hogy létezik dinamikus fázisátalakulás abban a rendszerben[1].

A továbbiakban adunk egy általunk kidolgozott módszert, mely lehetőséget nyújt arra, hogy statisztikusan vizsgáljuk a rendszert egy *rendparaméter* bevezetésével. Megmutatjuk, hogy egy kritikus paraméter felett csak nagy zaj jelenlétében lesz a viselkedés aperiodikus, valamint azt is, hogy bizonyos paraméterek esetén intermittens káosz jelenik meg. Ezt kísérletileg is kimutatjuk. Találtunk a rendszerben rendezetlenség által indukált dinamikus fázisátalakulás-szerű átmenetet, melynek fázisaihoz periodikus és aperiodikus dinamika társítható. A szalag sebességének függvényében szintén érdekes átmenetet találunk a „csúszó-tapadó” és folyamatosan csúszó dinamika között. Bemutatjuk az elvégzett kísérletet és összehasonlítjuk a szimulációs eredményekkel.

I. Kaotikus dinamika

1.1. Kaotikus mozgás. Kaotikus rendszer.

A hosszú ideig tartó állandósult mozgások gyakran önmagukat pontosan, periodikusan ismétlik. Ilyen az ingaóra lengése vagy a bolygók mozgása. Tehát fontos tulajdonságaik a szabályos ismétlődés és az előrejelezhetőség.

A szabályos mozgások azonban csak egy kis részét alkotják az összes állandósult mozgásnak. Az elmúlt néhány évtized kutatásai bebizonyították, hogy egyszerű rendszerek hosszú ideig tartó mozgása is gyakran szabálytalan. Például, ha tekintük egy kis golyót, melyet egy gumiszál végére rögzítünk, és vizsgáljuk, mi történik nagy amplitúdójú kitérések esetén, azt látjuk, hogy a mozgás jóval bonyolultabb mint a lengés és a rezgés egyszerű összetevése.[4]

Az egyszerű rendszerek szabálytalan mozgását kaotikusnak mondjuk. Tehát a kaotikus viselkedés az egyszerű rendszerek olyan mozgása (dóbeli viselkedése), melyre jellemző, hogy: nem építhető fel, mint véges számú periodikus mozgás egymáratevődése, hosszú időskálán előrejelezhetetlen és érzékeny a kezdőfeltételekre. Ráadásul ezek a tulajdonságok általában egyszerre vannak jelen[4].

Ugyanakkor nem minden bonyolult viselkedés tekinthető kaotikusnak, csak azok, amelyek egyszerű törvényekből következnek. A zajos mozgás a nagyon sok összetevőből álló rendszerek valamely tagjának véletlenszerű viselkedése (pl. termodinamikai rendszerek), mely a többi összetevővel, valamint a környezettel való bonyolult kölcsönhatás következménye. Így „a káosz átmenet a szabályos és zajos mozgás között”[4]. A szabályostól az különbözteti meg, hogy véletlenszerű, a zajostól pedig az, hogy véletlenszerűsége a kevés összetevő, valamint a környezet erős kölcsönhatásából alakul ki.

Definíció szerint egy rendszer akkor kaotikus, ha léteznek olyan paraméterek, melyek esetén kaotikus dinamika alakul ki. Általában a legalább háromváltozós autonóm¹ differenciálegyenlettel leírt nemlineáris rendszerek kaotikusak[4]. Nemlineáris rendszereknek nevezzük azokat a rendszereket, melyek evolúciós egyenletei nemlineárisak. A klasszikus dinamikában ez azt jelenti, hogy a mozgásegyenletekben a rendszer állapotát jelző valamely mennyiség (koordináta, sebesség, gyorsulás, stb.) nemlineáris formában jelenik meg[5].

1 Autonóm: a differenciálegyenlet nem tartalmazza az időt expliciten.

1.2. Determinizmus és káosz

A kaotikus rendszerek értelmezés szerint determinisztikusak. Tehát adottak a rendszer dinamikáját leíró mozgásegyenletek, a kezdőfeltételeket, valamint a rendszert jellemző paramétereket végtelen pontosan ismerjük, illetve a mozgásegyenletek közönséges differenciálegyenletek (nem stohasztikusak), melyek teljes mértékben meghatározzák a rendszer jövőbeli viselkedését[5]. „Gyakorlati szempontból azonban a véges pontossággal ismert kezdőfeltételű viselkedés az érdekes”[4]. A kaotikus mozgás felerősíti ezeket a hibákat, és nagyobb időskálán olyan, mintha stohasztikus mozgásegyenletből következne. De mivel ez a véletlenszerű viselkedés is a kevés változót tartalmazó determinisztikus belső dinamika következménye, ebben az esetben is determinisztikus káoszról beszélünk.

A valós fizikai rendszerekben nem csak a kezdőfeltételek ismeretében van bizonytalanság, hanem a rendszer dinamikáját meghatározó paraméterek is fluktuálhatnak időben. Például a súrlódási erő általában pontról pontra változik egy gerjesztett fizikai inga esetében is. Így az azt leíró differenciálegyenlet nem determinisztikus, hanem stohasztikus. A gyakorlatban azonban az ilyen eseteket úgy tanulmányozzák, hogy az ideális, zaj mentes rendszerre analitikusan, numerikusan vagy számítógépes szimuláció segítségével megmutatják, hogy létezik káosz, majd összevetik a kísérleti viselkedéssel[6].

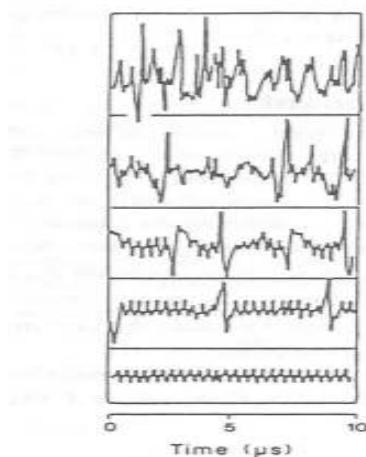
1.3. Káoszhoz vezető utak

Káoszhoz vezető útnak nevezzük azt a folyamatot, mely során változtatva valamely, a rendszert jellemző paramétert (kontroll paramétert), a rendszer dinamikája a szabályosból, vagy látszólag szabályosból kaotikussá válik. A két különböző típusú dinamika kettéválását (széthasadását) bifurkációnak nevezzük. A bifurkáció a kontrollparaméter egészen kis változására is létrejöhet, miközben a rendszer dinamikai viselkedése hirtelen megváltozik[5].

Az egyik legtipikusabb periodikus mozgásból kaotikus dinamikába vezető út a **perióduskettőző bifurkációsorozat**[4], mely során mozgás periódusa a bifurkációk során megduplázódik, mindaddig amíg végtelenné nem válik. Ez esetben a fázistérben a karakterisztikus pont trajektóriája kaotikus lesz[5].

Ha a rendszer olyan, közel szabályos mozgást végez, mely két periódussal jellemezhető, és ezek aránya irracionális, akkor a dinamikája **kváziperiodikus**. Ha a kontrollparaméter változásával a dinamika szabályosból kváziperiodikussá, majd kaotikussá válik, a káosz **kváziperiodikus úton** fejlődött ki.

Intermittenciának nevezzük azt a jelenséget, amely során a rendszer periodikus viselkedést, illetve káoszt is mutat, úgy hogy ezek a mozgástípusok időben szabálytalanul, véletlenszerűen váltakoznak[6], még akkor is, ha determinisztikus rendszerről van szó és nincs jelentősen sok zaj. Általánosan pedig intermittenciának nevezzük azt, amikor a rendszer viselkedése véletlenszerűen váltakozik látszólag két minőségileg különböző dinamika között. Ahogyan a kontrollparamétert változtatjuk a periodikus mozgásban egyre gyakrabban figyelhetünk meg kaotikus villanásokat, mígnem rendszer a teljesen kaotikussá nem válik[5]. Intermittens káosz megjelenik például lézerek esetében is. Változtatva lézer rezonátortükrének dőlésszögén, és ábrázolva különböző szögekre a kilépő sugár intenzitását az idő függvényében tiszta periodikus jeltől **intermittens út** vezet (**I.1. ábra**) a teljesen kaotikus jel irányába (I. típusú intermittencia) [6]. Fluidumok és kémiai reakciók esetén megjelenő intermittenciáról találunk még leírásokat a szakirodalomban[7].



(I.1. ábra) Intermittens út a periodikus viselkedéstől a kaotikus fele.[6]

Természetesen egy adott paraméter esetén a rendszer viselkedése nem változik. Intermittens esetben azonban látszólag teljesen különböző típusú viselkedések nagyon hosszú ideig (a dinamika karakterisztikus idejéhez képest) maradnak fent, majd hirtelen alakulnak át egymásba (lényeges azonban megjegyezni, hogy csak látszólag teljesen különböző típusúak). Valójában a periodikus tartományban csak közel periodikus a dinamika, míg egészében véve teljesen aperiodikus (és kaotikus)[5].

Az intermittenciának négy típusát különböztetjük meg. Az **I-es típusú** intermittencia vagy stabil intermittencia esetében a mozgás amplitúdója közel állandó (átlagosan). A **II-es típusú** intermittencia akkor jelentkezik, ha egy bifurkáció során az egyik frekvencia (a frekvenciához tartozó határciklus) instabillá válik és így két frekvenciával jellemzett viselkedés kaotikus

kitörésekkel keveredik. **III-as típusú** intermittencia jelenik meg akkor, ha a perióduskettőző bifurkáció során instabil periodikus állapot jön létre, így szintén kaotikus viselkedéssel váltakozva van jelen. A **IV-es típusú** intermittenciát onnan ismerhetjük fel, hogy a rendszer viselkedését „nyugalmas” periódusok és kaotikus kitörések váltakozása jellemzi. A „nyugalmas” periódusok során a mozgás frekvenciája közel zéró, így közel(!) stabil állapotnak tekinthető[5].

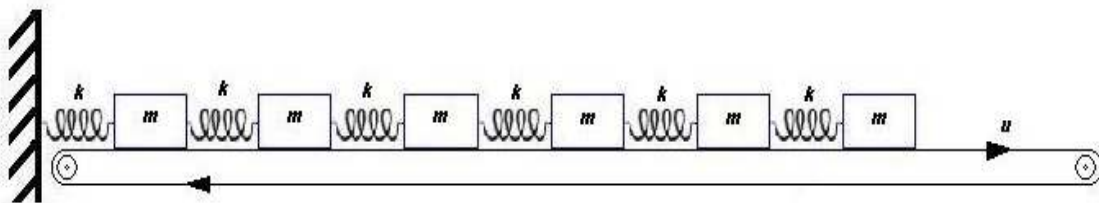
1.4. A tanulmányozott rendszer leírása

A dolgozatban egy könnyen elkészíthető kísérleti berendezést modellezünk és számítógépes szimuláció segítségével vizsgálunk. Tekintsük először vázlatosan a tanulmányozandó rendszert.

Egy futószalagra téglatest alakú, egyforma tömböket helyezünk, melyeket rugóval kötünk össze. Az így kialakított láncot **(I.2.ábra)** az első tömbtől fogva, szintén egy rugóval a földhöz képest rögzítjük. A futószalagot mozgásba hozva azt tapasztaljuk, hogy kezdetben a testek a szalaggal együtt mozognak, majd sorra megcsúsznak a rájuk ható rugóerők hatására, és később újból megállnak a szalaghoz képest. Ez a dinamika olykor periodikusan, máskor meg időben rendezetlenül ismétlődik a kísérlet során. Tehát kaotikus viselkedést vagy kirtikus önszerveződést kereshetünk a rendszerben.

A futószalag sebességének beállításával és a tömbök számának változtatásával különböző paraméterekre tanulmányozni tudjuk hogyan viselkedik a rendszer. A rugó-tömb lánc fölé videokamerát szerelve rögzíteni tudjuk, hogyan mozognak a tömbök és hogyan változik a lánc hossza, majd számítógép segítségével fel tudjuk dolgozni a videófelvételt.

Tűzzük ki tehát célul a lánc végén elhelyezkedő tömb mozgásának vizsgálatát, mely ugyanakkor lehetőséget nyújt a lánc hosszának időbeli fluktuációinak tanulmányozásához.

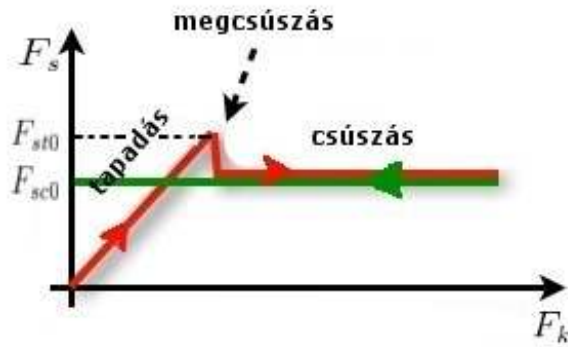


(I.2. ábra): Hat tömbből álló rugó-tömb rendszer a futószalagra helyezve

Minden testre hat az eredő rugóerő, valamint a súrlódási erő. A súrlódási erő a test szalaghoz viszonyított (1)-es képlettel értelmezett v_r relatív sebességének függvénye (2): ha a szalaghoz képest mozgásban van, akkor csúszási súrlódási erő (F_{sc0}) hat rá, ellenkező esetben a

tapadási súrlódási erő (F_{st0}). A kettő arányát jelöljük a következőképpen: $f_s = \frac{F_{sc0}}{F_{st0}}$

Akkor csúszik meg egy tömb, ha a rá ható F_k külső erő (jelen esetben az F_r eredő rugóerő) nagyobb, mint F_{st0} , a tapadási súrlódási erő maximuma, és akkor áll meg, amikor v_r sebessége 0-ra csökken (**I.3. ábra**).



