Geometriai példatár 5.

Kótás projekció

Baboss, Csaba, Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar
Szabó, Gábor, Nyugat-Magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Geometriai példatár 5.: Kótás projekció

írta Baboss, Csaba és Szabó, Gábor
Lektor: Németh, László

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Kivonat

Kivonat: A modul a kótás ábrázolás témakörébe tartozó feladatokat tartalmazza. Megtalálhatók az alapszerkesztések, képsíkba forgatással megoldható feladatok, az illeszkedési feladatok, metrikus feladatok, görbe vonalakhoz kapcsolódó feladatok, terepfelületekkel kapcsolatos feladatok. A bevezető részben röviden ismertetjük az alapszerkesztéseket.

Tartalom

5. fejezet - Kótás projekció

1. 5.1 Bevezetés

Az egyszerűbb feladatok megoldásával nem foglalkozunk, ezek a jegyzet alapfeladatai, megoldásukkal ellenőrizhetjük elméleti felkészültségünket. Önellenőrzés céljából a feladatgyűjtemény végén olyan vegyes feladatok találhatók, melyeket 2-3 alapszerkesztési lépéssel meg tudunk oldani. Egy-egy ilyen feladat sikeres megoldása (jó felkészültség esetén) 5-10 percet vesz igénybe.

A nehezebb feladatok rajzi megoldása (ábra) helyett olyan megoldási tervet ismertetünk, amelyek lépései egy-egy úgynevezett „alapszerkesztés” ismeretét igénylik. Ezek az alapszerkesztések a Geometria II. jegyzetben megtalálhatóak. Az alapszerkesztések ismerete nélkül a feladatok megoldása elképzelhetetlen.

Az olyan feladatoknál, ahol nincs megadva a méretarány – és erre a szerkesztés során szükség lenne- egységesen M=1:100 méretarányt használjunk. Bár a feladatok szövege erre külön nem tér ki, minden szerkesztés után állapítsuk meg a láthatóságot.

1.1. 5.1.1 Alapismeretek, alapszerkesztések:

1. Méretarány, lépték fogalma, kapcsolata.
2. Térelemek ábrázolása.
3. Osztóköz, lejtő, rézsű, képsíkszög fogalma, kapcsolata.
4. Illeszkedő térelemek ábrázolása.
5. Metsző térelemek ábrázolása.
6. Párhuzamos térelemek ábrázolása.
7. Merőleges térelemek ábrázolása.
8. Vetítősík és általános helyzetű sík szintsíkba forgatása.
9. Dőléskúp fogalma, alkalmazása.
10. Rézsűfelületek fogalma, ábrázolása.
11. Terepszelvény fogalma, ábrázolása.
12. A terep különleges pontjai, esésvonalai.
13. Semleges vonal fogalma, ábrázolása.

2. 5.2 Kótás projekció FELADATOK

2.1. 5.2.1 Alapfeladatok

1. Két épület térképi távolsága 4 cm, M=1:200. Mekkora a távolságuk, ha a) az épületek tengerszint feletti magassága azonos? b) az épületek szintkülönbsége 6 m?
2. Egy vízszintes utca két épülete egymástól 100 m távolságra van. Mekkora a térképi távolság, ha M=1:500?
3. Mekkora egy egyenes osztóköze, ha a képsíkszöge $\alpha=30^{o}$, M=1:400?
4. Határozzuk meg annak az egyenesnek az osztóközét, amelyiknek a lejtője $l=\frac{3}{5}$, M=1:500!

5. Számítsuk ki annak az egyenesnek az osztóközét, amelynek rézsűje $r=\frac{2}{5}$, M=1:50!

6. Egy egyenes osztóköze 3 cm. Határozzuk meg a méretarányt, ha az egyenes lejtője $l=\frac{1}{6}$!

7. Mekkora annak az egyenesnek a képsíkszöge, amelyiknek az osztóköze $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ mm, M=1:2000?

8. Ábrázoljunk egy képsíkban levő egyenest!

9. Ábrázoljunk egy képsíkkal párhuzamos, a képsík alatt, a képsíktól 2 m-re levő egyenest!

10. Ábrázoljunk egy képsíkra merőleges egyenest!

11. Graduáljuk az A_{-2}, B_5 pontjaival adott általános helyzetű egyenest!

12. Keressük meg a nyompontját és ábrázoljuk $P_{3,4}$ pontját az alábbi - pontjaikkal adott – egyeneseknek: a) $e=|A_{-5}\ B_2|$, b) $f=|A_4\ B_{8,5}|$, c) $g=|A_0\ B_{4,2}|$, d) $h=|A_{-4}\ B_{2,6}|$! Megjegyzés: Nyompontnak nevezzük az egyenesnek a képsíkon lévő pontját, melynek kótája 0.

13. Adott lépték esetén, határozzuk meg a M méretarány értékét!

14. Készítsünk léptéket az alábbi méretarányokhoz: a) M=1:500, b) M=1:5000, c) M=1:10000, d) M=1:250000, e) M=1:500000, f) M=1:1000000!

15. Ábrázoljunk egy képsíkkal párhuzamos, a képsíktól 3 m-re levő síkot!

16. Ábrázoljunk egy képsíkra merőleges (vetítő) síkot!

17. Metsző tartóegyeneseivel adott síknak határozzuk meg egy graduált esésvonalát!

18. Adott két párhuzamos egyenes. Adjuk meg a két párhuzamos egyenes közös síkjának egy graduált esésvonalát!

19. Adott egy sík három pontjával. Adjuk meg a pontok közös síkjának egy graduált esésvonalát!

2.2. 5.2.2 Vetítősík szintsíkba forgatásával megoldható feladatok

1. Adott egy egyenes két pontjával $e=|A_3\ B_7|$. Adjuk meg az egyenes képsíkszögének valódi nagyságát!

2. Graduált képével adott egyenesnek határozzuk meg a lejtadatait!

3. Adott egy e egyenes képe, A_4 pontja és $\alpha=30^\circ$ képsíkszöge. Vegyük fel az egyenes képén egy tetszőleges B pontjának a képét. Határozzuk meg a B pont kótáját!

4. Határozzuk meg a következő (tetszőlegesen felvehető) pontok távolságának valódi nagyságát! a) A_{10}, B_{16} b) A_{-4}, B_3 c) A_0, B_5 d) A_{43}, B_{67} e) $A_{2,6}$, B_7 f) A_3, $B_{8,2}$

5. A következő, két pontjukkal adott általános helyzetű egyeneseken ábrázoljuk azon C és D pontokat, amelyek az A ponttól 2 m-re vannak! a) $e=|A_3\ B_8|$ b) $f=|A_{-2}\ B_5|$ c) $g=|A_{2,3}\ B_{-4}|$ d) $h=|A_0\ B_4|$

6. Adott az e egyenes képe, A_3 pontja. Graduáljuk az egyenest, ha lejtője: a) $l=\frac{2}{3}$, b) $l=\frac{3}{5}$, c) l=0,64, d) l=30%!

7. Adott az f egyenes képe, $P_{2,4}$ pontja. Graduáljuk az egyenest, ha rézsűje: a) $r=\frac{6}{5}$, b) $r=\frac{2}{3}$, c) r=1,4, d) r=80%!

8. Adott egy *V* vetítősík és e síkban lévő három pont (*A*, *B*, *C*). Ábrázoljuk az *ABC* háromszög *S* súlypontját!

9. Vetítősíkban lévő *ABC* háromszögnek ábrázoljuk az *M* magasságpontját!

10. Vetítősíkban lévő *ABC* háromszögnek ábrázoljuk a háromszög köré írható körének *K* középpontját!

11. Adott *V* vetítősíkban lévő *ABC* háromszögnek ábrázoljuk a háromszögbe írható körének *O* középpontját!

12. Adott két pont (*A*, *B*). Ábrázoljuk az *ABCD* négyzetet úgy, hogy a négyzet síkja vetítősík legyen!

13. Adott az *A*, *B* pontpár. Ábrázoljuk azt az *ABC* szabályos háromszöget, amely vetítősíkú!

14. Adott egy *V* vetítősík és egy arra illeszkedő *e* egyenes és egy *A* pont. Ábrázoljuk azt az *ABC* háromszöget, amelynek *B* és *C* csúcsai az adott egyenesre illeszkednek!

