Matematikai statisztikai elemzések 2.

Helyzetmutatók, átlagok, kvantilisek. A szórás és szóródás egyéb mérőszámai.

Prof. Dr. Závoti, József

Matematikai statisztikai elemzések 2.: Helyzetmutatók, átlagok, kvantilisek. A szórás és szóródás egyéb mérőszámai.

Prof. Dr. Závoti, József
Lektor: Bischof , Annamária

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Kivonat

Ez a modul a statisztika elemi számítási módszereivel ismerteti meg az olvasót. Elsajátíthatja a középértékek, a medián, a módusz, a kvantilisek és egyéb átlagok, valamint a szóródási mutatók gyakorlati számítási eszközeit.

Tartalom

. fejezet - Helyzetmutatók, átlagok, kvantilisek. A szórás és szóródás egyéb mérőszámai.

1. 2.1 Bevezetés

Jelen modul a Matematikai statisztikai elemzések tárgy második fejezete, modulja. Az itt következő ismeretek megértéséhez javasoljuk, hogy olvassa el a Tárgy korábbi moduljainál írottakat. Amennyiben ez még nem lenne elég a megértéshez, akkor forduljon a szerzőhöz segítségért.

Jelen modul célja, hogy az Olvasó megismerkedjen a legfontosabb helyzetmutatókkal, szóródási mutatókkal és képessé váljon azok gyakorlati feladatok megoldásában való felhasználására. Ebben a modulban lehet elsajátítani a leíró statisztika legalapvetőbb fogalmait. A különböző átlagok számítási összefüggései a gyakorlati élet legfontosabb kérdéseire adnak magyarázatot. A statisztikai képletek elméleti hátterének megvilágítása, megalapozása későbbi modulokban –a következtetéses statisztika tárgyalásakor- fog megtörténni.

A középértékek azonos fajta számszerű adatok centrumának közös jellemzői. Célunk használatukkal gyakorisági eloszlásokat kevés (1) adattal jellemezni.

2. 2.2 Középértékek

Fajtái:

1. **Számított középértékek vagy átlagok**: mindig számítással határozzuk meg őket. Értéküket minden egyes az átlagolásba bevont érték befolyásolja.

   a. számtani

   b. harmonikus

   i. mértani

   a. négyzetes

2. **Helyzeti középértékek**: az értékeknek egy bizonyos intervallumban való elhelyezkedése játszik szerepet. Az előforduló értékek egy része nem befolyásolja a középértékek nagyságát.

   a. módusz

   b. medián

Valamennyi középértékkel szemben támasztott **követelmény**, hogy közepes helyzetet foglaljon el, azaz a legkisebb $x_{\min}$ és a legnagyobb $x_{\max}$ értékek között helyezkedjen el. Fontos, hogy tipikus legyen, valamint könnyen értelmezhető, egyszerűen számítható.

3. 2.3 Számtani közép (átlag)

Definíció:

Adott: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *n* elemű alapsokaság metrikus skálán. Ekkor az x_i ismérvértékek **számtani átlaga**:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Példa:

Petiék biciklitáborban vesznek részt. Minden nap mérik a megtett távolságot, ami hétfőn 10 km, kedden 12, majd szerdán 16, csütörtökön 12, míg pénteken 17 km. Otthon kiszámolják, hogy ezen értékek számtani átlaga:

$$\bar{x} = \frac{10+12+16+12+17}{5} = \frac{67}{5} = 13{,}4$$
.

Azaz naponta átlag 13,4 kilométert tettek meg.

Megjegyzés:

Mivel ez az átlagfajta a legközismertebb, a mindennapokban gyakran elhagyják előle a számtani jelzőt.

Definíció:

Számtani átlagot nemcsak az egyenként ismert x_i adatokból, hanem **gyakorisági sorból** is számíthatunk. Ekkor:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\underbrace{(x_1 + \ldots + x_1)}_{f_1} + \underbrace{(x_2 + \ldots + x_2)}_{f_2} + \ldots + \underbrace{(x_k + \ldots + x_k)}_{f_k}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_k f_k)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

ahol f_i az i-edik osztály gyakorisága, x_i az i-edik osztályhoz tartozó egyetlen ismérvérték.