(**I.3. ábra**): A tömbre ható súrlódási erő (F_s) változása külső erő (F_k) függvényében ábrázolva (a piros szín egy nyugalomból induló testre vonatkozik, a zöld szín pedig egy már mozgásban lévő testre)

$$v_r = v_i - u = \dot{x}_i - u \quad (1)$$

$$F_s = \begin{cases} F_r, & v_r = 0 \wedge |F_r| < F_{st0} \\ F_{sc0}, & v_r = 0 \wedge |F_r| = F_{st0} \\ F_{sc0}, & v_r \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Newton 2. törvényét alkalmazva a testekre a következő csatolt, nemlineáris differenciál-egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_1 &= F_r(x_1, x_2) + F_s(\dot{x}_1 - u, F_r(x_1, x_2)) \\ m \cdot \ddot{x}_2 &= F_r(x_1, x_2, x_3) + F_s(\dot{x}_2 - u, F_r(x_1, x_2, x_3)) \\ &\vdots \\ m \cdot \ddot{x}_i &= F_r(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + F_s(\dot{x}_i - u, F_r(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})) \\ &\vdots \\ m \cdot \ddot{x}_N &= F_r(x_{N-1}, x_N) + F_s(\dot{x}_N - u, F_r(x_{N-1}, x_N)) \end{aligned} \quad (3)$$

A tömbökre ható súrlódási erők több képlettel vannak értelmezve és nem folytonos függvények, hiszterézisszerű viselkedéssel rendelkeznek, ezért az N darabból álló csatolt differenciál-egyenletrendszer analitikusan nem megoldható. Pontosabban az előbbi tulajdonsága teszi az dinamikát nemlineárisá, lehetővé téve a kaotikus és kollektív viselkedések kialakulását. Itt megjegyezzük, hogy második közelítésben a rugóerők nagy megnyúlások esetén fellépő nemlineáris viselkedése szintén szerepet játszik majd ebben.

Molekuláris dinamika típusú szimulációval könnyebben kezelhető a probléma, valós

időben követhetjük a rendszer viselkedését, egész paraméter-tartományokra „feltérképezhetjük”.

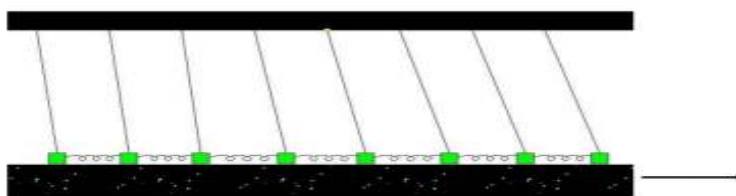
II. A rugó-tömb modell alkalmazásai

Az általunk vizsgált rendszer nem más mint egy klasszikus rugó-tömb modell kísérleti megvalósítása. A rugó-tömb modellek a szakirodalomban ma már egy teljes modellcsaládot alkotnak és akárcsak a homokdomb modell, nagyon hasznosnak bizonyulnak a kritikusan önszerveződő rendszerek tanulmányozásánál.

Az első egydimenziós (e dolgozatban tanulmányozott rendszerhez hasonló) rugó-tömb típusú modellt Buridge és Knopoff tette közé 1967-ben[2], melyben sikeresen magyarázta a földrengésekre érvényes Gutenberg-Richter törvényt. Azóta számtalan más területen alkalmazzák sikeresen: száradó granuláris anyagok töredezésére, felületeken kapiláris erők hatására önszerveződő nanogömbök tanulmányozására, nanocső rendszerekben létrejövő mintázatok megértésére, mágnesezési zajok és Barhausen zaj modellezésére, települések alkotta földrajzi régiók kialakulására[8], üveglapokon létrejövő törések tanulmányozására[9], autópályán haladó autósor modellezésére, stb.

Ebben a részben áttekintjük, milyen eredmények születtek a felsorolt alkalmazások révén.

1. A **földrengések** jelentős része tektonikus lemezek találkozásánál keletkezik. A lemezek egymás alá bukásakor felgyülemelő feszültség hatására az egyik lemez hirtelen megcsúszik. Az ekkor felszabadult mechanikai rezgések E energiájával definiálható a földrengések nagysága (m): $lg(E)=11.8+1.5m$. A Gutenberg-Richter törvény[10] szerint ezen a skálán az m erősségű földrengések előfordulási gyakorisága hatványfüggvény szerinti eloszlást mutat. A Buridge-Knopoff modell segítségével ez a dinamika a **II.1.ábra** figyelembe vételével a következőképpen magyarázható: az egyik lemezt jelképező alsó sík elmozdulásának következtében felgyülemlik a rugókban az energia, mely a másik lemezt modellező tömbök lavinaszerű megcsúszásához vezet.



(II.1. ábra): Buridge-Knopoff modell: rugókkal összekötött tömbök két relatívan mozgó síklap között[2]

Ezzel a rugó-tömb modellel sikerült elsőként igazolni a Gutenberg-Richter törvényt, visszakapva a hatványfüggvény szerinti eloszlást.

2. Vékonyrétegű nedves granurális anyagok száradása során történő **töredezések** kvázisztatikus folyamatnak tekinthetők. Ilyen törzési folyamatok játszódnak le sár, agyag, festékréteg, hó, aszfalt, stb száradásakor. A jelenség a rugó-tömb modellel a következőképpen magyarázható[11]: ha az anyagrészecskéket tekintjük a tömböknek, a köztük lévő folyadékhidakat a rugóknak, száradáskor a rugóállandók növelésével a részecskék a növekvő feszültség hatására tömörülnek, a rugók elszakadása esetében töréscentrumok nukleálódhatnak, érdekes mintázatokat hozva létre [11].

3. Az előző modell nagyon jól alkalmazható **nanögömb szuszpenziók száradására** is[12]. Ez esetben azonban nem csak a kapiláris erők jelentkeznek, hanem elektrosztatikus taszítás, merev taszítás, valamint surlódási erő is. Ezek szintén rugóerők segítségével vihetők be a modellbe. Az így kapott eredmények is nagyon jól összeegyeztethetők a kísérleti eredményekkel [12].

4. **Nanocső rendszerekben** is tapasztalhatunk kapiláris önszerveződést. Ha egy felületre merőlegesen többfalú nanocsöveket növesztünk és folyadékba merítjük, a folyadék elpárolgása után celluláris struktúrák alakulnak ki. Ez a valóságban egy három dimenziós önszerveződési folyamat, de a rugó-tömb modell sajátosságai révén leegyszerűsíthető és két dimenzióban is tárgyalható[13]. Ebben az esetben a modellben már két típusú tömböt és rugókat kell alkalmazni. Elszakíthatatlan rugóval a nanocső rugalmas testét, más típusú rugókkal meg a kapiláris erőket lehet modellezni. A számítógépes szimuláció eredményei szintén a kísérlettel egyező eredményeket mutattak.

5. Ferromágnesek esetében ábrázolva a mágnesezési görbét, megfigyelhető, hogy a változó külső mágneses tér hatására a minta mágnesezettsége diszkrét ugrásokban változik. Ezt nevezzük **Barkhausen zajnak**, mely a doménfalak gyors mozgásának köszönhető. Egy egyszerű egydimenziós rugó-tömb modell segítségével[14] a mágneses hatásoknak megfelelő mechanikai analógát keresve visszakapható a hiszeterézis, valamint a Barkhausen zaj is.

6. Egy, autópályán haladó autósor dinamikája egy nemlineáris, komplex jelenség, viszont jól vizsgálható a statisztikus fizika módszereivel a rugó-tömb modell segítségével[15].

A jelen dolgozatot megelőzően érdekes eredményeket értük el egy szintén egydimenziós rugó-tömb modellben. A dinamika törvényeit alkalmazva, valamint mesterséges szabályok

bevezetésével egy **autópályán haladó autósor** modelleztünk(II.2. ábra).



(II.2. ábra): a. Egyenletesen haladó autósor; b. Dugók kialakulása[1]

Amennyiben kizárjuk a lehetőségét, hogy az autók elkerüljék egymást, a következő megfeleltetéseket használhatjuk: az autók legyenek a tömbök, a rugók biztosítják a megfelelő távolságot közöttük, a csúszó és tapadási surlódási erők, valamint a tömbök tömege az autókat vezető személyek reakcióidejét és az autók tehetetlenségét adják. Véletlenszerűen osztva ki a surlódási erőket, modellezhetjük a vezetési attitűdök különbözőségét. A sebességkorlátozást az időegység alatti lépéshossz (d_0) korlátozásával érhetjük el, valamint az ütközéseket a testek között minimális távolság definiálásával. Bevezetve egy rendparamétert, a surlódási erők szórásának függvényében dinamikus fázisátalakulás mutatható ki a rendszerben[1]. Ez a rendparaméter egy autó dinamikáját tükrözi a sórból, megadva, hogy milyen hosszú időtartamokat kell torlódásban üljön a vezető. Vizsgálva ezen időtartamok (τ) eloszlását ($g(\tau)$), átlagát és szórását érdekes következtetéseket vonhatunk le. A surlódási erők eloszlásának nagy szórása esetén az autók mozgásában önszerveződés figyelhető meg, lavinaszerű hatások jelentkeznek, míg kis szórás esetén rendezetlenül viselkedik az autósor.

A rugó-tömb modellcsalád számtalan kritikusan önszerveződő rendszerre és mintázatképző folyamatok modellezésére alkalmazható. Megfelelően megválasztva a tömbök helyzetét, az erők típusát, a surlódási erőket, esetleg bevezetve mesterséges törvényeket egy könnyen kezelhető módszert nyújt úgy kvalitatív, mint kvantitatív mutatók tanulmányozására.

III. Analitikus és szimulációs eredmények egydimenziós rugó-tömb rendszerekre

Ismertetünk néhány eredményt, melyek különböző egydimenziós rugó-tömb tömb rendszerek tanulmányozása során születtek.

Számos rugó-tömb modell lényeges eleme a súrlódási erő, melynek hatására a rendszer úgynevezett „csúszó-tapadó” dinamikát mutat. Téglatest alakú tömböt helyezve egy lejtőre, melynek dőlésszöge valamivel kisebb, mint a csúszási súrlódáshoz tartozó szög, a csúszási súrlódási erő jelenlétében tanulmányozható a test által megtett utak hossza. Egyetlen felszín

esetében a csúszások hossza hatványfüggvény szerinti eloszlást eredményez[16].

Egy egyszerű modelt alkalmazva a kísérlet eredményei szimulációk segítségével jól reprodukálhatóak. Tekintsük a lejtő súrlódó felületét bitek sorozatának, melyek mind 0 és 1 értékeket vehetnek fel bizonyos valószínűséggel, míg a test alsó felületét egyetlen bitnek, mely 1-es értékre van állítva. Súrlódási erő lép fel a test és a lejtő között, amennyiben a test alatti pontban szintén 1-es bit van. Tulajdonképpen a súrlódási erő két értékkel jellemzett véletlenszerű erőnek tekinthető ebben a modellben. A csúszási utak hosszúságára a szimulációk szintén hatványfüggvény szerinti eloszlást adnak a kísérletben kapott hatványkitevőkkel[17]. A kísérleti és szimulációs eredmények közötti egyezés azt mutatja, hogy a súrlódási erő jelenlétéből adódó statisztikus törvényszerűségek jól visszaadhatóak stohasztikus erők használatával. Ugyanakkor arra is magyarázatot tudunk adni, hogy milyen hatások játszanak fontos szerepet egyetlen felszínű testek súrlódásakor.

Tekintsünk egy egydimenziós rugó-tömb rendszert, melyet egyetlen felszínre helyezünk. Modellezzük a súrlódási erőt az előzőekben használt modellt általánosítva: rendeljük a tömbök alsó felületéhez is bitek sorozatát, melyek bizonyos valószínűséggel vehetik fel az 1-es értéket. A lánc egyik végét állandó sebességgel húzzuk, melynek hatására a lánc hossza megnyúlik, majd a testek lavinaszerűen megcsúsznak. A rendszer egyensúlyba kerül, majd kezdődik előlről e folyamat. Tanulmányozva a lavinákban részt vevő testek számának eloszlását szintén hatványfüggvény szerinti eloszlást kapunk. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a sebesség növekedésével csökkenő súrlódási erő nem feltétele a komplex dinamika kialakulásának, mint ahogy azt korábbi modellek sugallták[18].

Bonyolultabb súrlódási erő modelleket használva számos különböző komplex és kaotikus dinamika megjelenését mutatták ki olyan egydimenziós rugó-tömb rendszerekben, melyeket állandó sebességgel húzunk súrlódás jelenlétében. A legegyszerűbb ilyen rendszer, mely kaotikus dinamikát mutat két testből áll, melyek nemlineáris súrlódási erő hatásának vannak kitéve[3]. Tanulmányozva a rendszer dinamikáját analitikusan és numerikusan, megmutatható, hogy periodikus, kváziperiodikus és kaotikus viselkedés is megjelenik bizonyos paraméter-tartományokban. Sikeresült kimutatni több különböző káoszhoz vezető utat is: periódiskettőző bifurkációt, I-es és II-es típusú intermittenciát és krízis indukált intermittenciát is[3]. Hasonló eredményt kaptak lineáris, szakaszonként integrálható súrlódási erőt alkalmazva is[19]. Ez az eredmény szintén azt támasztja alá, hogy az egydimenziós rugó-tömb rendszer esetében a

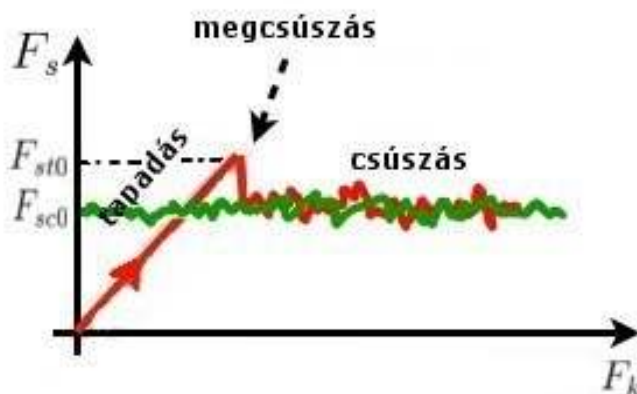
komplex, kaotikus viselkedés nem feltétlenül a sebesség növekedésével csökkenő (vagy valamilyen más, bonyolult, nemlineáris függvényvel változó) súrlódási erő következménye, hanem „csúszó-tapadó” dinamika nem várt hatása.