15. Adott egy *V* vetítősík és egy arra illeszkedő *A* pont és *e* egyenes. Ábrázoljuk azt az *ABCD* négyzetet, a) amelyiknek *B* és *C* csúcsai az adott egyenesre illeszkednek, b) amelyiknek *BD* átlója az adott egyenesnek szakasza!

16. Adott *V* vetítősíkban ábrázoljunk egy 3 m-es oldalélű négyzetet!

17. Adott *V* vetítősíkban ábrázoljunk egy 4 m-es oldalélű szabályos háromszöget!

18. Adott két metsző fedőegyenes. Ábrázoljuk azt az egyenlőszárú háromszöget, amelyiknek szárai az adott egyenesek szakaszai, alapja pedig 3 m! Adjuk meg a metsző egyenesek hajlásszögének valódi nagyságát!

19. Adott két párhuzamos fedőegyenes. Ábrázoljunk egy olyan négyzetet, amelyiknek két-két csúcsa egy-egy adott egyenesre illeszkedik! Határozzuk meg az adott egyenesek távolságának valódi nagyságát is!

20. Adott egy *V* vetítősíkban lévő *e* egyenes és egy *P* pont. Ábrázoljuk a *P* pontra illeszkedő, adott egyenessel párhuzamos *f* egyenest!

21. Adott egy *V* vetítősíkban lévő *e* egyenes és egy *P* pont. Ábrázoljuk a *P* pontra illeszkedő, az adott egyenessel 60^o-os szöget bezáró egyeneseket!

2.3. 5.2.3 Helyzetgeometriai feladatok

Ezen feladatokban az a közös, hogy lépték (illetve méretarány) használata nélkül megoldhatóak.

1. Graduált esésvonalával adott egy *S* sík. a) Ábrázoljunk egy, az adott síkban lévő *e* egyenest! b) Ábrázoljuk e síknak egy $P_{3,4}$ pontját!

2. Graduált esésvonalával adott egy *S* sík, és alatta egy *P* pont! Ábrázoljunk egy, az adott *S* síkkal párhuzamos, az adott *P* pontra illeszkedő a) *e* egyenest, b) *R* síkot!

3. Adott az *e* és *f* kitérő egyenespár. Adjuk meg graduált esésvonalával azt az *S* síkot, amelyikre illeszkedik az *e* egyenes, és párhuzamos az *f* egyenessel!

4. Graduált esésvonalával adott egy *S* sík, és metsző tartóegyeneseivel egy *M* sík. Szerkesszük meg a két sík metszésvonalát!

5. Tetszőleges módon (metsző tartóegyeneseivel, három pontjával, stb...) adott egy általános helyzetű *S* sík, és egy *V* vetítősík. Szerkesszük meg a két sík metszésvonalát!

6. Tetszőleges módon adott egy általános helyzetű *S* sík, és egy képsíkkal párhuzamos, a képsíktól 2 m-re lévő sík. Szerkesszük meg a két sík metszésvonalát!

7. Adott két olyan sík, amelyeknek esésvonalaik képe párhuzamos. Szerkesszük meg a két sík metszésvonalát!

8. Adott két vetítősík. Adjuk meg a két sík metszésvonalát!

9. Három pontjával (*A*, *B*, *C*) adott egy általános helyzetű *H* sík, és egy *e* egyenes. Szerkesszük meg a döféspontot! Ha a döféspont az *ABC* háromszögön belülre esik, akkor ezt figyelembe véve állapítsuk meg a láthatóságot!

10. Adott egy *V* vetítősík és egy *e* egyenes. Szerkesszük meg a döféspontot!

11. Adott egy képsíkkal párhuzamos helyzetű sík a képsík alatt, és egy *e* egyenes. Szerkesszük meg a döféspontot!

12. Adott egy általános helyzetű *S* sík és egy *v* vetítősugár. Szerkesszük meg a döféspontot!

13. Határozzuk meg egy graduált esésvonalával adott *S* síknak és egy képsíkkal párhuzamos egyenesnek a döféspontját!

14. Adott egy *S* sík és egy vele párhuzamos *e* egyenes. Ábrázoljunk egy olyan paralelogrammát, amelyiknek két csúcsa az adott síkra, másik két csúcsa az *e* egyenesre illeszkedik!

15. Adott két párhuzamos sík. Ábrázoljunk egy olyan paralelogrammát, amelyiknek két-két csúcsa egy-egy adott síkra illeszkedik!

16. Adott az $A_5B_8C_7$ háromszög és a P_{100} pont. Adjuk meg a graduált esésvonalát annak az *S* síknak, amelyik illeszkedik a P pontra és párhuzamos az ABC háromszög síkjával!

17. Adott az *A* és *B* sík, továbbá egy *P* pont. Ábrázoljuk a *P* pontra illeszkedő, mindkét adott síkkal párhuzamos *e* egyenest!

18. Adottak az *e* és *f* kitérő egyenesek és egy *P* pont. Ábrázoljuk azt az *S* síkot, amelyik a *P* pontra illeszkedik, és mind a két adott egyenessel párhuzamos!

19. Adott egy *S* sík egy *e* egyenes és egy *P* pont. Ábrázoljuk azt az *f* egyenest, amely illeszkedik a *P* pontra, metszi az *e* egyenest és párhuzamos az adott *S* síkkal!

20. Adottak az *e* és *f* kitérő egyenesek és egy *P* pont. Ábrázoljuk a *P* pontra illeszkedő, mind a két adott egyenest metsző *t* egyenest (adott pontra illeszkedő transzverzálist)!

21. Adott az *e*, *f* és *g* páronként kitérő helyzetű három egyenes. Ábrázoljunk egy olyan *t* egyenest, amelyik mind a három adott egyenest metszi!

22. Adott egy *S* sík egy *e* egyenes és egy *A* pont. Ábrázoljuk azt a paralelogrammát, amelyiknek egyik csúcsa az *A* pont, egyik átlója az adott *e* egyenesnek szakasza, és egyik oldala az *S* síkon van!

2.4. 5.2.4 Metrikus feladatok

A következő feladatok megoldásához méretarányra (illetve léptékre) szükség van. Mivel a feladatok után általában ennek feltüntetése hiányzik, használjunk egységesen M=1:100-as méretarányt!

1. Adott egy *S* sík és egy *e* egyenes. Határozzuk meg e két térelem hajlásszögét!

2. Adott egy *S* sík és egy *v* vetítősugár. Határozzuk meg e két térelem hajlásszögét!

3. Adott az *a* és *b* párhuzamos egyenespár, és egy képsíkkal párhuzamos *e* egyenes. Határozzuk meg az *e* egyenesnek az [*a*, *b*] síkkal bezárt hajlásszögét!

4. Adott egy *V* vetítősík és egy *e* egyenes. Határozzuk meg e két térelem hajlásszögét!

5. Adott egy képsíkkal párhuzamos sík és egy *e* egyenes. Határozzuk meg e két térelem hajlásszögét!

6. Vegyünk fel két síkot úgy, hogy szintvonalaik párhuzamosak legyenek (de a síkok egymással nem párhuzamosak!). Határozzuk meg a két sík hajlásszögét!

7. Adott egy *S* sík és egy *V* vetítősík. Határozzuk meg a két sík hajlásszögét!

8. Adott *S* síknak határozzuk meg valamely képsíkkal párhuzamos síkkal bezárt hajlásszögét! A kapott szög és az *S* sík képsíkszöge milyen relációban vannak egymással?

9. Adott két vetítősík. Határozzuk meg a hajlásszögük valódi nagyságát!

10. Vegyünk fel négy pontot úgy, hogy azok egy síknégyszöget alkossanak. Határozzuk meg a négyszög szögeinek valódi nagyságát!

11. Adott egy általános helyzetű *S* sík. Ábrázoljunk egy 3 m-es oldalélű, *S* síkban lévő a) szabályos háromszöget, b) szabályos hatszöget, c) négyzetet, d) szabályos ötszöget!

12. Adott két párhuzamos egyenes. Ábrázoljunk egy olyan téglalapot, amelynek 2-2 csúcsa az adott egyenesekre illeszkedik, szomszédos oldalaik aránya 1:2!

13. Adott két metsző egyenes. Ábrázoljunk egy olyan egyenlőszárú háromszöget, amelyiknek szárai az adott egyenesek szakaszai, alapja 3 m!