Osztályozott gyakorisági eloszlások esetén:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i' f_i$$

Ekkor x_i' az i-edik osztály közepe.

A számtani átlag számításához **relatív gyakoriságok** is használhatók:

$$g_i = \frac{f_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1$$

g_i: abszolút gyakoriság

f_i: relatív gyakoriság

Ekkor a számtani átlag:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i$$

Példa:

Egy vállalatnál felmérték az alkalmazottak, összesen 250 ember éves keresetét.

Ezen ismérv alapján 10 osztályt alkottak, így számolták ki az átlagkeresetet.

osztály	Kereset (eFt/év)	f_i	x_i'	$x_i' \cdot f_i$	g_i	$x_i' \cdot g_i$
1.	500-799	6	650	3900	0,024	15,6
2.	800-1099	13	950	12350	0,052	49,4
3.	1100-1399	22	1250	27500	0,088	110
4.	1400-1699	32	1550	49600	0,128	198,4
5.	1700-1999	40	1850	74000	0,16	296
7.	2000-2299	42	2150	90300	0,168	361,2
7.	2300-2599	39	2450	95550	0,156	382,2
8.	2600-2899	31	2750	85250	0,124	341
9.	2900-3199	20	3050	61000	0,08	244
10.	3200-3499	5	3350	16750	0,02	67
$\sum$		N=250		516200	1	2064,6

Vagyis az egy dolgozóra jutó éves átlagkereset 2064,4 ezer Ft.

Definíció:

Súlyozott számtani középérték:

$$\overline{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_k}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

ahol: w_i -k az x_i értékekhez tartozó súlyszámok. Az x_i -k egymás közötti arányait szemléltetik.

Példa:

Egy vizsgán az írásbelin szerzett pontszámokat háromszoros, míg a szóbelin és a teszten elért pontokat egyszeres súlyozással veszik figyelembe. Az egyik tanuló írásbelin 85, szóbelin 70, míg a teszten 90 pontot szerzett. A végső jegynél az

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 85 + 1 \cdot 70 + 1 \cdot 90}{3 + 1 + 1} = 83$$

pontszámot veszik figyelembe.

Tétel:

A számtani átlag tulajdonságai:

1. Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatok esetén a $d_i = x_i - \overline{x}$ előjeles hibák összességében kiegyenlítik egymást:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x} = n\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - n\overline{x} = n\overline{x} - n\overline{x} = 0$$

1. $(x_i - a)^2$ eltérésnégyzet-összeg akkor minimális, ha $a = \overline{x}$. Azaz fennáll az

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 < \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$$

egyenlőtlenség, minden olyan esetben, amikor $a \neq \overline{x}$.

Bizonyítás:

Vegyük az $f(a) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ függvényt! Ennek *'a'* szerinti első deriváltját nullával egyenlővé téve szélsőérték-helyet kapunk, ami pont $\overline{x}$:

$$f'(a) = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot a = 0$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

A második derivált: $f''_{(a)} = 2n > 0$, tehát a függvény az $\overline{x}$ pontban veszi fel minimum-értékét.

1. Adottak az x_i ismérvértékek $\overline{x}$ számtani átlaggal. Ekkor $x_i^* = \beta x_i + \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$ lineárisan transzformált ismérvértékek $\overline{x}^*$ számtani átlaga és az eredeti $\overline{x}$ átlag között igazolható a következő összefüggés:

$$\overline{x}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta x_i + \alpha)}{n} = \frac{\beta\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n \cdot \alpha}{n} = \beta\overline{x} + \alpha$$

1. Ismerjük két részsokaság adatait:

${}_1x_i \quad (i = 1,2,\ldots,n_1)$, átlaga ${}_1\overline{x}$

${}_2x_i \quad (i = 1,2,\ldots,n_2)$, átlaga ${}_2\overline{x}$

Ekkor ${}_1x_i$ és ${}_2x_i$ elemekből álló egyesített sokaság átlaga:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1 + n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} {}_1x_i + \sum_{i=1}^{n_2} {}_2x_i\right) = \frac{n_1 \cdot {}_1\bar{x} + n_2 \cdot {}_2\bar{x}}{n_1 + n_2}$$

Példa 1:

Átlag 250 km-t megyünk bérelt kocsinkkal naponta. Mennyibe kerül átlagosan az autókölcsönzés, ha az autókölcsönző naponta 4400 Ft fix díjat, valamint megtett km-enként 40 Ft-ot számol fel?