A rendszer egy másik tanulmányában egy sokkal bonyolultabb súrlódási erő modellt használnak, bevezetve egy újabb állapotváltozó mennyiséget. Tekintve a lánc átlagos hosszát a kontrollparaméter függvényében egy folytonos átmenetet találunk a csúszkáló és „csúszó tapadó” dinamika között. A szerzők dinamikus fázisátalakulásra hívják fel a figyelmet[20].

IV. A rugó-tömb modell számítógépes vizsgálata

IV.1. A modell és az alkalmazott numerikus módszerek (1. verzió)

Az I.4. alfejezetben ismertetett rendszert modellezve tökéletesen egyforma testeket és rugókat alkalmazunk (I.1. ábra). A rugók ideálisak (1. verzióban). A futószalag állandó u sebességgel halad, a testek kezdetben szintén u sebességgel rendelkeznek. A valós fizikai rendszerben sem a rugók, sem a testek nem tökéletesen egyformák, a szalag felületén vannak egyenetlenségek, így a súrlódási együttható pontról-pontra változik (IV.1. ábra). Ezt úgy visszük be a modellbe, hogy a testekre ható tapadási súrlódási erőt (F_{st}), valamint a csúzási súrlódási erőt (F_{sc}) egymástól függetlenül, véletlenszerűen, egy-egy átlagos érték (F_{st0} és F_{sc0}) körüli azonos σ szórású normál eloszlással osztjuk ki. Az f_s arányossági tényezőt ennek megfelelően az átlagértékek hányadosaként definiáljuk.



(IV.1. ábra): A súrlódási erő stochasztikus modellje.

Ez részben hasonlít a [18]-ban használt modellhez, de a normál eloszlás miatt realisabbnak tekintjük. A testek, ha mozgásban vannak, minden időlépésben új csúszó súrlódási erőt és új tapadási súrlódási erőt kapnak.

Tehát bemenő paramétereink: u a szalag sebessége, m a testek tömege, k a rugóállandó, F_{st0} a tapadási súrlódási erő maximumának középértéke, f_s a csúszási és tapadási súrlódási erők középértékének aránya, σ a súrlódási erők eloszlásának szórása (a rendezetlenség/zaj mértéke), l a rugók nyugalmi hossza és N a tömbök száma. Válaszzuk meg a paramétereket a következőképpen (az indoklástól tekintünk el a kísérleti paraméterek tisztázásáig):

($m=1$, $l=50$, $k=1$): e három paraméter rögzítésével a mechanikában használatos alapmennyiségeket skáláját rögzítjük (tehát pl. a rugók nyugalmi hossza 50 egység),

($F_{st0}=71.4$, $f_s=0.45$): megadjuk a súrlódási erők arányát, valamint a tapadási súrlódási erő maximumának középértékét,

(N , σ , u): változó paraméterek.

A tömböknek kétféle mozgásállapota lehetséges a szimuláció során:

1. állandó sebességgel mozognak a földhöz viszonyítva (a szalaggal együtt mozognak) mindaddig, míg a rájuk ható eredő rugóerő nagyobb nem lesz, mint a tapadási súrlódási erő -ekkor megcsúsznak

2. gyorsulva mozognak a földhöz és a szalaghoz viszonyítva is, miközben hat rájuk a csúszó súrlódási erő és a rugóerők, addig amíg relatív sebességük 0-ra lecsökken, ez esetben a szalaghoz viszonyítva megállnak.

Ezek látszólag nagyon egyszerűen kezelhetők numerikusan is, probléma a mozgásállapotok közötti átmenetkor adódik. A fentiek figyelembevételével, az időt diskretizálva (bevezetve a dt időlépést) négy esetet kell tárgyalni:

1.a: egyenletes mozgás

1.b: megcsúszás

2.a: gyorsuló mozgás

2.b: megállás.

A négy eset részletes tárgyalását a Függelékben mutatjuk be.

IV.2. A szimulációs program

A szimulációs program algoritmusváza a következőképpen néz ki:

a) adatok beolvasása

b) dinamika

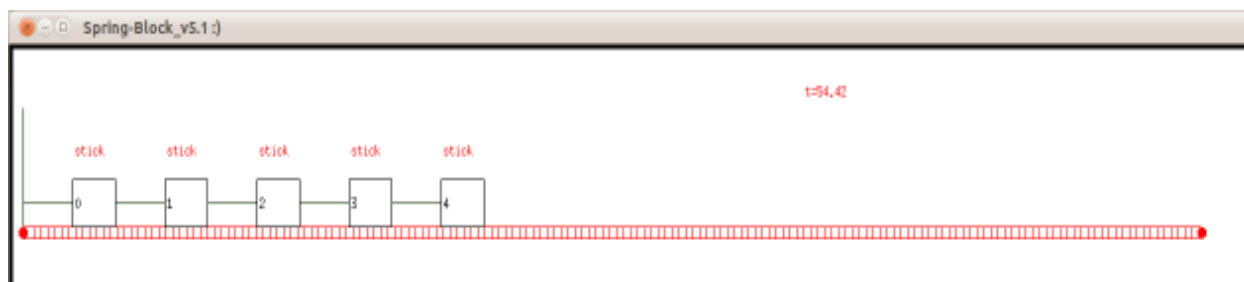
- a súrlódási erők kiosztása
- az előző lépés alapján:
 - szalaggal mozgás , vagy
 - gyorsuló mozgás (első két lépésben Euler II, majd Verlet-módszer)
- az erők és sebességek kiértékelése
 - megcsúszás ellenőrzése, ha kell korrekciók
 - megállás ellenőrzése, ha kell korrekciók

c) rendparaméter kiszámítása

d) eredmények kiírása

A b. pontot nagyon sokszor megismételjük.

A szimulációs programban van be- és kikapcsolható grafikus felület is (**IV.2. ábra**) (a testek mozgását valós időben nyomon követhetjük), mely az X11 grafikus könyvtárat használja.



(IV.2. ábra): A grafikus felület: a testek láthatóak a futószalagon egy kezdeti pillanatban

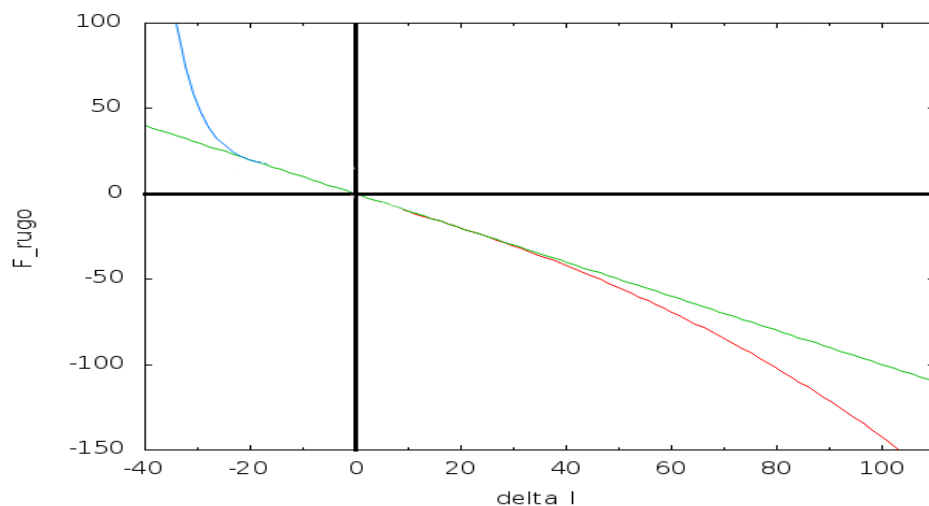
IV.3. Fejlesztések (2. verzió)

A szimulációs programot tesztelve érdekes problémákra bukkantunk. A szalag nagy sebességeinek esetén nagyon megnő a rendszer hosszának a fluktuációja, a testek nagy amplitúdójú mozgást végeznek, vagy lavina fut végig a láncon. Ilyen esetekben, mivel ideális rugókat használtunk a modellben, olykor megtörtént, hogy ütköztek a testek. Ez azért jöhetett létre, mert nagy amplitúdójú mozgások esetén a tömbök tehetetlenségük miatt egy másik tömbhöz közeledve, bár a rugót teljesen összenyomták, mégsem lassultak le eléggé, és ütköztek. Ezt úgy sikerült kiküszöbölnünk, hogy a rugókat a továbbiakban, hasonlóan a valósághoz, csak egy adott tartományban tekintettük lineáris tulajdonságúnak. Egy adott megnyúlás, vagy összehúzódás fölött (Δl_{\max}) a rugóerő exponenciálissá válik. Ahhoz, hogy mindenképp elkerüljük ezt a nem kívánt jelenséget, megtörtük a szimmetriát: összenyomódás esetén nagyobb kitevőjű exponenciális függvényt használunk, mint megnyúláskor. Ezzel egyúttal azt is elekerüljük, hogy a túlságosan megnyúlt rugó nem realiztikus (túl nagy értékű) erőket vigyen be a rendszerbe,

gerjesztve azt. Az új függvény paramétereit úgy választottuk meg, hogy az erő folytonos és deriválható legyen a kétféle viselkedés határátmenetekor:

$$F_{\text{rugo}}(\Delta l) = \begin{cases} k \cdot |\Delta l|, & |\Delta l| < \Delta l_{\text{max}} \\ k \cdot \Delta l_{\text{max}} + \frac{k}{b} \cdot e^{b(|\Delta l| - \Delta l_{\text{max}})} - \frac{k}{b}, & |\Delta l| > \Delta l_{\text{max}} \end{cases} \quad (4)$$

Az így értelmezett függvények negatív és pozitív tartományban más b értékkel rendelkeznek, a **IV.3. ábrának** megfelelően.



(IV.3. ábra): A rugóerő az összenyomódás/megnyúlás függvényében. Zölddel a lineáris változás, kézzel a $b=0.2$, pirossal a $b=0.01$ paraméternek megfelelő exponenciálisak vannak ábrázolva $\Delta l_{\text{max}}=20$ esetén.

IV.4. Rendparaméter

A rugó-tömb láncot sok jelenség szempontjából lehet vizsgálni (kaotikus dinamika, lavinák, önszerveződés, fluktuációk, kollektív viselkedés). Itt megadunk egy rendparamétert, melynek segítségével a rugó lánc hosszának fluktuációját vizsgálhatjuk. Ezen jelenséget leíró legegyszerűbb rendparaméter a rendszer teljes hosszának a relatív szórása, melyet a következő képlettel értelmezünk:

$$r = \frac{\sqrt{\langle x_N^2 \rangle - \langle x_N \rangle^2}}{\langle x_N \rangle} \quad (5)$$

ahol $\langle x_N \rangle$ a lánc átlagos hosszát jelöli.

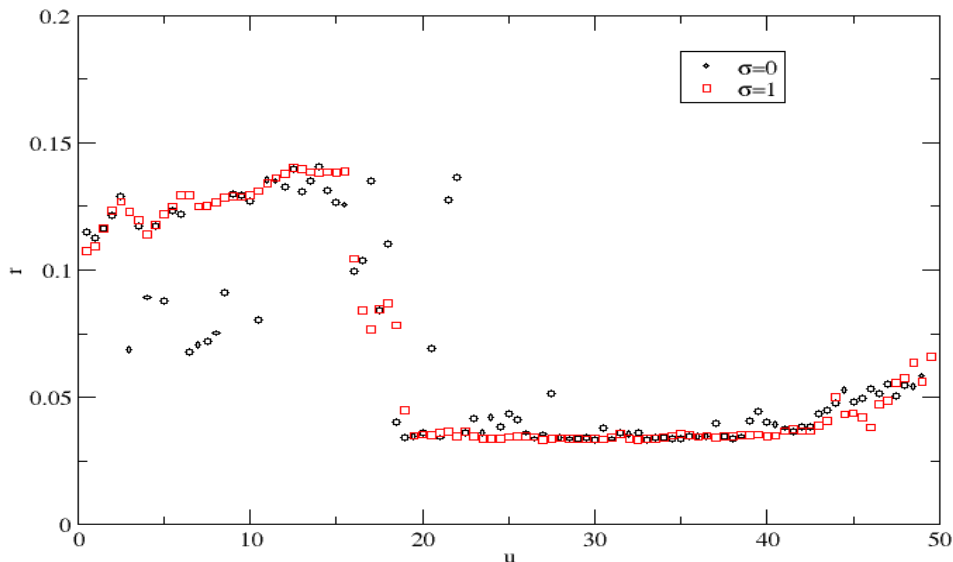
Ennek a paraméternek segítségével tanulmányozni tudjuk, mennyire fluktuál a lánc hossza a paraméterek függvényében. A fluktuáció lehet kaotikus mozgás, lavinaszerű viselkedés, de lehet harmonikus oszcillátorhoz hasonló rezgés is, tehát önmagában a rendparaméter nem ad lehetőséget, hogy megkülönböztessük ezeket jelenségeket. A rá kapott eredményeket azonban

értelmezhetjük, ha részletesebben megvizsgáljuk a megfelelő Poincare-metszeteket.

IV.5. Szimulációs eredmények

A I.2 alfejezetben megadott módszernek megfelelően tanulmányozzuk először a rendszert a súrlódási erőben fellépő zaj hiányában, majd összehasonlítjuk az eredményeket a zajos esettel. A súrlódási- és a rugóerők következtében a mozgásegyenletek nemlineáris differenciálegyenletek, tehát várhatunk kaotikus viselkedést.