14. Adott egy *A* pont és egy *e* egyenes. Ábrázoljuk az *ABCD* négyzetet úgy, hogy *B* és *C* csúcsai az adott egyenesre illeszkedjenek!

15. Adott egy *A* pont és egy *e* egyenes. Ábrázoljuk az *ABC* szabályos háromszöget úgy, hogy *B* és *C* csúcsai az adott egyenesre illeszkedjenek!

16. Adott egy *A* pont és egy *e* egyenes. Ábrázoljuk az *ABCD* négyzetet úgy, hogy a négyzet *BD* átlója az adott egyenesnek szakasza legyen!

17. Adott egy *S* sík és egy arra illeszkedő *O* pont. Ábrázoljunk az *S* síkban egy olyan húrnégyszöget, amelyik köré írt 3 m sugarú kör középpontja az *O* pont!

18. Adott egy *S* sík és egy arra illeszkedő *O* pont. Ábrázoljunk az *S* síkban egy olyan érintőnégyszöget, amelyikbe írható 2 m sugarú kör középpontja az *O* pont!

19. Adott egy *S* sík és egy *A* pont. Ábrázoljuk azt az *ABC* háromszöget, amelyiknek a síkja merőleges az *S* síkra!

20. Adott két párhuzamos sík *S* és *R*. Ábrázoljunk egy olyan négyzetet, amelyiknek két-két csúcsa az adott síkokra illeszkedik, a négyzet síkja merőleges az adott síkokra, és az egyik oldalpár lejtője $l = \frac{2}{5}$!

21. Adott egy *t* egyenes és annak egy *O* pontja. Ábrázoljuk azt a 2 m-es oldalélű szabályos hatszöget, amelynek *O* a középpontja, és a hatszög *H* síkja merőleges a *t* egyenesre!

22. Adott az *e* és *f* kitérő egyenespár és az *f* egyenesen egy *S* pont. Ábrázoljuk azt a szabályos háromszöget, amelyiknek a síkja merőleges az *f* egyenesre, súlypontja az *S* pont, és egyik csúcsa az *e* egyenesre illeszkedik!

23. Adott egy *S* sík és egy *e* egyenes. Illesszünk az *e* egyenesre egy olyan *R* síkot, amelyik merőleges az *S* síkra!

24. Adott az *A* és *B* sík, és egy olyan *e* egyenes, amelyik mind a két síkkal párhuzamos. Ábrázoljunk egy olyan paralelogrammát, amelyiknek a *P* síkja merőleges az adott síkokra (mind a kettőre), egyik (*A*) csúcsa az *e* egyenesen van, két-két csúcsa pedig egy-egy adott síkra illeszkedik!

25. Adott egy rombusz *AC* átlója, továbbá egy *S* sík. Határozzuk meg a rombusz másik két csúcsát úgy, hogy az egyik az *S* síkra illeszkedjen!

26. Adott egy *S* sík és egy *ABC* háromszög. Határozzuk meg a síkidomnak az adott *S* síktól való távolságát!

27. Adott egy *P* pont és az *S* sík. Ábrázoljuk a *P* pontnak az *S* síkra vonatkoztatott P^* tükörképét!

28. Adott egy *P* pont és egy *e* egyenes. Ábrázoljuk a *P* pontnak az *e* egyenesre vonatkoztatott tengelyes tükörképét (P^*)!

29. Adott egy *e* egyenes és egy *S* sík. Ábrázoljuk az egyenesnek az *S* síkra vonatkozó e^* tükörképét!

30. Adott egy *e* egyenes és egy *S* sík. Ábrázoljuk az egyenesnek az *S* síktól 2 m-re lévő pontjait!

31. Adott két kitérő egyenes *e* és *f*. Határozzuk meg a két egyenes távolságát abban az esetben, amikor az *e* egyenes általános helyzetű, és az *f* pedig: a) képsíkkal párhuzamos, b) képsíkra merőleges (vetítősugár), c) szintén általános helyzetű!

32. Adott két kitérő egyenes *e* és *f*. Határozzuk meg a két egyenes hajlásszögét abban az esetben, amikor az *e* egyenes általános helyzetű, az *f* pedig: a) képsíkkal párhuzamos, b) képsíkra merőleges (vetítősugár), c) szintén általános helyzetű!

33. Adott két kitérő egyenes *e* és *f*. Ábrázoljuk a két egyenes normáltranszverzálisát abban az esetben, amikor az *e* egyenes általános helyzetű, az *f* pedig: a) képsíkkal párhuzamos, b) képsíkra merőleges (vetítősugár), c) szintén általános helyzetű!

34. Adott két párhuzamos egyenes *e* és *f*. Ábrázoljuk a két egyenes *t* szimmetriatengelyét! (A *t* akkor szimmetriatengely, ha az *e* tükörképe az *f* egyenes.)

35. Adott két metsző egyenes *e* és *f*. Ábrázoljuk a két egyenes *t* szimmetriatengelyét!

36. Adott két párhuzamos sík *S* és *R*. Ábrázoljuk a két sík szimmetriasíkját! Megjegyzés: Szimmetriasíknak (vagy tükörsíknak) nevezzük azt a *T* síkot, amelyikre tükrözve az egyik síkot, a tükörkép egybeesik a másik síkkal. A *T* szimmetriasík az adott *S, R* síkok távolságát merőlegesen felezi.

37. Határozzuk meg a *T* szimmetriasíkját az adott *S* és *R* metsző *S* síkoknak!

38. Adott egy *S* sík és egy *A* pont. Ábrázoljuk azt az *ABC* háromszöget, amely - szabályos, - síkja merőleges az *S* síkra, - *B* és *C* csúcsai az *S* síkon vannak, - *BC* oldalának lejtője $l = \frac{2}{5}$!

39. Adott egy *S* sík. Vegyünk fel egy olyan *e* egyenest, amely az adott *S* síkkal és a képsíkkal is párhuzamos. Ábrázoljunk egy olyan négyzetet, amelyiknek a síkja merőleges az adott *S* síkra, két-két csúcsa az *e* egyenesre illetve az *S* síkra illeszkedik!

40. Adott egy *S* sík és egy *P* pont. Adjuk meg azt az *R* síkot, amely - illeszkedik a *P* pontra, - az adott *S* síkkal 60^o-os szöget zár be, - az *R* és *S* síkok szintvonalai párhuzamosak!

41. Adott két sík *A* és *B*. Ábrázoljuk a két sík *m* metszésvonalát! Határozzuk meg a képsíkszögét az adott síkoknak és az *m* metszésvonalnak! Melyik szög lesz a legkisebb, és miért?

42. Adott általános helyzetű *S* síkban ábrázoljunk egy olyan paralelogrammát, amelyiknek 4 m-es oldalai párhuzamosak a képsíkkal, a másik oldalpárja a síknak 30^o-os képsíkszögű egyenesei, magassága pedig 3 m! Oldjuk meg a feladatot: a) Az *S* sík szintsíkba forgatásával. b) Az *S* sík szintsíkba forgatása nélkül!

43. Adott *S* síkban ábrázoljunk egy olyan trapézt, amelyiknek 4 m-es és 6 m-es alapjai párhuzamosak a képsíkkal! A trapéz egyik szárának lejtője $l = \frac{2}{5}$, a másik szár rézsűje $r = \frac{5}{3}$.

44. Adott *S* síkban ábrázoljunk egy olyan trapézt, amelyiknek 5 m-es alapja párhuzamos a képsíkkal, egyik szárának képsíkszöge 30^o-os, a másik szár lejtője $l = \frac{1}{3}$, a trapéz magassága 3 m!

45. Adott az *S* sík és annak egy *A* pontja. Ábrázoljuk a síkban azt az *ABC* háromszöget, amelyiknek *BC* oldala párhuzamos a képsíkkal, az *AB* oldal lejtője $l = \frac{3}{7}$, az *AC* oldal rézsűje $r = \frac{5}{3}$, magassága pedig 3 m!

46. Ábrázoljunk egy adott *P* pontra illeszkedő 60°-os képsíkszögű síkot! a) Hány megoldása van a feladatnak? b) A feltételeknek eleget tevő síkok *P* pontra illeszkedő esésvonalai mit alkotnak?