Az alapsokaság ekkor x_i : az egyes napokon megtett út.

α =4400 Ft (fix díj)

β =40 Ft/km (benzinpénz)

$\bar{x} = 250\text{km}$ (átlag 250 km-t megyünk naponta)

A 3. tulajdonság alapján:

$\bar{x}^* = 40\frac{Ft}{km} \cdot 250km + 4400Ft = 14400Ft$. Ennyit fizetünk a kölcsönzőnek átlagosan naponta.

Példa 2:

Egy négyszáz fős üzemben az átlagkereset 29200 Ft. Egy másik üzemben 300 fő dolgozik, az ő átlagkeresetük 40100Ft.

A 4. tulajdonság alapján együttesen a két üzemben dolgozók átlagosan

$\bar{x} = \frac{400 \cdot 29200 + 300 \cdot 40120}{400 + 300}$ =33880 Ft-ot keresnek.

Megjegyzés:

A számtani közép nem mindig jó jellemzője egy sokaságnak, mivel nagyon érzékeny a kiugró értékekre. Például, ha egy 10 fős csoport 9 tagja 40000 Ft-ot keres,1 pedig 400000 Ft-ot, a csoport átlagkeresete 76000 Ft:

$$\bar{x} = 400000.9 + 4000000.1 = 7600($$

Ennek kiküszöbölésére alkalmazzák a **robusztus becslést** (trimmed mean), amikor a legkisebb és legnagyobb számot elhagyják az átlagolásnál.

4. 2.4 Medián (középső érték)

Definíció:

A **medián** rendezett mintában az a középső ismérvérték, amelyiknél az összes adat fele kisebb, fele nagyobb.

Meghatározásának feltétele, hogy létezzen legalább ordinális skála**.** Ekkor rangsoroljuk az adatokat:

$$x_1^* \le x_2^* \le \ldots \le x_n^*$$

A medián értéke

ha *n* páratlan: $m_e = x^*_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$

ha n páros: $m_e = \frac{1}{2}\left(x^*_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x^*_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}\right)$

Példa:

10, 12, 12, 16, 17 értékek esetén, ahol a minta nagysága páratlan (5): $m_e = x_{\left[\frac{5+1}{2}\right]} = x_3^* = 12$

Tétel:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - m_e| < \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$$

Azaz, ha minden ismérvértéket a mediánnal helyettesítenénk, akkor ezzel összességében a legkisebb hibát követnénk el.

Definíció:

Osztályozott adatokból kiindulva a mediánt a következő formulával becsülhetjük:

$$m_e = x_i^a + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \Delta x$$

ahol i azon legelső osztályköz sorszáma, melyre $F_i > \frac{n}{2}$

x_i^a : az i-edik osztályköz alsó határa

F_i: a kumulált gyakorisági sor i-edik eleme.

Megjegyzés:

A medián mindig egyértelműen meghatározható, mert bármilyenek is az ismérvértékek, mindig található közöttük egy vagy több középső, ha azokat rangsorba rendezzük. Ha a rangsorban nagyon sok egyforma érték szerepel, akkor nem tanácsos használni, mert kevéssé illik rá a definíció.

5. 2.5 Módusz

Definíció:

A **módusz** a leggyakoribb érték a sokaságban.

Diszkrét ismérvérték esetén a módusz a leggyakrabban előforduló ismérvérték, folytonos ismérv esetén pedig a gyakorisági görbe maximumhelye.

A módusz csak abban az esetben határozható meg, ha létezik legalább nominális skála.