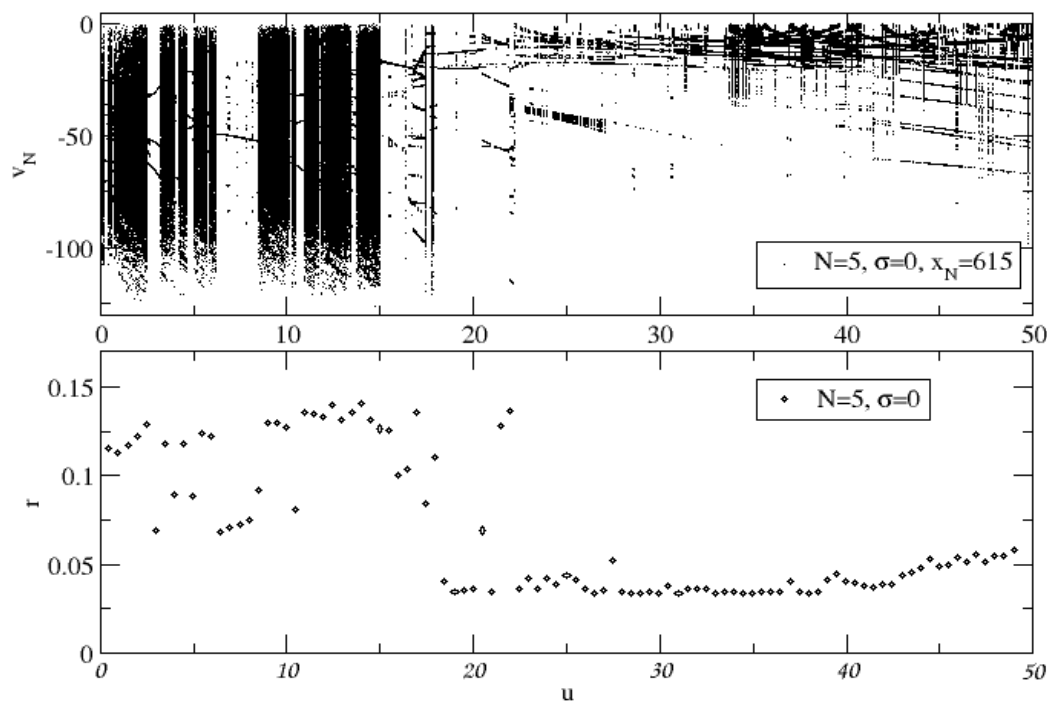
Állítsuk be az időlépés értékét $dt=0.001$ -re, a szimulációs lépések számát 10^9 -re, melynek $t=10^6$ szimulációs idő felel meg. A végső rendparaméter értékét 10 ugyanazon paramétersorra futtatott szimulációból kapott rendparaméterek átlagaként adjuk meg. Számos eddigi eredményünk azt mutatja, hogy 10-es átlag elegendő, hiszen 50-es átlagok esetében sem csökkent számottevően a zaj egy-egy kapott görbe esetében. A szimulációs idő hossza az általunk vizsgált paramétertartományban szintén elegendőnek tekinthető, mert bár hosszabb futtatások némileg megváltoztatják a rendparaméter értékét, az eredmény minőségileg nem változik meg. Erre egy későbbi részben még visszatérünk. Vizsgáljuk meg tehát a rendparaméter változását a szalag sebességének függvényében zaj hiányában, illetve kis zaj esetében.



(IV.4. ábra): A rendparaméter a szalag sebességének függvényében, zaj hiányában ($\sigma=0$) és kis zaj esetén ($\sigma=1$).

Az IV.4. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a szalag sebességének növelésével egy

kritikus sebességérték körül a rendparaméter értéke hirtelen, fázisátalakulás-szerűen, több mint felére esik. Kis sebességek esetén a rendszer hossza nagyon fluktuál, majd elérve az $u=15$ -20-as sebességtartományt, a fluktuáció lecsökken és ez megmarad egészen nagy sebességértékekre is.

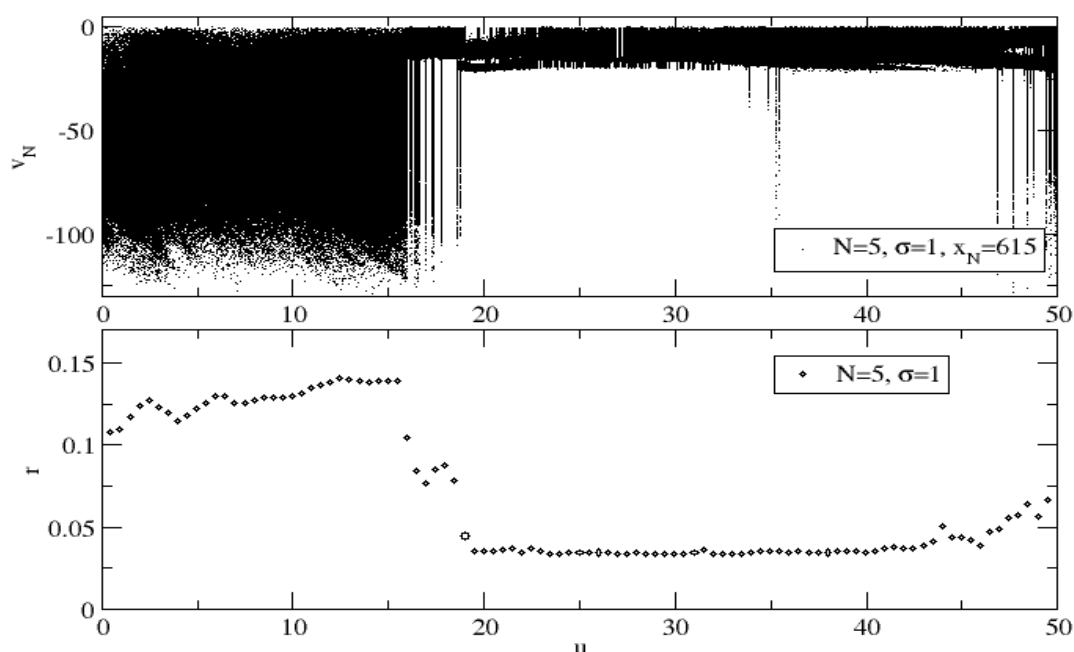


(IV.5. ábra): Fent: bifurkációs diagram a $\sigma=0$, zajtalan esetre.

Lent: a neki megfelelő rendparaméter értékek.

Értelmezzünk egy bifurkációs diagramot a rendszerünkre a következőképpen: metsszük el a fázistérben a trajektóriát az utolsó test egy adott koordinátája (pl: $x_N=615$) által meghatározott síkkal. Az így kapott pontokat levetítjük az utolsó test sebességtengelyére, majd árbázoljuk őket különböző szalagsebességek esetén. Gyakorlatilag elmentjük az utolsó test sebességét minden olyan esetben, amikor a koordinátájára igaz, hogy $x_N(t) > 615$ és $x_N(t+dt) < 615$. Addig futtatjuk a programot, amíg a szalag minden sebességértékére 1000 darab ilyen pontot kapjunk. A IV.5.ábra első része tartalmazza a bifurkációs diagramot. A kontrollparaméter különböző értékeire bifurkációkat figyelhetünk meg. A kaotikus tartományokat periodikus ablakok váltják fel, melyet jól tükröznek az alsó ábrán látható megfelelő rendparaméter értékek. Megfigyelhető azonban, hogy az $u=15$ -ös sebesség fölött az utolsó test dinamikája kevés kivétellel mindig periodikus. Az $u=17$ -es sebességre perióduskettőző bifurkációt láthatunk.

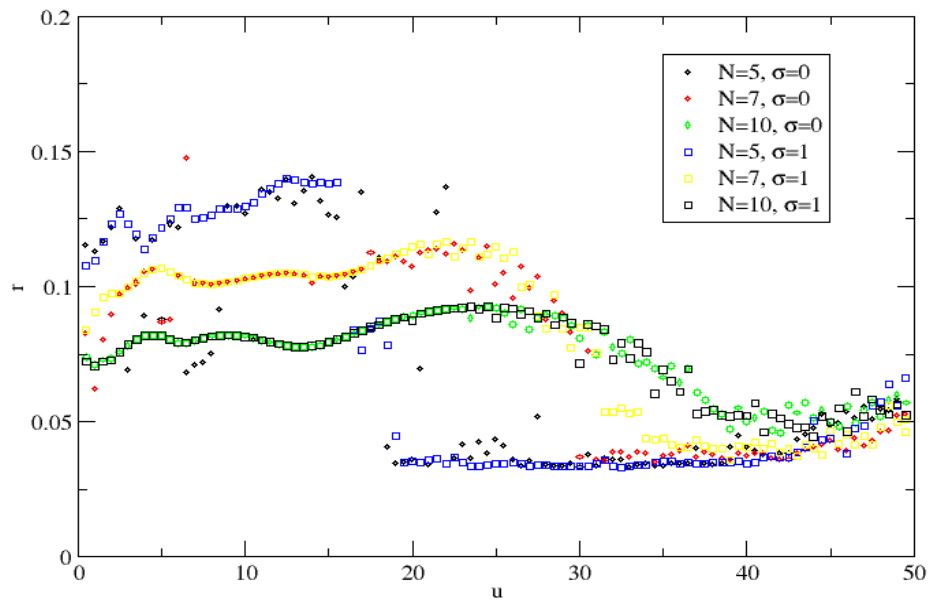
Továbbá észrevehetjük, hogy a dinamika zaj nélkül és kis zaj esetében is közel ugyanazzal a rendparaméterértékekkel jellemezhető, sőt kis zaj esetében ($\sigma=1$ az $F_{st0}=71.4$ mellett kicsinek tekinthető) a görbe simábbá válik. Tehát levonhatjuk a következtetést, hogy kis zaj jelenlétében a rendszer statisztikailag (a rendparamétert tekintve) ugyanúgy viselkedik, mint annak hiányában. Ezt igazolja a **IV.6.ábrán** látható bifurkációs diagram is, ahol két teljesen különböző sebességértékekkel jellemzett tartományt találunk. Az $u=17$ -es sebesség alatt az utolsó test mozgása teljesen aperiodikus, fölötte pedig közel periodikusnak tekinthető. Természetesen ezt a periodikus dinamikát a zaj jelenléte kissé elmosza, de a kis fluktuációk ez esetben is megmaradnak.



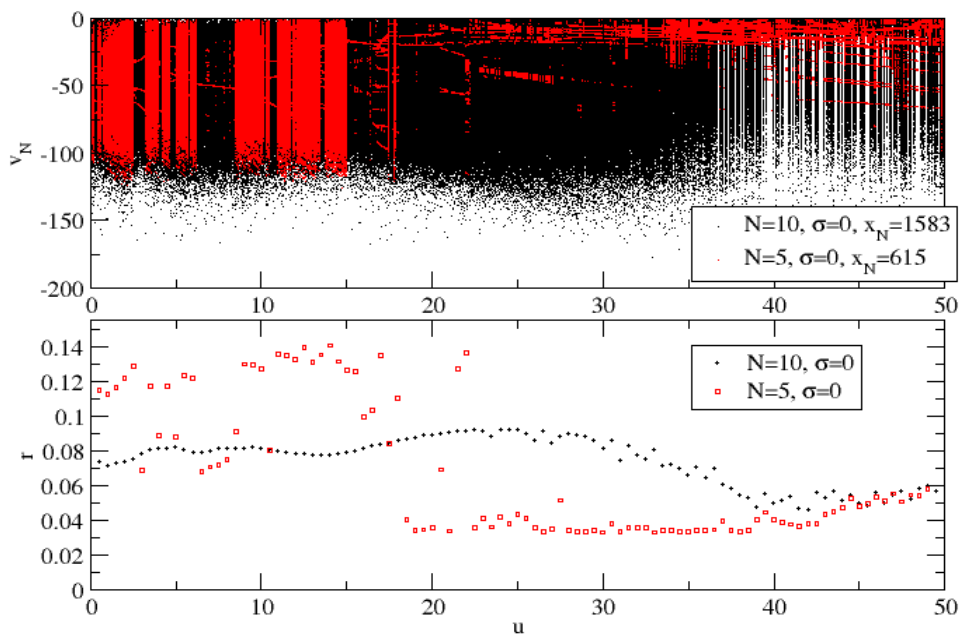
(IV.6. ábra): Fent: bifurkációs diagram a $\sigma=1$, zajos esetre.

Lent: a neki megfelelő rendparaméter értékek.

Vizsgáljuk meg részletesebben a fázisátalakulás-szerű átmenetet. Amennyiben termodinamikai értelemben vett fázisátalakulás történik, a rendszer méretének növelésével kellene meredekebb legyen az átmenet. Vagyis a rendparaméter deriváltjának értéke a fázisátalakulás pontjában a rendszer növekedésével kellene növekedjen. Amint az az **IV.7. ábrán** is látszik, nagyobb rendszerekre ($N=7, N=10$) is igazolódott, hogy $\sigma=0$ és $\sigma=1$ paraméterek esetén a rendszer dinamikája statisztikailag nem változik.



(IV.7. ábra): A rendparaméter a szalag sebességének függvényében, zaj hiányában és kis zaj esetén, különböző hosszúságú láncokra.



(IV.8. ábra): Fent: a bifurkációs diagram 5 és 10 test esetében.

Lent: bifurkációs diagramnak megfelelő rendparaméter értékek.