47. Illesszünk egy adott *e* egyenesre egy 45°-os képsíkszögű síkot!

48. Adott az A_3, C_7 pontpár. Ábrázoljunk egy olyan rombuszt, amelyiknek két szemben lévő csúcsa az adott két pont, a *B* csúcsa az 5-ös főszintsíkra illeszkedik, és a rombusz síkjának rézsűje $r = \frac{3}{5}$!

49. Adott két pont *A* és *B*. Ábrázoljunk egy olyan négyzetet, amelyiknek két szomszédos csúcsa az adott két pont, és a négyzet síkjának rézsűje $r = \frac{2}{5}$!

50. Adott két pont *A* és *B*. Ábrázoljuk az *ABC* szabályos háromszöget úgy, hogy a háromszög síkjának rézsűje $r = \frac{3}{7}$ legyen!

51. Adott egy *e* egyenes. Ábrázoljunk egy olyan *f* egyenest, amely - párhuzamos az *e* egyenessel, - az *e* egyenestől való távolsága 3 m, - és az *e* egyenessel olyan síkot alkot, amelynek képsíkszöge 60°-os!

52. Adott egy *S* sík, és fölötte egy *A* pont. Ábrázoljuk az *ABCD* szabályos tetraédert úgy, hogy a *BCD* alapja az *S* síkon legyen!

53. Adott két párhuzamos sík *S* és *R*. Ábrázoljunk egy olyan kockát, amelynek négy-négy csúcsa egy-egy adott síkra illeszkedik!

2.5. 5.2.5 Görbe vonalak

1. Adott egy 3-as szintsíkban lévő görbe, és e görbén lévő *A*, *B* pontok. a) Határozzuk meg az *AB* ív valódi hosszát! b) Ábrázoljuk a görbét a *B* pontjában érintő egyenest! c) Ábrázoljuk a görbe *AB* ívének *F* felezőpontját!

2. Főszintsíkokra illeszkedő pontjaival adott egy vetítősíkban lévő görbe. a) Ábrázoljuk a görbe 4,5-es kótájú pontjait! b) A görbe képén tetszőlegesen vegyünk fel egy *P* pontot, majd határozzuk meg a pont kótáját és ábrázoljuk a görbe ezen pontjához tartozó érintőjét! c) Ábrázoljuk a görbe maximum-, minimum és inflexiós pontjait! Határozzuk meg a görbe inflexiós pontjában a lejtadatokat! d) Határozzuk meg a görbe két tetszőleges pontja közé eső ívszakasz valódi nagyságát!

3. Adott egy *S* általános helyzetű síkban lévő *g* görbe (képével és főszintsíkokra illeszkedő pontjaival). a) Ábrázoljuk a görbe 3,8-es kótájú pontjait! b) A görbe képén tetszőlegesen felvett *P* pontnak határozzuk meg a kótáját, majd ábrázoljuk a görbe ezen pontjához tartozó érintőjét! c) Ábrázoljuk a görbe maximum és minimum pontjait! d) Határozzuk meg a görbe E_6 pontjában a lejtadatait! e) Határozzuk meg a görbe A_4, B_5 pontjai közé eső ívszakasz valódi nagyságát!

4. Adott egy *g* térgörbe (képével és főszintsíkokra illeszkedő pontjaival). a) Készítsük el a görbe hossz-szelvényét! b) Ábrázoljuk a görbe 8,4-es kótájú *A* pontját, majd ábrázoljuk a görbe ezen pontjához tartozó érintőjét! c) Határozzuk meg a görbe *A* pontjában a lejtadatait! d) Ábrázoljuk a görbe maximum-, minimum és inflexiós pontjait! e) Határozzuk meg a görbe képén tetszőlegesen felvett *P*, *R* pontok kótáját! f) Határozzuk meg a görbe *PR* ívének valódi nagyságát!

2.6. 5.2.6 Terep és rézsűfelületek

1. Főszintvonalaival adott terepfelületnek adott *A* pontjára illeszkedő esésvonalát szerkesszük meg!

2. Tíz méterenkénti nívódifferenciához tartozó főszintvonalaival adott terepfelületnek szerkesszük meg a két méteres nívódifferenciához tartozó főszintvonalait!

3. Adott egy terep tíz méterenkénti főszintvonalaival, valamint egy *P* pont képe. Határozzuk meg a *P* pont kótáját úgy, hogy az illeszkedjen az adott terepfelületre!

4. Főszintvonalaival adott terepfelületről készítsünk terepszelvényt! (Messük el egy vetítősíkkal!)

5. Főszintvonalaival adott terepfelületet messük el egy általános helyzetű *S* síkkal!

6. Főszintvonalaival adott terepfelületet messük el 13,6-os kótájú, képsíkkal párhuzamos síkkal!

7. Főszintvonalaival adott egy terepfelület, és egy általános helyzetű egyenes. Szerkesszük meg az egyenesnek a felülettel alkotott metszéspontjait!

8. Főszintvonalaival adott egy terepfelület, és annak egy E_{20} pontja. Ábrázoljuk a felület adott *E* pontjához tartozó érintősíkját! a) Ábrázoljuk a terepfelület E pontjára illeszkedő általános felületi érintőjét! b) Ábrázoljuk a terepfelület *E* pontjára illeszkedő felületi normálisát!

9. Főszintvonalaival adott egy terepfelület, és annak egy *A* pontja. a) Ábrázoljuk a felület adott *A* pontjára illeszkedő $l = \frac{2}{3}$ -os lejtésű semleges vonalát! b) Ábrázoljuk a felület adott *A* pontjára illeszkedő 10%-os lejtésű semleges vonalát!

10. Főszintvonalaival adott egy terepfelület, és annak az A_{40}, B_{90} felületi pontja. Ábrázoljuk a felület két adott pontjára illeszkedő semleges vonalát!

11. Főszintvonalaival adott egy terepfelület. Szerkesztendő azon 60x100 m²-es plató a 200-as főszintsíkban, ahol a bevágások rézsűje $r_b = \frac{7}{6}$, a töltések rézsűje pedig $r_t = \frac{5}{3}$!

12. A 18. főszintsíkra illeszkedő egyenesnek ábrázoljuk a rézsűfelületeit! ($r = \frac{4}{3}$, M=1:500)

13. Graduált képével adott általános helyzetű egyenesnek ábrázoljuk a rézsűfelületeit! ($r = \frac{3}{2}$)

14. A 7-es főszintsíkra illeszkedő körnek ábrázoljuk a rézsűfelületeit! ($r = \frac{4}{5}$, M=1:400)

15. Képével és főszintsíkokra illeszkedő pontjaival adott térgörbének ábrázoljuk a rézsűfelületeit! ($r = \frac{3}{2}$)

2.7. 5.2.7 Vegyes gyakorló feladatok

Az alábbi szerkesztések 2-3 alapszerkesztési lépéssel megoldhatók. Önellenőrzés céljából kerültek a feladatgyűjtemény végére. Ezek megoldását nem közöljük. Megoldásukhoz szükséges időtartam (jó felkészültség esetén) 5-10 perc.

1. Határozza meg az A_3 és a $B_{6,5}$ pontokra illeszkedő egyenes képsíkszögét, lejtőjét és rézsűjét!

2. Adott az A_5 és B_{11} pontpár. Ezen pontok által meghatározott egyenesre lejtő irányban mérjen fel 2,5 m hosszú szakaszt az egyenes P_9 pontjából indítva!

3. Az A_2 B_4 C_7 háromszöget vetítősíkban adtuk meg. A 4-es szintsíkba való forgatással határozza meg a háromszögbe írható kör középpontját, és olvassa le annak kótáját! (A középpontot a szögfelezők metszéspontja adja.)

4. Adott a *V* vetítősíkban egy P_3 pont. Szerkessze meg a vetítősík azon egyenesét, mely illeszkedik a *P* pontra, és a lejtője $l = \frac{3}{4}$!

5. Adott az S általános helyzetű sík b egyenesével és P pontjával, valamint az a általános helyzetű egyenes. Szerkessze meg az S sík és az a egyenes döféspontját! Olvassa le a döféspont kótáját, jelölje a láthatóságot!

6. Adott az $A_4B_6C_5$ általános helyzetű háromszög síkja és az a egyenes. Szerkessze meg a háromszög síkjának és az a egyenesnek a döféspontját! Olvassa le a döféspont kótáját, jelölje a láthatóságot!