Folytonos ismérv esetén a módusz értéke csakis valamilyen osztályközös gyakorisági sorból kiindulva közelíthető, az alábbi formulával becsülhető:

$$m_o = x_i^a + \frac{f_i - f_{i-1}}{f_i - f_{i-1} + f_i - f_{i+1}} \cdot \Delta x$$

Ekkor *'i'* a leggyakoribb osztály sorszáma, Δx az osztályköz hosszúsága.

A meghatározáskor e képletet használva fontos, hogy az osztályközök azonos hosszúságúak legyenek.

Ha a módusz a legalsó vagy a legfelső osztályközbe esik, akkor a képletbe $f_i - f_{i-1} = 0$ vagy $f_i - f_{i+1} = 0$ kerül.

Megjegyzés:

A módusz nem mindig határozható meg egyértelműen, sőt nem is mindig létezik.

6. 2.6 Egyéb átlagfajták

1. **Geometriai közép:**

- diszkrét adatok esetén: $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots\ldots x_n}$
- gyakorisági adatok esetén: $G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \ldots\ldots x_n^{f_k}}$ $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

A geometriai átlag kiszámításának gyakorlati módja az alábbi:

$$\lg G = \frac{1}{n}(\lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n)$$

$$\lg G = \frac{1}{n}(f_1 \cdot \lg x_1 + f_2 \cdot \lg x_2 + \ldots + f_k \cdot \lg x_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot \lg x_i$$

1. **Harmonikus átlag:**

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \quad x_i \neq 0$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

1. **Négyzetes átlag:**

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

A harmonikus, mértani és négyzetes átlag általában olyan esetekben használható, amikor nem az ismérvértékek összegének, hanem az azok négyzetösszegének, szorzatának, reciprokaiból képzett összegnek van valamilyen kézzelfogható értelme.

Például mértani átlagot könnyen számolunk láncviszonyszámokból, hiszen azok szorzata egy bázisviszonyszám.

Tétel:

A négy átlag közötti összefüggés a következő:

$$x_{\min} \leq H \leq G \leq \overline{x} \leq RMS \leq x_{\max}$$

Tétel:

A számtani átlag, a módusz és a medián közötti összefüggés: $|\bar{x} - m_o| = 3|\bar{x} - m_e|$

7. 2.7 Kvantilisek

Az osztályozás során nemcsak egyenlő hosszúságú, hanem egyenlő gyakoriságú osztályközök képzését is célul tűzhetjük ki.

Példa:

36 lakást ajánlottak az ingatlanközvetítő irodában. 6 napunk van a választásra, valamint minden nap 6 lakást akarunk megnézni, a könnyebb összehasonlítás kedvéért hasonló árúakat. Mondjuk, a legalacsonyabb árut tekintjük meg először és haladunk az egyre drágábbak felé.

Feltehetjük a következő kérdéseket:

Melyik a 6 legolcsóbb lakás?

A harmadik nap megnézett lakások árai milyen értékhatárokon belül mozognak?

Ekkor tulajdonképp a hatodrendű kvantiliseket adjuk meg.

Az osztályközök képzésénél a meghatározott osztópontokat p-ed rendű kvantilis értékeknek nevezzük.

Definíció:

A *p*-**ed rendű kvantilis** az a szám, amelynél az összes előforduló ismérvérték *p*-ed része nem nagyobb, (*1*-*p*)-ed része nem kisebb. Például az $x_{\frac{2}{5}}$ kvantilis esetében az adatok 40%-a nem nagyobb, 60%-a nem kisebb a meghatározott kvantilisnél.

Meghatározásánál fontos az adatok sorrendbe való rendezése.

Megkülönböztetett kvantilisek:

1. **Medián** (m_e): két egyenlő gyakoriságú részre osztja a sokaságot.
2. **Kvartilisek** (Q_1 ,Q_2 , Q_3): a 3 kvartilis négy egyenlő gyakoriságú részre osztja a rendezett halmazt.
3. **Kvintilis** (K_1 ,K_2 ,K_3 ,K_4): öt egyenlő rész
4. **Decilis** (D_1 ,D_2 ,...,D_8 ,D_9): 10 egyenlő rész
5. **Percentilis** (P_1 ,P_2 ,P_3 ,...,P_{98} ,P_{99}): 100 egyenlő rész

A definícióból egyértelműen következik, hogy például $Q_2 = m_e = D_5$, vagy például $P_{25} = Q_1$.