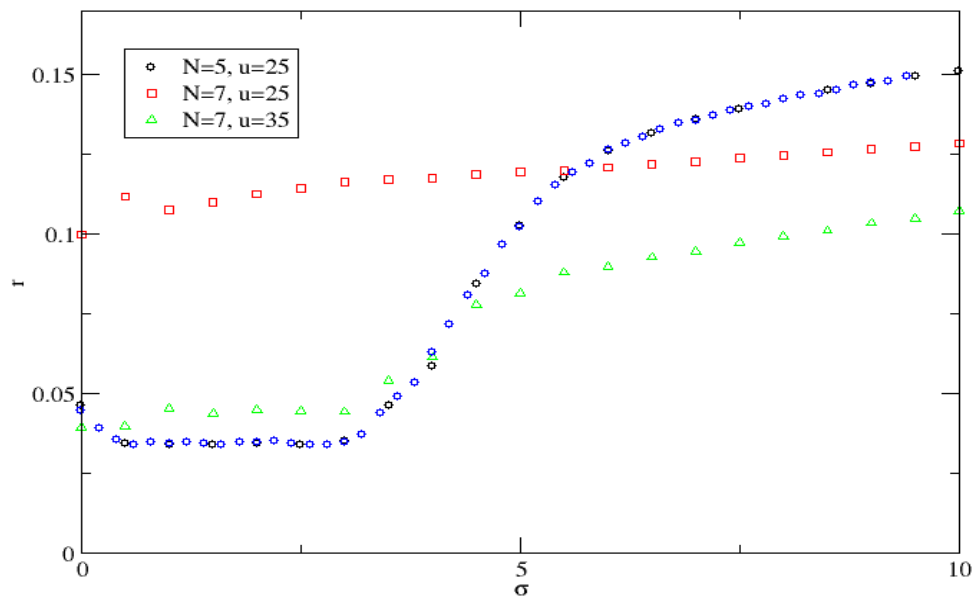
A rendszer méretének növelésével a hirtelen átmenet egyre folytonosabbá válik, a fázisátalakulás-szerű átmenet elmosódik. Ezek az eredmények azt sugallják, hogy egydimenziós rugó-tömb modellekben a kis rendszerek esetében kapunk érdekes viselkedést, és nem a termodinamikai határesetben. Mivel a rendszerünk nem egyensúlyi rendszer, a rendparaméter hirtelen változását a kontrollparaméter változásának függvényében dinamikus fázisátalakulás-szerű viselkedésnek nevezhetjük. Az $N=10$ testre készített bifurkációs diagram is igazolja ezt az érdekes viselkedést (**IV.8. ábra**), melyen jól látszik, hogy ott ahol a rendparaméter értéke lecsökken, bár megjelennek periodikus ablakok, ezeket még mindig aperiodikus tartományok zárják közre. Ez a rendparaméter folyamatos, de nem hirtelen csökkenéséhez vezet.

Ezek az eredmények némileg hasonlítanak a Ref. [20]-ban kapott eredményekhez, azonban ott számottevően bonyolultabb súrlódási erő modellt használnak, valamint hosszabb láncot tanulmányoznak.

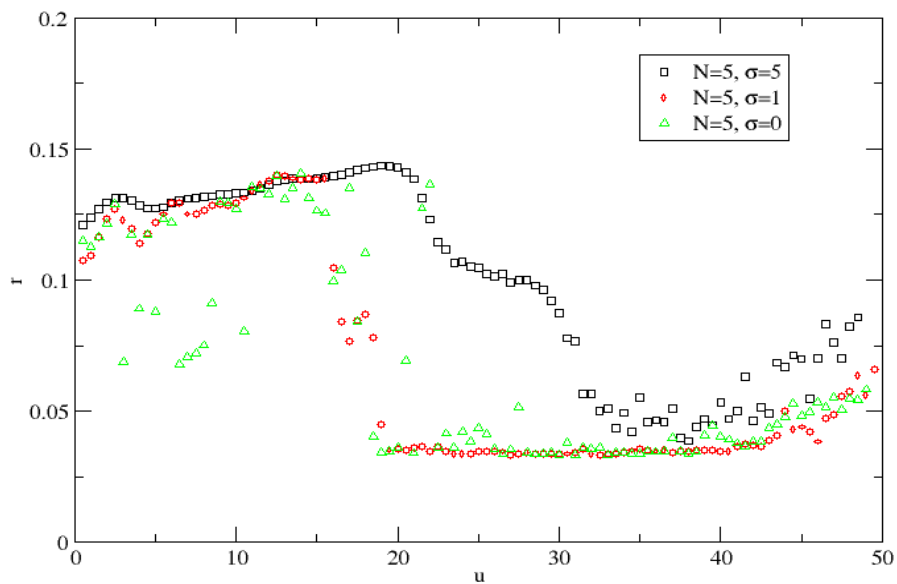
Láttuk, hogy az $u=18-20$ -as sebességtartomány kritikusként bizonyul, mert a rendparaméter értéke abba a tartományban hirtelen csökken. Vizsgáljuk most meg, mi történik, ha állandó sebesség esetén növeljük a súrlódási erők rendezetlenségét.

Öt test esetén ($N=5$), állandó szalag sebesség mellett ($u=25$), növeleve a súrlódási erők szórását, a $\sigma=3-5$ tartományban a rendparaméter értéke hirtelen megnövekedik (**IV.9.ábra**). Tanulmányozva ezt az átmenetet is nagyobb rendszerre ($N=7$), újból azt találjuk, hogy a lánc hosszúságának növelésével ellaposodik a görbe. Tehát a rendszer viselkedésének komplexitása testek számának csökkenésével növekszik. Ez újból egy nem várt eredmény: egy dinamikus fázisátalakulás-szerű folyamat a rendszer méretének növelésével eltűnik.

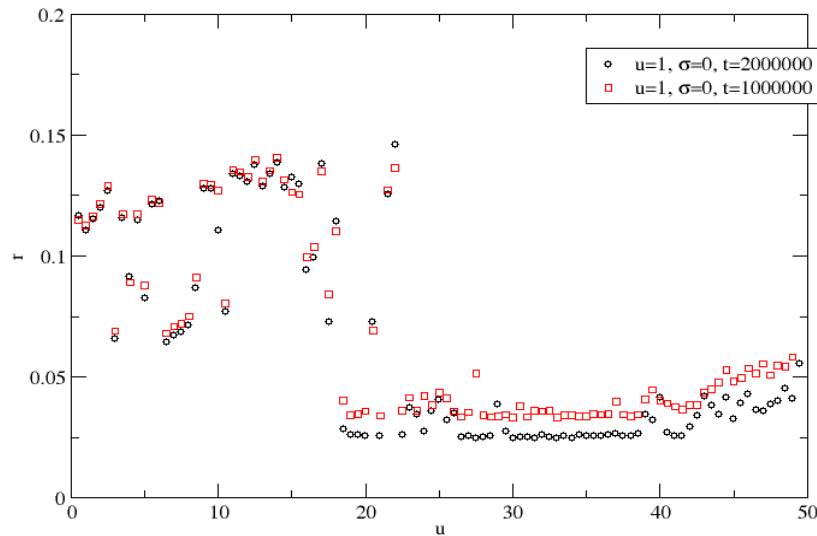
Összegezve az eddigi eredményeket, az **IV.10.ábrán** látható, hogy a kritikus sebességtartomány közelében a rendszer nagyon érzékeny a zaj jelenlétére: az $u=20-30$ -as tartományban a rendszerben lévő fluktuációk nagy mértékben megnövekednek $\sigma=5$ esetén.



(IV.9. ábra): A rendparaméter a sűrűdési erők rendezetlenségének függvényében, különböző hosszúságú láncokra



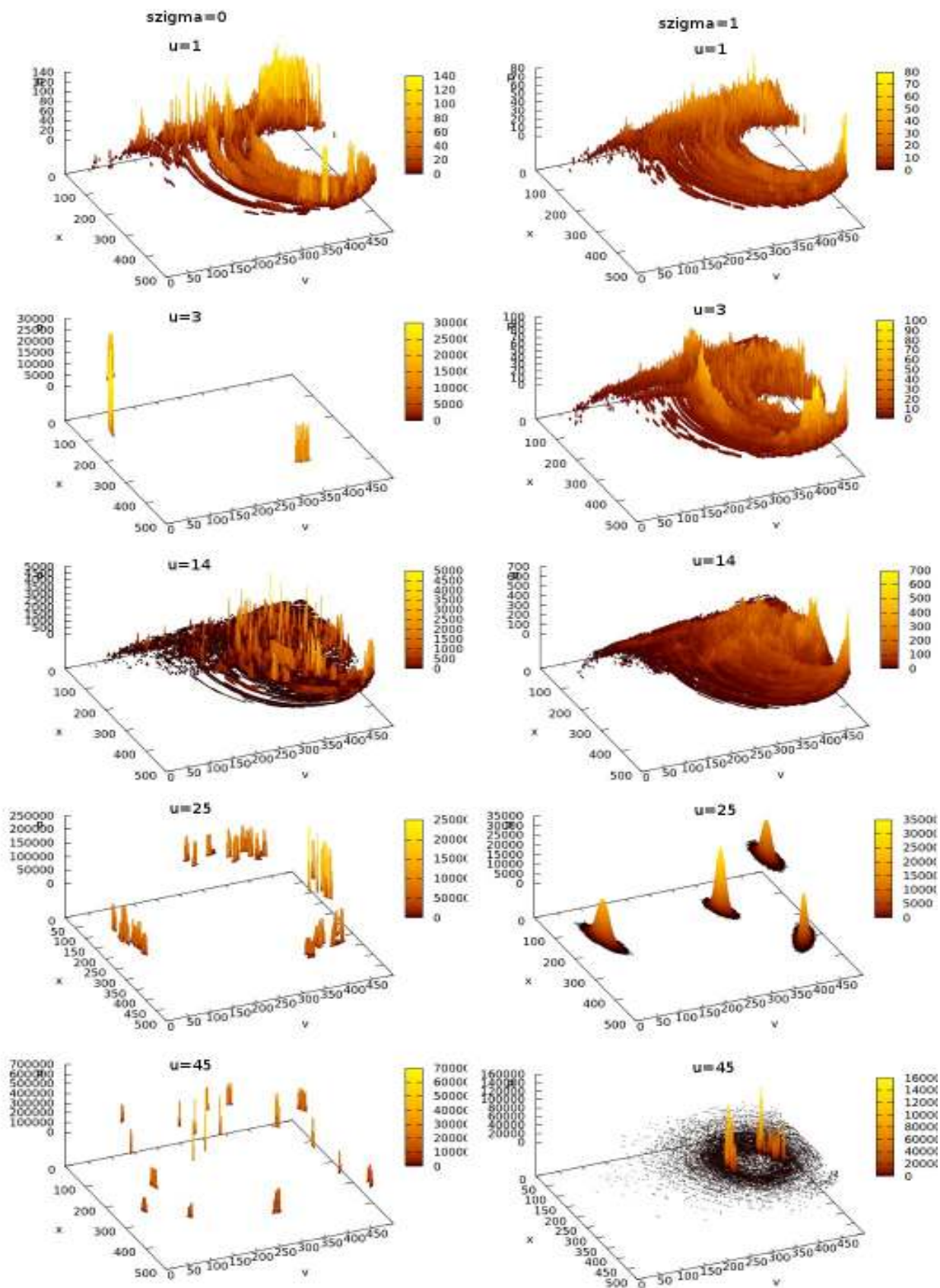
(IV.10. ábra): A rendparaméter a sebesség függvényében, különböző rendezetlenség mellett.



(IV.11. ábra): A rendparaméter a sebesség függvényében, különböző szimulációs időkkel.

Ha megkétszerezzük a szimulációs lépések számát (IV.11.ábra), és ezzel együtt a szimulációs időt, azt találjuk, hogy a kis sebességek esetén a rendparaméter értéke változatlan. Nagyobb sebességek esetén azonban a rendparaméter értéke tovább csökken, ezzel is kihangsúlyozva az átmenetet. Ez esetben a kezdeti, de hosszú ideig tartó tranziens dinamika hatása kezdi elveszíteni a jelentőségét.

A fenti eredményeket egyszeűen szemléletessé tehetjük Poincare-metszetek készítésével. Az öt testből álló rendszer állapottere tízdimenziós. Az utolsó test mozgását tanulmányozva, csupán a tízdimenziós állapotterben leírt trajektória kétdimenziós vetületét követhetjük nyomon. Feltételezve, hogy a trajektória kaotikus, a vetülete is kotikus kell legyen. Poincare-síknak válasszuk ki az utolsó előtti test átlagos koordinátájának értékét. Ennek megfelelően a Poincare-metszetet úgy hozzuk létre, hogy elmetszük ezzel a síkkal az állapotteret, majd a trajektória és a sík metszetéből keletkező pontokat levetítjük az utolsó test állapotsíkjára (tulajdonképpen elmentjük az utolsó test koordináta és sebességpárosait, akkor, amikor az utolsó előtti test áthalad egy 1 szimulációs egységnyi vastag koordináta intervallumon). Megszámolva, hogy az állapotsík egy adott koordinátájához hány ilyen pont tartozik, háromdimenziós hisztogramot készíthetünk a rendszernek. Ezt nevezzük a Poincare-metszethez tartozó normál eloszlásnak. Természetesen csak véges felbontással határozható meg az egymásra eső pontok száma. Esetünkben ez a felbontás egy 500 egységnyi élhosszúságú négyzetrács.