7. Szerkessze meg az $ABCD$ általános helyzetű paralelogramma-lap (a paralelogramma által határolt véges síkrész) és az S ugyancsak általános helyzetű sík áthatását! Adott az $A_3B_1C_2D_4$ paralelogramma, és az S sík e graduált esésvonala. Jelölje a láthatóságot!

8. Szerkessze meg az ABC általános helyzetű háromszöglap (a háromszög vonal által határolt véges síkrész) és az S általános sík áthatását! Adott az $A_5B_6C_2$ általános helyzetű háromszöglap, és az S sík e graduált esésvonala.

9. Legyen az $A_1B_2C_5$ általános helyzetű háromszög síkja S. Határozza meg az S sík esésvonalának rézsűjét!

10. Adott az S síkban $A_5B_3C_1$ általános helyzetű háromszög. Határozza meg a kerületét!

11. Adott az a általános helyzetű egyenes és a P_4 pont (P nem illeszkedik az egyenesre). Szerkesszen négyzetet, melynek egyik átlója az egyenesre illeszkedik, és P az egyik csúcsa!

12. Adott az S általános helyzetű sík graduált esésvonalával és ebben a síkban az A_5B_1 szakasz. Szerkesszen szabályos háromszöget, melynek oldala az AB szakasz!

13. Adott az a általános helyzetű egyenes és a P_4 pont (P nem illeszkedik az egyenesre). Szerkesszen rombuszt, melynek egyik átlója az egyenesre illeszkedik, P az egyik csúcsa, és a P-t tartalmazó átló hossza kétszerese a másik átlónak!

14. Adott a V vetítősíkban ABC szabályos háromszög A_1 B_6 oldala! A 4-es szintsíkba való forgatással szerkessze meg a háromszög C csúcsának képét, és határozza meg annak kótáját!

15. Határozza meg az $A_5B_6C_8D_7$ és a $P_7Q_8R_{10}S_9$ általános helyzetű paralelogrammák síkjainak távolságát!

16. Határozza meg a P_{10} pont és az $A_5B_5C_8$ általános helyzetű háromszög síkjának távolságát! (P nem illeszkedik a háromszög síkjára.)

17. Adott az A_5 B_5 C_8 általános helyzetű háromszög síkja. Határozza meg a P pontot úgy, hogy PC szakasz merőleges legyen a háromszög síkjára, és PC hossza 4 m legyen!

18. Határozza meg az $A_5B_6C_8D_7$ általános helyzetű paralelogramma síkjának és a P_{10} pontra illeszkedő normálisának döféspontját! (P nem illeszkedik a paralelogramma síkjára.)

19. Adott az $A_8B_9C_6$ általános helyzetű háromszög síkja. Ábrázoljon ebben a síkban egy olyan egyenest, amely illeszkedik a háromszög súlypontjára, és a dőlésszöge 30^o-os! (Megj.:súlypont = súlyvonalak metszéspontja)

20. Adottak az ABC általános helyzetű háromszög A_1 és B_4 csúcsai és a C csúcs vetülete. Határozza meg a C csúcs kótáját úgy, hogy a háromszög síkjának rézsűje $r = \frac{2}{3}$ legyen! Egy sík megadása elegendő.

21. Adott az $A_3B_3C_5$ általános helyzetű háromszög. Az AC oldalhoz tartozó magasságvonalra illesszen olyan síkot, melynek a rézsűje $r = \frac{1}{3}$! (Megjegyzés: Az AC oldalhoz tartozó magasságvonal illeszkedik a B csúcsra, és merőleges az AC oldal egyenesére.)

22. Adott az $A_2B_2C_6$ általános helyzetű háromszög síkja. Ábrázoljon ebben a síkban egy olyan egyenest, amely illeszkedik a háromszög magasságpontjára, és a dőlésszöge 30^o-os! (Megjegyzés: A háromszög magasságpontja a magasságvonalaink metszéspontja.)

3. 5.3 Kótás projekció MEGOLDÁSOK

3.1. 5.3.1 Alapfeladatok (Megoldások)

1. a) d=8 m. b) d=10 m.
2. d=20 cm.
3. k=$25 \cdot \sqrt{3}$ mm.
4. k= $\frac{10}{3}$ mm.
5. k=8 mm.
6. M=1:200.
7. $r = \sqrt{3}$, $\alpha = 30^\circ$.
8. Alapfeladat, lásd jegyzet.
9. Alapfeladat, lásd jegyzet.
10. Alapfeladat, lásd jegyzet.
11. Alapfeladat, lásd jegyzet.
12. Alapfeladat, lásd jegyzet.
13. Alapfeladat, lásd jegyzet.
14. Alapfeladat, lásd jegyzet.
15. A feladatnak két megoldása van. a) a képsík alatt, b) a képsík felett.
16. Alapfeladat, lásd jegyzet.
17. Alapfeladat, lásd jegyzet.
18. Alapfeladat, lásd jegyzet.
19. Alapfeladat, lásd jegyzet.

3.2. 5.3.2 Vetítősík szintsíkba forgatásával megoldható feladatok (Megoldások)

1. Az adott egyenesre egy vetítősíkot illesztünk. A vetítősíkot (s benne az egyenest) valamelyik szintsíkba forgatjuk. A keresett szög nagyságát a leforgatottban nyerjük.
2. A megoldás lépései: a) Az egyenesre vetítősíkot illesztünk. b) A vetítősíkot szintsíkba forgatjuk. c) A forgatottban megállapítható az egyenes α képsíkszögének valódi nagysága. d) $l = tg\alpha$, $r = ctg\alpha$.
3. Megoldási lépések: a) Az egyenes képére egy *V* vetítősíkot illesztünk. b) Az *A* pontja segítségével a vetítősíkot szintsíkba forgatjuk. c) A forgatottban felvesszük az (*A*) pontra illeszkedő, 30°-os képsíkszögű egyenes forgatottját. d) Meghatározzuk a *B* pont forgatottját, amely illeszkedik az egyenes forgatottjára. e) Lépték segítségével meghatározzuk a (*B*) leforgatottnak a tengelytől való távolságát, végül ennek segítségével megállapítjuk a *B* kótáját.
4. Az a), b), c), d), e), f) pontok mindegyikének azonos az elve: Az adott pontok egyenesére vetítősíkot illesztve, azt szintsíkba forgatva a kérdéses szakaszhossz – a méretarányt figyelembe véve – valódi méretében látszik.

5. A megoldás lépései: a) Az egyenesre vetítősíkot illesztünk. b) A vetítősíkot szintsíkba forgatjuk. c) A forgatottban felvesszük a keresett pontok forgatottjait. d) Végül ezeket visszaforgatjuk.

6. A feladat vetítősík szintsíkba forgatása nélkül is megoldható: a) A lejtő ismeretében megszerkesztjük az osztóközt, majd ezekkel graduálunk. (Két megoldás lesz különböző lejtiránnyal.) b) A lejtő ismeretében kiszámítjuk az osztóközt, majd ezzel graduálunk.

7. Lásd az előbbi feladatot.

8. Megoldási lépések: a) A vetítősíkot (pontjaival) valamely szintsíkba forgatjuk. b) Forgatottban megszerkesztjük a háromszög súlypontját. c) A kapott eredményt visszaforgatjuk. Emlékeztető: A háromszög súlypontja a súlyvonalak metszéspontja. A háromszög súlyvonala pedig az az egyenes (illetve szakasz), amely a háromszög adott csúcsát köti össze a szemközti oldal felezési pontjával.

9. Megoldási lépések: a) A vetítősíkot (pontjaival) valamely szintsíkba forgatjuk. b) Forgatottban megszerkesztjük a háromszög magasságpontját. c) A kapott eredményt visszaforgatjuk. Emlékeztető: A háromszög magasságpontja a magasságvonalak metszéspontja. A háromszög magasságvonala az az egyenes, melyet a háromszög adott csúcsából a szemközti oldal egyenesére állítunk.

10. Megoldási lépések: a) A vetítősíkot (pontjaival) valamely szintsíkba forgatjuk. b) Forgatottban megszerkesztjük a háromszög köré írható körének *K* középpontját! c) A kapott eredményt visszaforgatjuk. Emlékeztető: A háromszög köré írható körének középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontja adja.