(IV.12.ábra): Poincare-metszetek: bal oldalon zaj nélkül ($\sigma=0$), jobb oldalon kis zaj jelenlétében ($\sigma=1$)

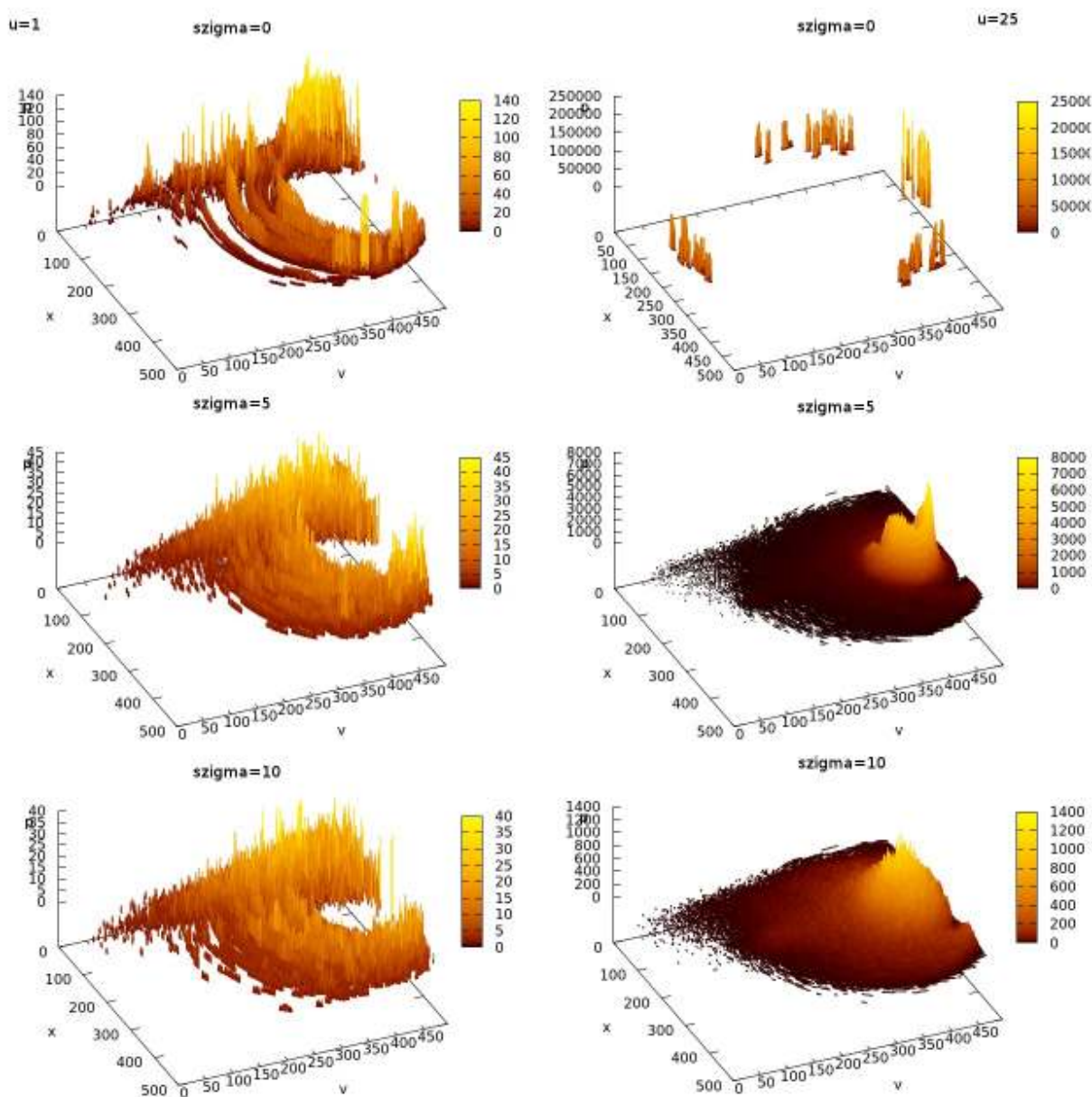
A **IV.12.ábrán** két oszlopban ábrázoltuk a Poincare metszeteket különböző sebességértékekre. A bal oldali oszlop esetében a rendszerben nincsen zaj, míg a jobb oldali oszlopban a tanulmányozott kis zaj ($\sigma=1$) hatását mutatjuk be. A zaj nélküli esetben a sebesség növelésével a dinamika típusa megváltozik: például az $u=3$ -as sebességértékre, míg a neki megfelelő zajos esetben az $u=1$ -es esethez hasonló normál eloszlást kapunk. Korábban utaltunk rá, hogy megvizsgáljuk miért nincsen néhány pont a többnyire sima $r=r(u)$ görbén. Erre a sebességértékekre a rendszer egy periodikus attraktor medencéjébe kerül, ahonnan csak kis zaj hatására tud kijönni. A zaj segítségével így akár oda-vissza ugrálhat a karakterisztikus pont a periodikus és kaotikus attraktorok között, méginkább, ha a két medencét elválasztó szeparatrix elég bonyolult szerkezetű. Az $u=1$ -es sebesség Poincare-metszete jól láthatóan bonyolult szerkezetű, kaotikus dinamikára utaló mintázat, mely kissé elmosódik a zaj hatására. Az $u=25$ -ös sebességnek megfelelő grafikonon a kimagasló oszlopok a periodikus dinamikát jelzik.

A Poincare-metszetek ismeretében könnyebben értelmezhető a **IV.4.ábra** is. Láthatjuk a hogy a nagy paraméterértékek minden esetben bonyolultabb dinamikához köthetőek, melyek nagy fluktuációkat eredményeznek. A kisebb értékű rendparaméterek periodikus, illetve kvázi-periodikus viselkedésre utalhatnak. A szalag sebességének függvényében két fázist különböztethetünk meg annak függvényében, hogy közben az utolsó test mozgása „csúszó-tapadó”, vagy csak csúszó típusú. A kettő között dinamikai fázisátalakulás-szerű átmenetet figyelhetünk meg.

Az egydimenziós rugó-tömb modellekre fellelhető eredményeknek megfelelően [3][19] [20] a kontrollparaméter kis változása a dinamika megváltozását idézi elő, tehát feltehetően számos bifurkáció történik ez esetben is. Látszólag azonban a bonyolult fázisterű rendszerünkben kis zaj jelenléte leegyszerűsíti a dinamikát.

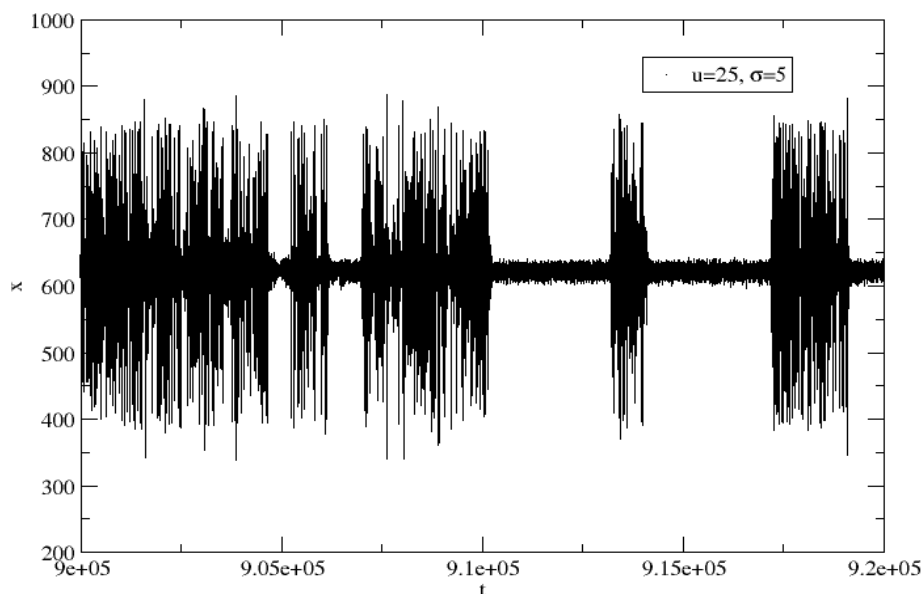
Az **IV.13.ábrán** megfigyelhető a zaj hatása különböző típusú dinamikák esetében. A jobb oldali oszlop a **IV.9.ábrán** látható dinamikus fázisátalakulás-szerű átmenetnek felel meg az

$r=r(\sigma)$ síkban. Jól látható, hogy míg a kis sebességnél megjelenő kaotikus dinamikát csak elmossa a zaj, a nagy sebességhez tartozó kis amplitúdójú periodikus dinamikából egy nagy fluktuációval jellemzett dinamika jön létre.



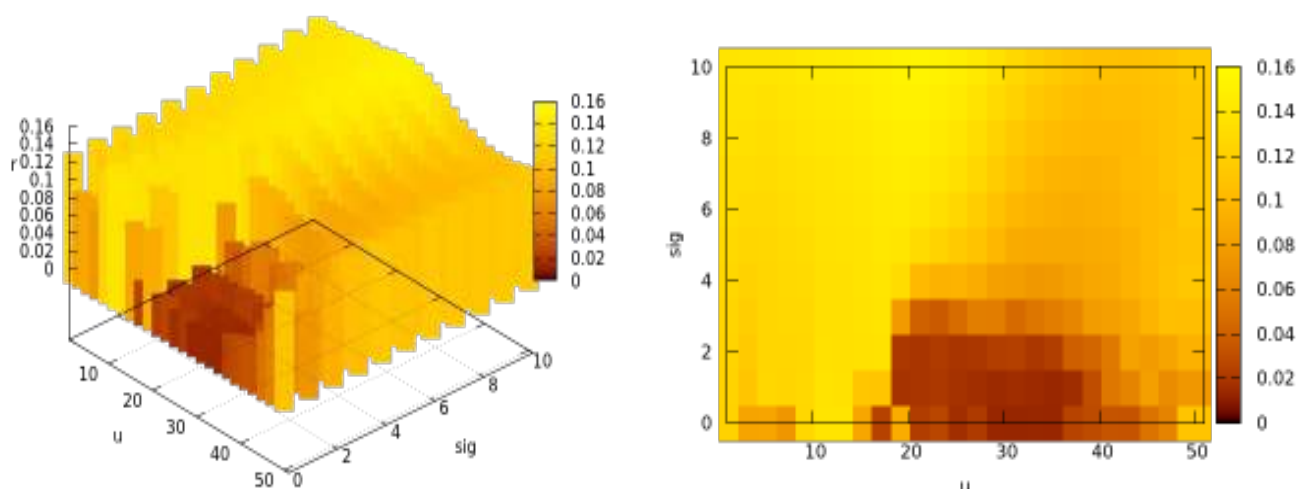
(IV.13.ábra): Poincare-metszetek különböző σ értékekre: bal oldalon $u=1$, jobb oldalon $u=25$

A jobb oldali oszlopban a $\sigma=5$ -ös eset egy érdekes jelenséget takar. Ha megnézzük ebben az esetben, hogyan változik a lánc hossza az idő függvényében (IV.14.ábra) azt találjuk, hogy két teljesen különböző típusú dinamika váltakozik időben. Mivel ez esetben már számottevő zaj van a rendszerben, zaj indukált intermittenciának[5] nevezzük ezt a viselkedést. Az eddigi eredmények alapján állíthatjuk, hogy az itt látható kis fluktuációval jellemzett intervallumok tiszta csúszó viselkedéshez tartoznak, mely esetében a lánc hossza periodikusan változik.



(IV.14.ábra): Az utolsó test pozíciója az idő függvényében $u=25$, $\sigma=5$ esetben.

Az eredményeket összefoglalva a rendparaméter segítségével készíthetünk egy paramétertérképet, melyen elkülöníthetőek a különböző típusú viselkedések, ugyanakkor megfigyelhető benne a fázisátalakulás-szerű átmenet is (IV.12.ábra). A sötéttel jelzett területek esetén a rendszer dinamikáját kis fluktuációk jellemzik, míg a világos tartományokban lavinaszerű hatások jelennek meg. Ha a zaj mértéke meghalad egy kritikus értéket ($\sigma_{kr}=5$), a szalag sebessége már nem befolyásolja számottevően a lánc hosszának átlagos fluktuációját.



(IV.12.ábra): A rendparaméterrel készített paramétertérkép 3D-s, illetve 2D-s változata.

V. A rugó-tömb rendszer kísérleti vizsgálata

V.I. A kísérleti berendezés. A kísérlet menete.

A rendszert tanulmányoztuk kísérletileg is (**V.I.ábra**). Bár a kísérlet valóban könnyen elkészíthető, mégis érdemes néhány lépésre kitérnünk. Elsődleges célunk az volt, hogy megmutassuk kísérletileg is, létezik intermittens viselkedés a rendszerben: a rendszer képes időben változó típusú, komplex dinamikát mutatni.

A berendezésünkben a futószalag egy fitnessz teremben használatos futópad része. A szalag hossza 1.5 m, anyaga gumi. A futópadon 0.1 km/h-ás pontossággal lehet beállítani a szalag sebességét a 0.8 km/h-tól a 12km/h-ig. A kísérletben két értéket használtunk: 0.8 km/h, 1km/h.

A rugók elkészítéséhez argonos hegesztésre alkalmas 0.6 mm átmérőjű acélos drótot vásároltunk. A drótot nagy pontossággal egy 13 mm átmérőjű vasrúd köré tekertük (**V.2.ábra**), úgy, hogy a szálak egymással érintkezzenek. Ezt követően a feltekert drótot gázláng fölé tartottuk és egyenletesen forgattuk mindaddig, amíg egyenletesen színt váltott, majd 15 °C-os vízben hirtelen lehűtöttük.



(**V.1.ábra**): A rugó-tömb lánc a kísérletben. Futószalag.



(V.2.ábra): A rugó elkészítése; feltekerés rúdra.

Levágva a rögzítéseket a drót megtartotta az alakját. Egy 3-4 m hosszúságú drótból így sikerült 2-3 rugót készíteni. Egyforma hosszúságúra méretezve és ugyanannyi menetet kivágva belőlük közel egyforma paraméterekkel rendelkező rugókat kaptunk. A rugóállandókat úgy mértük le, hogy felakasztottuk őket az egyik végpontjuktól fogva és rendre egy, illetve két testet rögzítettünk rá nehezeknek. Lemérve a megnyúlásokat és a testek pontos tömegét, meghatároztuk a k rugóállandó átlagos értékét. A mérések alapján: $k=19.8$ N/m. A rugók egyensúlyi hosszai szintén a (V.1. Táblázat)-ban vannak feltüntetve.