11. Megoldási lépések: a) A vetítősíkot (pontjaival) valamely szintsíkba forgatjuk. b) Forgatottban megszerkesztjük a háromszögbe írható körnek a középpontját! c) A kapott eredményt visszaforgatjuk. Emlékeztető: A háromszögbe írható kör középpontját a szögfelezők metszéspontja adja.

12. A megoldás lépései: a) A két pont egyenesére vetítősíkot illesztünk. b) A vetítősíkot szintsíkba forgatjuk. c) Forgatottban megszerkesztjük az *AB* oldalú négyzetet. d) A kapott négyzetet visszaforgatjuk.

13. A megoldás lépései: a) A két pont egyenesére vetítősíkot illesztünk. b) A vetítősíkot szintsíkba forgatjuk. c) Forgatottban megszerkesztjük az *ABC* szabályos háromszöget. d) A kapott szabályos háromszöget visszaforgatjuk.

14. A megoldás lépései: a) Az adott vetítősíkot szintsíkba forgatjuk. b) Forgatottban megoldjuk a feladatot. c) Visszaforgatunk.

15. Lásd az előző feladatot.

16. Lásd a 14. feladatot.

17. Lásd a 14. feladatot.

18. Lásd a 14. feladatot.

19. Lásd a 14. feladatot.

20. Lásd a 14. feladatot.

21. Lásd a 14. feladatot.

3.3. 5.3.3 Helyzetgeometriai feladatok (Megoldások)

1. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

2. Alapszerkesztés.

3. Alapszerkesztés.

4. Alapszerkesztés.

5. Alapszerkesztés.

6. Alapszerkesztés.
7. Alapszerkesztés.
8. Alapszerkesztés.
9. Alapszerkesztés.
10. Alapszerkesztés.
11. Alapszerkesztés.
12. Alapszerkesztés.
13. Alapszerkesztés.
14. Alapszerkesztés.
15. Alapszerkesztés.
16. Megszerkesztjük *ABC* háromszög síkjának graduált esésvonalát, majd ezzel párhuzamos esésvonalat szerkesztünk az adott *P* ponton át. Ezzel meghatároztuk a keresett síkot.
17. Az az egyenes, amelyik két (általános helyzetű) adott síkkal párhuzamos, az párhuzamos a két sík metszésvonalával is. Tehát a *P* pontra illeszkedő, a metszésvonallal párhuzamos egyenest kell szerkeszteni.
18. Egy sík akkor párhuzamos egy egyenessel, ha a síknak van az egyenessel párhuzamos egyenese. Ezt figyelembe véve, a szerkesztés menete a következő: a) Ábrázolunk egy *P* pontra illeszkedő, az adott *e* egyenessel párhuzamos *a* egyenest. b) Felveszünk egy *P* pontra illeszkedő, *f* egyenessel párhuzamos *b* egyenest. Meghatározzuk az [*a*,*b*]=*S* sík graduált esésvonalát (ez lesz a megoldás).
19. Megoldási lépések: a) Felveszünk egy *P* pontra illeszkedő, *S* síkkal párhuzamos *R* síkot. (Ennek minden egyenese párhuzamos az *S* síkkal, tehát e síkban van az *f* egyenes. b) Meghatározzuk az *e* egyenesnek az *R* síkkal alkotott *D* döféspontját c) A *PD* egyenes lesz a mindhárom feltételt kielégítő *f* egyenes.
20. Mivel a keresett *t* egyenes mind a két egyenest metszi, ezért mindkettővel – külön-külön – közös síkot alkot, azaz e két sík közös egyenese lesz. Ezért a *t* egyenes az említett síkok metszésvonala. Mivel [*e*,*t*]=[*e*,*P*] és [*f*,*t*]=[*f*,*P*], ezért a megoldás a következő: a) Az [*e*,*P*] síknak felvesszük két szintvonalát. b) Az [*f*,*P*] síknak meghatározzuk az előbbi szintvonalakkal azonos szintsíkban lévő szintvonalait. c) Az azonos kótájú szintvonalak metszéspontjait összekötve nyerjük a keresett *t* transzverzálist.
21. A három – páronként kitérő helyzetű – egyenes transzverzálisának szerkesztését visszavezetjük az előbbi feladatra oly módon, hogy mondjuk a *g* egyenesen kitűzünk egy *P* pontot, majd megszerkesztjük a *P* pontra illeszkedő, *e* és *f* kitérő egyeneseket egyaránt metsző transzverzálist (lásd az előbbi feladat megoldását). Ez már a feladatnak egy megoldása lesz, hiszen az így nyert *t* egyenes a *g*-t is metszi a *P* pontban. Mivel a *P* pont a *g* egyenesen tetszőlegesen vehető fel, ezért a feladatnak végtelen sok megoldása van.
22. A megoldás lépései: a) A keresett paralelogramma *P* síkját az *A* pont és az *e* egyenes határozza meg. Vegyük fel ezen síknak legalább két szintvonalát. b) Határozzuk meg a *P* és *S* síkok *m* metszésvonalát. Ennek segítségével megkapjuk az *e* egyenesnek az *S* síkkal alkotott *D* döféspontját, amely a paralelogramma második csúcsa lesz. c) Vegyünk fel az *m* egyenessel párhuzamos, *A* pontra illeszkedő *f* egyenest. Ez az *e* egyenesből kimetszi a paralelogramma harmadik (*B*) csúcsát. d) A hiányzó *C* csúcsot az *m* metszésvonalon *AD*-vel párhuzamos egyenes segítségével nyerjük.

3.4. 5.3.4 Metrikus feladatok (Megoldások)

1. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.
2. Alapszerkesztés.
3. Alapszerkesztés.

4. Alapszerkesztés.

5. Alapszerkesztés.

6. Alapszerkesztés.

7. Alapszerkesztés.

8. Alapszerkesztés.

9. Alapszerkesztés.

10. Alapszerkesztés.

11. Ez a feladat és a következő hét ugyanannak a feladattípusnak a tagjai. Ezen feladattípus az általános helyzetű síkban megoldandó metrikus feladatok csoportja. Megoldási tervük tehát azonos. A megoldás lépései: a) Az adott általános helyzetű síkot szintsíkba forgatjuk. A forgatottban nincs „vetítési torzulás”, de van méretarány szerinti kicsinyítés. b) A forgatottban megoldjuk a feladatot (jelen esetben az a; b; c; d részeket), majd c) a kapott eredményt visszaforgatjuk. Megjegyzés: A kótás projekcióban is teljesül, hogy a leforgatott sík pontjai és a képpontok között ortogonális, axiális affinitás áll fenn. Ezért a visszaforgatás során ennek tulajdonságait (például illeszkedés-tartás, egyenes és képe a tengelyen metszi egymást, stb..) használhatjuk.

12. A két párhuzamos egyenes síkjára végrehajtjuk az előző feladat szerkesztési lépéseit.

13. Lásd a 11. feladat megoldását.

14. Lásd a 11. feladat megoldását.

15. Lásd a 11. feladat megoldását.

16. Lásd a 11. feladat megoldását.

17. Lásd a 11. feladat megoldását.

18. Lásd a 11. feladat megoldását.

19. Megoldási lépések: a) Az *A* pontból normálist állítunk az *S* síkra (alapszerkesztés). b) Meghatározzuk a normálisnak az *S* síkkal alkotott *M* metszéspontját. c) Az *S* síkban az *M* ponton át tetszőleges *s* egyenest veszünk fel. d) Az *s* egyenesen tetszőlegesen kijelölhetjük a *B* és *C* csúcsokat, melyeket *A*-val összekötve kapjuk az *ABC* háromszöget.

20. A megoldás lépései: a) Az *S* síkban tetszőlegesen kijelöljük az *A* csúcsot, s ebből normálist állítunk az *R* síkra. b) Megszerkesztjük a normálisnak az *R* síkkal alkotott *D* döféspontját (Ez lesz a négyzet második csúcsa). c) Meghatározzuk az *AD* távolságot (amely a két sík távolsága és egyben a négyzet oldalának hossza). d) Felveszünk az *S* síkban egy *A* pontra illeszkedő, $l = \frac{2}{5}$ lejtőjű *f* egyenest. e) Felveszünk az *R* síkban egy *D* pontra illeszkedő, $l = \frac{2}{5}$ lejtőjű, az *f* egyenessel párhuzamos *g* egyenest. f) az *f* illetve a *g* egyenesekre az *A* illetve a *D* pontokból felmérjük a c) pontban meghatározott távolságot. Így kapjuk a négyzet hiányzó *B* és *C* csúcsát.

21. Megoldási lépések: a) Felvesszük az *O* pontra illeszkedő, *t* egyenesre merőleges *H* síkot. b) A *H* síkot (az *O* pontjával) szintsíkba forgatjuk. A forgatottban felvesszük az adott méretű hatszög forgatottját. c) A kapott hatszöget visszaforgatjuk.

22. A megoldás lépései: a) Felvesszük az *S* pontra illeszkedő *f* egyenesre merőleges *H* síkot (Ez lesz a keresett háromszög síkja.) b) Meghatározzuk az *e* egyenesnek a *H* síkkal alkotott döféspontját. Ez lesz a háromszög *A* csúcsa. c) A *H* síkot (*S* és *A* pontjait) szintsíkba forgatjuk, majd a forgatottban megszerkesztjük azt az *ABC* szabályos háromszöget, amelyiknek (*S*) a súlypontja. d) A *B* és *C* csúcsokat visszaforgatjuk.

23. Szerkesztési lépések: a) Az *e* egyenes tetszőleges *M* pontjából normálist (*f*) állítunk az *S* síkra. b) Meghatározzuk az [*e*,*f*]=*R* sík graduált esésvonalát.

24. Megoldási lépések: a) Megszerkesztjük az adott síkok *m* metszésvonalát. Ezzel kell az *e* egyenesnek párhuzamosnak lennie (ekkor lesz párhuzamos mind a két síkkal). b) Az *e* egyenesen tetszőlegesen kijelöljük a paralelogramma *A* csúcsát. c) Felvesszük az *A* pontra illeszkedő, *e* és *m* egyenesekre merőleges *P* síkot. Ez lesz a paralelogramma *P* síkja. d) Meghatározzuk az *m* egyenesnek a *P* síkkal alkotott döféspontját. Ez lesz a paralelogramma *C* csúcsa, amely mind a két síkra illeszkedik. e) Meghatározzuk a *P* síknak az *A* illetve a *B* síkokkal alkotott *a* és *b* metszésvonalait. Ezeknek szakaszai a paralelogramma *C* csúcsra illeszkedő oldalai. f) Az előbb nyert egyeneseken, párhuzamosok felvételével nyerjük a hiányzó *B* és *D* csúcsokat.

25. A megoldás lépései: a) Az *AC* szakaszra az *O* felezőpontjában merőleges *M* síkot veszünk fel. b) Meghatározzuk az *M* síknak az adott *S* síkkal alkotott *m* metszésvonalát. c) Az *m* metszésvonalon tetszőlegesen kijelöljük a *B* csúcsot (végtelen sok megoldás). d) A *B* csúcsot az *O* pontra tükrözve nyerjük a hiányzó *D* csúcsot.

26. Meghatározzuk mind a három csúcsnak az *S* síktól való távolságát. A legkisebb távolság lesz az *ABC* síkidomnak az *S* síktól való távolsága.

27. Szerkesztési lépések: a) A *P* pontból az *S* síkra *n* merőleges egyenest állítunk. b) Meghatározzuk az *n* normálisnak az *S* síkkal alkotott *F* metszéspontját. c) A *P* pont képét tükrözve az *F* pont képére nyerjük a keresett P^* pont képét. A tükrözést azért végezhetjük el a képen, mert a valóságban egyenlő ($PF= P^*F$) szakaszok azonos mértékben rövidülnek a képen a közös képsíkszög miatt. d) A P^* kótájának meghatározásánál felhasználhatjuk azt az analitikus geometriából ismert tételt, hogy szakasz felezőpontjának koordinátáit a végpontok koordinátáinak számtani közepeként nyerjük (mivel a kóta „amolyan" harmadik koordinátának is tekinthető).

28. Megoldási lépések: a) Meghatározzuk a [*P*,*e*] síknak egy szintvonalát. b) Az előbbi szintvonal (mint tengely) körül a síkot szintsíkba forgatjuk. c) Forgatottban elvégezzük a tükrözést. d) A forgatottban nyert megoldást visszaforgatjuk.

29. Az egyenest két tetszőleges pontjával tükrözzük (lásd a 27. feladatot). Egyszerűbben elvégezhető a szerkesztés, ha az egyik pontként az *e* egyenesnek az *S* síkkal alkotott *M* metszéspontját választjuk, mivel ennek a tükörképe önmaga.

30. A megoldás lépései: a) Az *S* síkra – tetszőleges *P* pontjában – n normálist állítunk. b) Ábrázoljuk az *n* egyenes *P* pontjától 2 m-re levő *A* és *B* pontjait. c) Az előbb nyert *A* és *B* pontokra illesztünk egy-egy olyan A_A és B_B síkot, amelyek párhuzamosak az adott *S* síkkal. d) Meghatározzuk az *e* egyenesnek az előbbi síkokkal alkotott metszéspontjait – *M* és *N* -, amelyek a feladat megoldásai.

31. Az a) és c) eset szerkesztésének menete a jegyzetben megtalálható. A b) esetben nem szükséges követni az általános szerkesztési elvet, mivel a vetítősugárra merőleges egyenes (transzverzális) szükségszerűen párhuzamos a képsíkkal, ezért a képen nincs vetítési torzulás (csak méretarány szerinti kicsinyítés). A fentieket figyelembe véve a megoldás a következő: A vetítősugár pontban látszó képéből merőlegest állítunk az *e* egyenes képére (ez lesz a normáltranszverzális képe, kótája megegyezik a metszéspont kótájával). A metszéspontok közé eső távolság képét a léptékre visszük, ahol a távolság valódi nagysága leolvasható.

32. A megoldás lépései (mindhárom esetben): a) Az egyik egyenes tetszőleges pontjába a másik egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk. b) Az így nyert metsző egyenesek síkját szintsíkba forgatva a keresett hajlásszög valódi nagyságát kapjuk.

33. Lásd a 31. feladat megoldásánál leírtakat.

34. Megoldás: (1. megoldási mód) Az egyenesek síkját szintsíkba forgatjuk, a forgatottban felvesszük a *t* egyenest, majd visszaforgatjuk. (2. megoldási mód) A feladat forgatás nélkül is megoldható: a) A szimmetriatengely képe az egyenesek képeinek is szimmetriatengelye lesz. b) Mivel a szimmetriatengely benne van az adott egyenesek síkjában, ezért az [*e*,*f*] sík főszintvonalai graduálják a *t* egyenes képét.

35. Az előbbi, feladat (34.) megoldásánál leírt, mind a két megoldás itt is alkalmazható.

36. Szerkesztési lépések: a) Felveszünk tetszőlegesen az *S* síkon egy *A*, az *R* síkon egy *B* pontot. b) Ábrázoljuk az *AB* szakasz *F* felezőpontját. c) Megadjuk az *F* pontra illeszkedő, adott síkokkal párhuzamos sík graduált esésvonalát. Ez lesz a keresett *T* szimmetriasík. Megjegyzés: A feladat lépték (illetve méretarány) nélkül oldható meg.

37. Megoldási lépések: a) Megszerkesztjük az adott síkok *m* metszésvonalát. b) Felveszünk egy olyan *M* síkot, amely merőleges az *m* egyenesre. c) Megszerkesztjük az *M* síknak az *S* síkkal alkotott *s* metszésvonalát. d) Meghatározzuk az *M* síknak az *R* síkkal alkotott *r* metszésvonalát. e) Ábrázoljuk az *s* és *r* egyenesek *t* szimmetriatengelyét. (A 35. feladatnál leírtak szerint.) f) Meghatározzuk a *t* és *m* metsző egyenesek közös síkjának graduált esésvonalát. Ez a sík lesz a keresett *T* szimmetriasík.

38. A megoldás lépései: a) Az *A* pontból az *S* síkra *n* normálist állítunk. b) Meghatározzuk az *n* normálisnak az *S* síkkal alkotott *M* metszéspontját. c) Ábrázoljuk az *S* sík *M* pontjára illeszkedő $l = \frac{2}{5}$ lejtőjű *a* egyenesét. d) A keresett háromszög síkját – az [*n*,*a*] síkot – szintsíkba forgatjuk, a forgatottban megszerkesztjük a háromszög forgatottját, majd ezt visszaforgatjuk.