A testek tölgyfából készültek. Méreteik: 4cm x 4cm x 8 cm. Megmérve a tömegeiket 0.1g pontossággal a következő értékeket kaptuk (σ_m a tömegek szórását jelöli):

m (g)	<m>(g)	σ_m	l(cm)	<l>(cm)
113.9	115.82	3.29	7	6.95
122			7.3	
116			6	
112.5			7.4	
114.7			6	
			8	

(V.1. Táblázat): A tömbök tömegei és rugók egyensúlyi hossza.

A megfelelő súrlódási együttható megtalálásához azonban nem tudtunk előzetes számításokat végezni, hiszen egy adott típusú anyagon belül is sok minden befolyásolja annak értékét. Sem a tölgyfa-gumi párosítás, sem a gumi-gumi párosítás nem bizonyult megfelelőnek. Első esetben túl kis fluktuációkat kaptunk, melyeket nehéz lett volna feldolgozni digitálisan, második esetben meg a nagy tapadó súrlódás miatt a rúgók maradandóan deformálódtak, így nem lehetett őket újra használni. Végül a ragasztószalag-gumi párosítás lett legmegfelelőbb, így testek teljes felületét ragasztószalaggal borítottuk be (V.3.ábra).



(V.3.ábra): Egy szigetelőszalaggal borított tömb és rugók.

A súrlódási erőket a rugók segítségével határoztuk meg. A csúszási súrlódási erő mérésekor a futószalag mozgásban volt, és egy mérőléc mellett lemértük mennyire nyúlik meg a rugó ha folyamatosan csúszik a szalagon. A tapadási súrlódási erő maximumához meghatároztuk azt a megnyúlást, mely esetében a nyugalomban lévő test megcsúszik. A pontosság érdekében a mérési műveleteket videófelvételen rögzítettük, és majd utólagosan olvastuk ki onnan a megnyúlásokat. A következő értékeket kaptuk a tapadási súrlódási erő maximumára, illetve a csúszási és tapadási súrlódás arányára: $F_{st0} = 1.98\text{N}$, $f_s = 0.45$

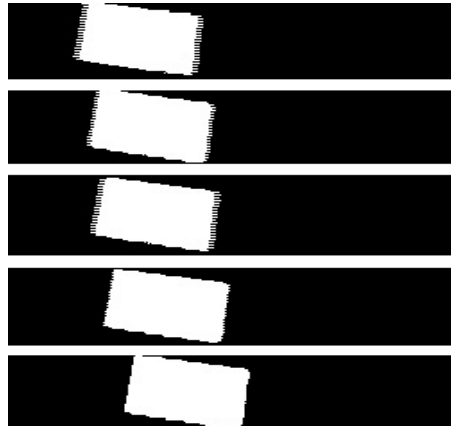
A testekre a rugókat szigetelőszalaggal rögzítettük, úgy, hogy legalább egy teljes menet folyamatosan érintkezzen a test oldalával úgy megnyúlás esetén, mint összenyomódáskor. Ez biztosítja, hogy a hosszváltozást csak a rugók megnyúlása eredményezze.

A futószalag rövidsége miatt csupán öt testet tudtunk ráhelyezni anélkül, hogy a lánc maximális megnyúlásakor is még a szalagon maradjanak a testek. Az első rugót a futópad vázához rögzítettük, és ezzel egyvonalban rögzítettük a mérőszalagot is a hossz fluktuációjának meghatározásához.

A rendszer fölé kamerát helyeztünk el és 5-6 perces felvételekben rögzítettük a mozgásokat. Mivel számunkra csak a lánc hossza releváns, az utolsó testet fehér színűre festettük, a többi meg feketére. Így könnyebben fel lehetett dolgozni digitálisan a felvételeket.

A videókat képkockákra bontottuk a Linux *ffmpeg* parancsával, a képekből kivágtuk a számunkra érdekes részletet. A fekete-fehér árnyalatot 99%-osra állítva a képeken nagyrészt csak a számunkra lényeges fehér pixelek halmaza maradt meg(V.4. ábra). Készítettünk egy programot, melynek segítségével leellenőriztük, hogy ezek a pixelek egy nagyobb halmazhoz tartoznak-e, ha igen, elmentettük a fájlban a megfelelő pixelpozíciót. Tudva, hogy az 1m-es mérőszalag hol ér véget, a pixelek számának és a valós méretek arányaiból rekonstruálni tudtuk a

lác hosszát valós mértékegységekben is.

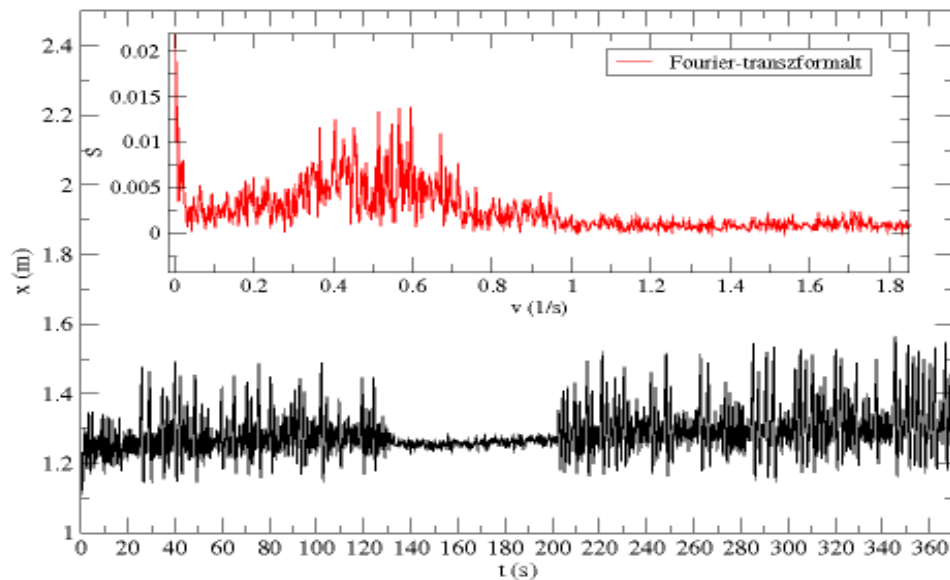


(V.4.ábra): Az utolsó test pozíciója az idő függvényében.

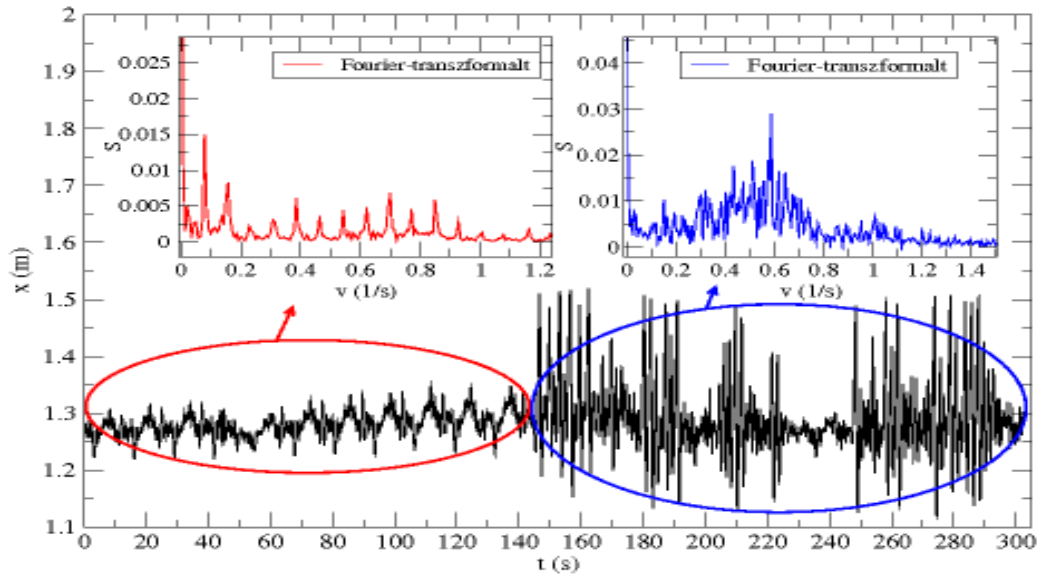
V.2. A kísérleti eredmények

Két közeli sebességértékre lettek sikeresek a kísérletek.

Sikerült kimutatni, hogy a kísérlet során is megjelenik az intermittens viselkedés. Ez mindkét videófelvételen megtekinthető. A felvételekből meghatározva az idő függvényében a lác teljes hosszát, a következő grafikonokat kaptuk.



(V.5.ábra): A lác hossza az idő függvényében $u=0.8\text{km/h}$ esetén, valamint a Fourier-transzformált.



(V.6.ábra): A lánc hossza az idő függvényében $u=1.0$ km/h esetén, valamint a két típusú viselkedésnek megfelelő Fourier-tanszformáltak.

A grafikonon időben jól elkülöníthető doméniumokat figyelhetünk meg, melyek az V.6.ábra alapján periodikus és kaotikus tartományoknak felelnek meg.

A kísérleti eredmények nagyon biztatóak a rugó-tömb modellünkre vonatkozóan. A tény, hogy mindkét esetben kaptunk itermittens átmenetet, arra enged következtetni, hogy a modell és az alkalmazott módszerek még további tanulmányozási lehetőségeket rejtnek magukban.

A kísérleti és a szimulációs paraméterek egymásnak megfeleltethetőek. Röviden megmutatjuk a paraméterek közötti összefüggéseket. A szimulációk során rögzítettük a tömeget, a rugóállandót és a rugók nyugalmi hosszát, őket választjuk a rendszer független paramétereinek. Közöttük és a kísérleti értékek között könnyen megadhatjuk az átszámítási arányokat az egyszerű hármasszabály eredményeit felhasználva. A sebességre, időre és erőre vonatkozó összefüggéseket pedig dimenzionális megfontolások alapján:

$$t_v = t_s \cdot \sqrt{\frac{m_v \cdot k_s}{m_s \cdot k_v}} \quad (26)$$

ahol a v index a valós értékeket, az s pedig a szimulációs értékekre vonatkozik. A sebességekre a következő képletet kell alkalmazni:

$$u_s = u_v \cdot \sqrt{\left(\frac{m_v \cdot k_s}{m_s \cdot k_v}\right)} \cdot \frac{l_s}{l_v} \quad (27)$$

Valamint súrlódási erőre:

$$F_s = F_v \cdot \frac{k_s}{k_v} \cdot \frac{l_s}{l_v} \quad (28)$$

Ismerve az m_v, l_v, k_v, F_v, u_v értékeket, meghatároztuk, a nekik megfelelő szimulációs paramétereket:

$$F_{st0} = 71.4, \quad f_s = 0.45, \quad u = 12^2$$

Megjegyezzük, hogy a kísérletben megjelenő intermittens viselkedés az $u=12$ -es szimulációs sebességértéknek felel meg. Ezt az eredményt elég jól visszaadja a modellünk is, amely $\sigma=5$ és az $u=16$ paraméterek mellett mutat először intermittenciát.

2 Nem véletlen tehát, hogy a dolgozathoz a szimulációkat is ilyen paramétertartományban végeztük, annak érdekében, hogy megtartsuk a logikus gondolatvezetést és koherenciát.

VI. Következtetések

Egy egyszerű, nemlineáris rendszert tanulmányoztunk statisztikus fizikai nézőpontból. Munkánk során sikerült egy jól működő módszert kidolgozni egy csatolt rendszerben megjelenő nemfolytonos dinamika molekuláris dinamika típusú számítógépes szimulációjához.

A rendszer sokféle komplex viselkedési formát mutat, melyek közül néhányat elemeztünk, rámutatva, milyen paraméterek befolyásolják kialakulásukat és egymás közötti átmeneteiket. Megmutattuk, hogy a rendszerben megjelenik intermittens viselkedés, amelyet kísérletileg is sikerült kimutatni.