39. Szerkesztési lépések: a) Az *e* egyenest úgy kell felvenni, hogy párhuzamos legyen az *S* síknak egy szintvonalával. b) Az *e* egyenes tetszőleges *A* pontjából *n* normálist állítunk az *S* síkra. c) Meghatározzuk az *n* egyenes *S* síkkal alkotott *D* döféspontját (ez lesz a négyzet egyik csúcsa). d) Meghatározzuk az *A, D* pontok távolságát. Ez lesz a négyzet oldalának hossza. e) Az előbb nyert távolságot felmérjük az *A* csúcsból az *e* egyenes képére, így nyerjük a *B* csúcsot. f) Felvesszük az *S* sík *D* pontjára illeszkedő szintvonalát, majd erre is felmérve a négyzet oldalát kapjuk a hiányzó *C* csúcsot. Megjegyzés: A *B* és *C* csúcsokat azért lehet a képen (és nem forgatottban) „felrakni”, mert a szóban forgó egyenesek képsíkkal párhuzamosak, ezért nincs vetítési rövidülés.

40. Megoldási lépések: a) Vegyük fel azt a *V* vetítősíkot, amelyik illeszkedik a *P* pontra, és merőleges az *S* sík szintvonalaira. b) Szerkesszük meg a *V* és *S* síkok *s* metszésvonalát. c) Forgassuk be a *V* síkot valamely szintsíkba (ábrázoljuk a (*P*) és (*s*) térelemeket). d) A forgatottban felvesszük azt az (*r*) egyenest, amely illeszkedik a (*P*) pontra és 60^o-os szöget zár be az (*s*) egyenessel. e) Visszaforgatjuk az *r* egyenest. Ez lesz a keresett *R* síknak az egyik esésvonala. f) Megadjuk az *R* síkot graduált esésvonalával.

41. Az *m* metszésvonal képsíkszöge lesz a legkisebb, mivel a metszésvonal mind a két síkra illeszkedik, márpedig adott síkban lévő egyenes képsíkszöge nem lehet nagyobb, mint a sík képsíkszöge! (Mikor lehet egyenlő?)

42. Megoldások: (1. megoldás) a) Az *S* sík egyik szintvonalára (a léptékről) felmérünk 4 m-t, így kapjuk a paralelogramma *A* és *B* csúcsait. b) Megszerkesztjük – a képsíkszög ismeretében – a szomszédos oldalak *k* osztóközét, majd ennek segítségével ábrázoljuk az *A* és *B* csúcsra illeszkedő, 30^o-os képsíkszögű egyenesek képét. c) Leforgatjuk az *S* síkot. A forgatottban felvesszük az adott magasságú paralelogrammát, majd ezt visszaforgatjuk. (2. megoldás) a)-b) Megegyezik az 1. megoldás a) és b) pontjában leírtakkal. c) Felvesszük az *S* sík *A* pontra illeszkedő esésvonalát, majd erre felmérjük (az A ponttól) az adott magasságot az esésvonalra illeszkedő vetítősík szintsíkba forgatásával. d) Az előbb nyert magasság végpontjából húzott szintvonal a b) pontban nyert 30^o-os képsíkszögű egyenesekből kimetszi a hiányzó *C* és *D* csúcsokat.

43. Az előbbi feladat első megoldását alkalmazzuk.

44. A 42. feladatnál leírt mindkét megoldás alkalmazható.

45. A 42. feladatnál leírt mindkét megoldás alkalmazható.

46. a) A feladatnak végtelen sok megoldása van. b) A *P* pontra illeszkedő esésvonalak egy olyan forgáskúp alkotói, amelynek csúcsa az adott *P* pont, forgástengelye merőleges a képsíkra, félnyílásszöge 30^o.

47. A szerkesztésben alkalmazzuk a dőléskúpot.

48. A megoldás lépései: a) Az *AC* egyenesre – dőléskúp segítségével – illesszünk egy olyan *S* síkot, amelyiknek a rézsűje az adott érték. Ez lesz a rombusz síkja. b) Forgassuk le az *S* síkot valamely szintsíkba. A két adott pont forgatottján kívül adjuk meg az *S* sík 5-ös főszintvonalának forgatottját is. c) Az (*A*)(*B*) szakaszfelező merőlegese az 5-ös főszintvonal forgatottjából kimetszi a (*C*) pontot (A rombusz átlói

merőlegesen felezik egymást!). d) A hiányzó *D* csúcsot akár a forgatottban, de a képen is megszerkeszthetjük, felhasználva az oldalak azon tulajdonságát, hogy a szemben lévők párhuzamosak.

49. Szerkesztési lépések: a) Az *AB* egyenesre – dőléskúp segítségével – illesszünk egy olyan *S* síkot, amelyiknek a rézsűje az adott érték. Ez lesz a négyzet síkja. b) Forgassuk le az *S* síkot valamely szintsíkba. c) A forgatottban szerkesszük meg a négyzetet. d) Az előbb szerkesztett négyzetet visszaforgatjuk.

50. A szerkesztés menete megegyezik az előbbi feladatnál közöltekkel.

51. A szerkesztés menete megegyezik a 49. feladatnál közöltekkel.

52. Megoldási lépések: a) Az *A* pontból az *S* síkra *n* normálist állítunk. b) Megszerkesztjük az *n* egyenesnek az *S* síkkal alkotott *O* döféspontját. Ez lesz a *BCD* alapháromszög köré írható kör középpontja. c) Meghatározzuk az *AO* távolságot, amely az *A* pontnak az *S* síktól való távolsága, egyben a keresett szabályos tetraéder testmagassága. d) A testmagasság ismeretében (külön ábrán) megszerkesztjük a *BCD* alapháromszög köré írható körének *r* sugarát. Ez a szerkesztés két geometriai törvényt használ fel: 1. A szabályos tetraéder testmagasságai (egyben súlyvonalai) egy pontban metszik egymást, és ez a súlypont 1:3 arányban osztja a testmagasságokat. 2. Az alapháromszög (lévén szabályos) köré írható kör sugara egyenlő a magasságvonalai (amelyek egyben súlyvonalak) $\frac{2}{3}$ részével. e) Az *S* síkot (*O* pontjával) szintsíkba forgatjuk. f) Az (*O*) körül a d) pontban megszerkesztett *r* sugárral kört rajzolunk, majd ezen a körön felvesszük a (*B*)(*C*)(*D*) háromszög csúcsait úgy, hogy szabályos háromszöget alkossanak. g) Az előbbi háromszöget visszaforgatjuk, majd az *A* ponttal összekötve nyerjük a szabályos tetraéder hiányzó éleit.

53. Szerkesztési lépések: a) Az *S* síkon tetszőlegesen kijelöljük az *A* csúcsot. b) Az *A* csúcsból az *R* síkra *n* normálist állítunk. c) Meghatározzuk az *n* egyenesnek az *R* síkkal alkotott *E* döféspontját. d) Meghatározzuk az *A*, *E* pontok távolságát. Ez a síkok távolsága is, és egyben a kocka élének hossza. e) Az *R* síkot szintsíkba forgatjuk az *E* pontjával. f) A forgatottban felvesszük az (*E*)(*F*)(*G*)(*H*) négyzetet úgy, hogy az élek hossza a d) pontban kapott távolság legyen. g) Az előbbi négyzetet visszaforgatjuk. h) Az *E*, *F*, *G* és *H* pontokból az *n* egyenessel párhuzamosokat húzunk, és ezekre felmérjük az *A*, *E* pontok képi távolságát. (Mivel a párhuzamos élek – azonos képsíkszög miatt – egyformán rövidülnek a vetítés során) i) A kapott *B*, *C*, *D* csúcsokat az *R* síkon lévőkkel összekötve nyerjük a kocka hiányzó éleit.

Irodalomjegyzék

Baboss Csaba: *Geometria II.* Nyugat-Magyarországi Egyetem Geoinformatikai kar, Székesfehérvár, 2007.

A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Kárteszi Ferenc: *Bevezetés a véges geometriákba,* Akadémia Kiadó, Budapest, 1972.

Szász Gábor: *Projektív geometria,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

Szőkefalvi Nagy Gyula: *A geometriai szerkesztések elmélete ,* Akadémia Kiadó, Budapest , 1968.

Zigány Ferenc: *Ábrázoló geometria,* Tankönyvkiadó, Budapest , 1962.