Bevezettünk egy rendparamétert, mellyel a rendszer hosszának fluktuációit mérhetjük. A rendparaméter érdekes dinamikus fázisátalakulás-szerű átmenetet mutat a rendszerben, melyet a rendezetlenség indukál, és fázisai a „csúszó-tapadó” és tiszta csúszó típusú dinamikákhoz köthetőek. E kettő közötti átmenet intermittens viselkedéssel valósul meg. A szalag sebességének függvényében szintén dinamikus fázisátalakulás-szerű jelenséget tapasztaltunk: a szalag sebességének egy kritikus értéke felett a rendparaméter értéke hirtelen leesik. Kis sebességek esetén az utolsó test mozgása többnyire kaotikus, „csúszó-tapadó” típusú, a kritikus érték felett pedig kis amplitúdójú, periodikus, csúszó típusú viselkedést figyelhetünk meg. A paraméterterképen könnyen elkülöníthetjük ezeket a fázisokat. Mindkét esetben a rendszer méretének növelése a hirtelen átmenetet elmossa. Tehát a modellünk ebből a szempontból is érdekes, hiszen a termodinamikai rendszerekkel ellentétben csak kis rendszerek esetén mutat komplex viselkedést.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás a TÁMOP. 4.2.4.A/1-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválósági Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program” című kiemelt projekt keretei között valósult meg. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Bibliográfia

- [1]: Ferenc Járai-Szabó, Bulcsú Sándor, Zoltán Néda, *Centr. Eur. J. Phys.*, 9(4), 1002-1009, 2011
- [2]: R. Burridge, L. Knopoff, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 57, 341, 1967
- [3]: Maria de Sousa Vieira, *Phys. Lett. A*, 198, 407-414, 1995
- [4]: Tél Tamás, Gruiz Márton, *Kaotikus Dinamika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002
- [5]: Robert C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, 2006
- [6]: Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, 2000
- [7]: P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, *Order within chaos*, Wiley, 1984
- [8]: Máté G, Néda Z, Benedek J, *PLoS ONE*, 6(2), e16518. Doi:10.1371, 2011
- [9]: E.-Á. Horváth, F. Járai-Szabó, Z. Néda, *J. Optoe. Adv. Mat.*, 10(9), 2433, 2008
- [10]: B. Gutenberg and C. F Richter, *Ann. Geophys.*, 9, 1, 1956
- [11]: K.-t, Leung, Z. Néda, *Phys. Rev. Lett.*, 85, 662, 2000
- [12]: F. Járai-Szabó, S. Astilean, Z. Néda, *Chem. Phys. Lett.*, 408, 241, 2005
- [13]: F. Járai-Szabó, A. K, S. Astilean, Z. Néda, N. C, P.M A and R. Vajtai, *JOAM*, Vol. 8, 1083-1087, 2006
- [14]: K. Kovaács, Y. Brechet and Z. Néda, *Modelling and Simulation in Mat. Sci. Eng.*, vol. 13 (8), 1341-1352, 2005
- [15]: Z. Néda, F. Járai-Szabó, E. Káptalan, R. Mahnke, *Contr. Eng. and App. Inf.*, 11, 3, 2009
- [16]: V. P. Brito and M. A. F Gomes, *Phys. Lett. A*, 38, 201, 1995
- [17]: A. R. Lima, C. F. Moukarzel, I. Grosse, T. J. P. Penna, *Phys. Rev. E*, 61, 2267-2271, 2000
- [18]: C. V. Chianca, J. S. Sa Martins and P. M. C de Oliveira, *Eur. Phys. J. B*, 68, 549-555, 2009
- [19]: J. Szkutnik and K. Kulakowski, *Int. Journ. of Mod. Phys. C*, 13, 41-48, 2002
- [20]: Hidetsugu Sakaguchi, *J. Phys. Soc. Jpn*, 72, 69-73, 2003
- [21]: Zs. Lázár, *Studia Universitatis, Physica*, nr. 2, 11, 2010

Függelék: Numerikus módszerek

Ebben a részben újból ismertetjük a XIV. ETDK-n is bemutatott numerikus módszert. Részletesen tárgyaljuk a mozgásegyenletek numerikus integrálásakor felmerülő IV.I. részben bemutatott négy esetet.

1.a

Ha a tömb v_r relatív sebessége 0, akkor a szalaggal együtt mozog, új koordinátája a következő képlettel pontosan megadható:

$$x_i(t+dt) = x_i(t) + u \cdot dt \quad (1)$$

2.a

Ha a test a szalaghoz képest mozgásban van ($v_{r_i} \neq 0$), akkor numerikusan integrálni kell a már fennebb ismertetett differenciálegyenletet. Mivel az ilyen típusú mozgásra (rezgőmozgás, de nem ideális) az alap Verlet-módszer ("Basic-Verlet") nagyszámú időlépés után is jó konvergenciát mutat[21], ezt a módszert alkalmazzuk. Ez harmadrendű módszer:

$$x_i(t+dt) = 2 \cdot x_i(t) - x_i(t-dt) + a_i(t) \cdot dt^2 + O(dt^4) \quad (2)$$

Ennek megfelelően a sebességet egy másodrendű módszerrel kell megadni [21]:

$$v_i(t+dt) = \frac{x_i(t) - x_i(t-dt)}{dt} + \frac{dt}{6} \cdot [11 \cdot a_i(t) - 2 \cdot a_i(t-dt)] + O(dt^3) \quad (3)$$

A Verlet-módszer szükségessé teszi, hogy elmentsük a rendszer állapotát az előző két lépésében. Így elindulásakor meg kell határoznunk másodrendű Euler-módszerrel (Euler II) a koordinátákat és a sebességeket két egymás utáni időpontban. Euler II:

$$\begin{aligned} x_i(t+dt) &= x_i(t) + v_i(t) \cdot dt + \frac{1}{2} a_i(t) \cdot dt^2 + O(dt^3) \\ v_i(t+dt) &= v_i(t) + a_i(t) \cdot dt + O(dt^2) \end{aligned} \quad (4)$$

Figyelembe kell vennünk, hogy az súrlódási erőben jelentkező szakadási pont miatt, a gyorsulás sem lesz folytonos függvény. Emiatt minden alkalommal ha egy tömb álló helyzetből elindul vagy relatív sebessége előjelet vált, Euler II -vel kell megadni a kezdeti két koordináta és sebességértéket, különben a Verlet-módszer hiba tagja ebben az esetben $O(dt^2)$ lenne.

1.b

A dinamika folytonos szakaszait megvizsgálva láttuk, hogy eltekintve az elindulásoktól, a koordinátát harmad-, a sebességet másodrendben ismerhetjük. Amikor egy tömb megcsúszik, mi

csak azt érzékelhetjük, hogy a t időpillanatban még a rá ható rügóerő kisebb, mint a tapadási súrlódási erő maximuma, de a $t+dt$ -ben már nagyobb. Ez azt jelenti, hogy ebben a dt időintervallumban megcsúszott a test a szalaghoz képest. Ha csak a fennebb említett módszerekkel számolnánk tovább, akkor a koordinátában a hibatag $O(dt^2)$ lenne.

Erre adunk egy másik módszert a következőkben..

Feltételezzük, hogy a tömb a t időpillanatban még a szalaggal együtt mozog, a $t+dt$ -ben viszont már csúszik. Jelölje τ_{meg} a megcsúszás pillanatát, úgyhogy

$$t < \tau_{meg} \wedge \tau_{meg} \leq t + dt \quad (5)$$

vagy másképp:

$$\tau_{meg} = t + z \cdot dt, \quad 0 < z \wedge z \leq 1 \quad (6)$$

A fentiek értelmében ha a koordinátát Taylor-sorba fejtjük a τ_{meg} körül, jobbról és balról, a következőkhöz jutunk:

$$\begin{aligned} x_i(\tau_{meg} + \delta \tau) &= x_i(\tau_{meg}) + \dot{x}_i(\tau_{meg}) \cdot \delta \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}_i(\tau_{meg}) \cdot \delta \tau^2 + O(\delta \tau^3) \\ x_i(\tau_{meg} - \delta \tau) &= x_i(\tau_{meg}) - \dot{x}_i(\tau_{meg}) \cdot \delta \tau \end{aligned} \quad (7)$$

A $\delta \tau$ értékét az első esetben $\delta \tau = (1-z) \cdot dt$, a második esetben $\delta \tau = z \cdot dt$ -nek választva meg, majd behelyettesítve a (7)-es egyenletekbe a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} x_i(t+dt) &= x_i(t+z \cdot dt) + \dot{x}_i(t+z \cdot dt) \cdot (1-z) \cdot dt + \frac{1}{2} \ddot{x}_i(t+z \cdot dt) \cdot (1-z)^2 \cdot dt^2 + O(dt^3) \\ x_i(t) &= x_i(t+z \cdot dt) - \dot{x}_i(t+z \cdot dt) \cdot z \cdot dt \end{aligned} \quad (8)$$

Kivonva egymásból a két egyenletet:

$$x_i(t+dt) = x_i(t) + \dot{x}_i(t+z \cdot dt) \cdot dt + \frac{1}{2} \ddot{x}_i(t+z \cdot dt) \cdot (1-z)^2 \cdot dt^2 + O(dt^3) \quad (9)$$

Tudjuk, hogy a megcsúszás pillanatában

$$\dot{x}_i(t+z \cdot dt) = v_i(t+z \cdot dt) = u, \quad (10)$$

illetve

$$\begin{aligned} F_r &= F_{st0} \\ \ddot{x}_i(t+z \cdot dt) &= a_i(t+z \cdot dt) = \frac{F_{st0} - F_{sc0}}{m} = a_{meg} \end{aligned} \quad (11)$$

Mivel a rendszerbe a súrlódási erőn keresztül bevittük a stochasztikus viselkedést, a z egyenletes eloszlást kell mutasson a $(0,1]$ intervallumon. Ennek megfelelően minden megcsúszás alkalmával generálunk egy véletlenszámot a $(0,1]$ intervallumból, és azt választjuk a z értékének.

Tehát összesítve a kapott eredményeket:

$$\begin{aligned}x_i(t+dt) &= x_i(t) + u \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot a_{meg} \cdot (1-z)^2 \cdot dt^2 \\v_i(t+dt) &= u + a_{meg} \cdot (1-z) \cdot dt\end{aligned}\tag{12}$$

képletekkel adható meg a koordináta, illetve a sebesség a $t+dt$ időpillanatban, ha t és $t+dt$ között megcsúszott a tömb.

2.b

A tömbök megállása. Az ideális, folytonos esetben akkor áll meg egy súrlódással mozgó test, ha az érintkezési felülethez viszonyított relatív sebessége 0-ra csökken. Ez esetben újból a tapadási súrlódási erő hat rá. Amennyiben megálláskor a testre ható külső erők eredője nagyobb mint a tapadási súrlódási erő maximuma, gyakorlatilag "átfut" ezen a megállási ponton.

Az időlépést diszkrétizálva nem várhatjuk, hogy a relatív sebesség pontosan 0-ra csökkenjen. Kézenfekvő lenne tehát egy küszöbsebességet, mint paramétert megadni, mely alá csökkenve a relatív sebesség értéke 0-nak tekinthető. Azonban ennek a paraméternek a beállítása nehézkesnek bizonyul. Ha túl kis értékre állítjuk, a diszkrét lépések miatt sok valódi megállást nem észlelünk, ha meg túl nagyra, akkor olyan eseteket is megállásként kezelünk, melyek valójában csak igen kis relatív sebességgel jellemezhetőek.

A megállás egy általunk bevezetett tárgyalását adjuk meg a következőkben.

Az alap-Verlet-módszer segítségével a sebességet lokálisan másodrendű képlettel határoztuk meg, tehát Taylor-sorba fejtvé, csak az első három tag hordoz értékes információt számunkra:

$$v_i(t+\delta t) = v_i(t) + \dot{v}_i(t) \cdot \delta t + \frac{1}{2} \ddot{v}_i(t) \cdot \delta t^2 + O(\delta t^3)\tag{13}$$

Ismerve a rendszer állapotát a t -ben, a δt -t tekintve a független változónak, a t $u(t)=t+\delta t$ környezetében a sebesség a fenti képlettel adható meg, mely egy parabolát határoz meg:

$$v_i(t+\delta t) = a \cdot \delta t^2 + b \cdot \delta t + c\tag{14}$$

A δt maximumát $2dt$ -nek választva meg, egy egyszerű változócserevel könnyen

belátható, hogy ez a $v_i(t+\delta t): (0, 2dt) \rightarrow \mathbb{R}$ lokálisan értelmezett függvény egyenértékű a $v_i(\tau): (t, t+2dt) \rightarrow \mathbb{R}$ globálisan értelmezett függvénnyel.

Minden lépésben, minden tömb esetén feltételezzük, hogy megállt az utolsó dt időintervallumban. Ez matematikailag így írható:

$$v_i(\tau_{meg})=u, \quad t+dt < \tau_{meg} \wedge \tau_{meg} \leq t+2\cdot dt, \quad (15)$$

vagy másképp:

$$v_i(\delta t_{meg})=u, \quad dt < \delta t_{meg} \wedge \delta t_{meg} \leq 2\cdot dt \quad (16)$$

Amennyiben találunk olyan $\delta t_{meg} \in \mathbb{R}$ értéket, úgyhogy eleget tegyen a fenti feltételeknek, a tömböt a szalaghoz képest megállítjuk: $v_i(\tau_{meg})=u$, majd ennek megfelelően számoljuk ki a $2dt$ -ben koordinátáját. Tehát így a feladatunk megoldani a

$$a\cdot \delta t^2 + b\cdot \delta t + c - u = 0 \quad (17)$$

másodfokú egyenletet. Ehhez ismernünk kell az a, b, c együtthatókat. A $c = v_i(t)$, $b = \dot{v}_i(t) = a_i(t)$ értékek adottak $O(dt^3)$ hibával, az a -t meghatározhatjuk a következő összefüggésekből:

$$v_i(t+dt) = v_i(t) + \dot{v}_i(t)\cdot dt + \frac{1}{2}\ddot{v}_i(t)\cdot dt^2 + O(dt^3) \quad (18)$$

$$v_i(t+2dt) = v_i(t) + 2\cdot \dot{v}_i(t)\cdot dt + 2\cdot \ddot{v}_i(t)\cdot dt^2 + O(dt^3) \quad (19)$$

A (22)-ből kivonva a (21)-et, kapjuk:

$$a = \frac{1}{2}\ddot{v}_i(t) = \frac{v_i(t+2dt) - v(t+dt) - \dot{v}_i(t)\cdot dt}{3\cdot dt^2} \quad (20)$$

Az a, b, c együtthatók ismeretében megadható a (17)-es másodfokú egyenlet megoldása. Itt csak azokat az értékeket fogadjuk el, melyekre igaz a (16)-os feltétel. Ha ezt mindkét megoldás teljesíti, akkor a kisebb δt_{meg} értéket vesszük figyelembe. Újból meghatározzuk a képlettel értelmezett z értékét, mely két részre osztja a dt intervallumot: az első részben a tömb még gyorsulva mozog, a második részben a szalaggal együtt halad.

Megjegyzés: ha nem történt megállás a második dt intervallumban, akkor a sebességet valóban $O(dt^3)$ hibával tudjuk megadni, ellenkező esetben viszont a $v_i(t+2dt)$ értékét egyvel alacsonyabb rendben ismerjük, így a módszerünk rigorózusan nem harmadrendű.

A paraméterek függvényében gyakran találkozunk olyan esettel is, amikor a test relatív sebessége 0-vá válik a dt intervallumban, de a rá ható eredő rugóerő nagyobb, mint a tapadási

súrlódási erő maximuma. Ilyenkor Euler II módszerrel számoljuk ki a koordinátát és a sebességet, mivel a gyorsulás nem folytonosan változik, így a Verlet-módszer nem alkalmazható.