8. 2.8 A szóródás mérőszámai

Definíció:

A **szóródás** azonos típusú számszerű adatok különbözőségét jelenti. Ezek az adatok vagy egymáshoz képest különböznek, vagy egy meghatározott értéktől térnek el.

A legfontosabb szóródási mérőszámok:

1. szórás

2. relatív szórás
3. átlagos eltérés
4. terjedelem
5. Interkvartilis terjedelem

8.1. 2.8.1 A szórás

Definíció:

Legyen adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alapsokaság egy mintája metrikus skálán.

A **szórás** az egyes értékek számtani átlagtól vett eltéréseinek négyzetes átlaga, vagyis megmutatja, hogy az ismérvértékek mennyivel térnek el átlagosan az átlagtól.

A szórás a legfontosabb szóródási mérőszám.

Mértékegysége megegyezik az alapadatok mértékegységével.

Tapasztalati (empirikus) szórásnégyzet:

A mintaközéptől vett eltérések négyzetének átlaga:

$$s_n^2 = \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}$$

Korrigált tapasztalati szórásnégyzet:

$$s_n^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} s_n^2$$

Variációs tényező (relatív szórás):

Azt mutatja meg, hogy a szórás az átlagnak hányad része. Százalékos mutató.

Értelmezése: az egyes ismérvértékek átlagosan hány százalékkal térnek el az átlagtól.

$$V = \frac{s_n}{\bar{x}} \cdot 100$$

A szórás meghatározása gyakorisági eloszlás esetén:

Legyenek az x_i értékekhez tartozó gyakorisági értékek f_i, relatív gyakoriságok pedig g_i ($i=1,2,\ldots,n$).

Ekkor a szórás a következő összefüggésekből számolható:

$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2$ ahol $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$; $i=1,2,\ldots k$; $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

$s^2 = \sum_{i=1}^{k} g_i(x_i - \bar{x})^2$ ahol $g_i = \frac{f_i}{N}$; $i=1,2,\ldots k$; $0 \le g_i \le 1$; $\sum_{i=1}^{k} g_i = 1$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{k} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \sum_{1}^{k} g_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

8.2. 2.8.2 Átlagos eltérés (MAD: Mean Absolute Deviation) – Közepes abszolút eltérés

Definíció:

Az átlagtól vett (számtani) átlagos (abszolút) eltérés nagysága: $MAD = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$

$$MAD \approx \frac{4}{5}S$$

Gyakorisági eloszlásokra:

$$MAD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\left|x_i - \bar{x}\right| = \sum_{i=1}^{k} g_i\left|x_i - \bar{x}\right|$$

8.3. 2.8.3 Terjedelem (Range)

Legalább rang skála esetén számítható.

A minta terjedelem az előforduló legnagyobb és legkisebb ismérvérték különbsége, azaz az intervallum teljes hossza.

A mutató kifejezi, hogy mekkora értékközben ingadoznak az ismérv értékei.

$$R = x^*_{\max} - x^*_{\min}$$

8.4. 2.8.4 Interkvartilis terjedelem Legalább rang skála esetén számítható.

A minta terjedelem a felső (harmadik) kvartilis és az alsó (első) kvartilis különbsége, azaz az intervallum középső ötven százalékának hossza.

A mutató kifejezi, hogy mekkora értékközben ingadoznak az ismérv középső ötven százalékának értékei.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

9. 2.9 Összefoglalás

1. Az Express újságban 1995. 10. 04.-én eladásra kínált 70 m2 körüli lakások ára (mFt):

2.0, 4.0, 3.1, 3.4, 4.2, 6.0, 3.6, 3.1, 2.6, 3.3, 3.4, 3.5, 2.4, 3.2, 3.8, 3.1, 5.3, 2.5, 3.6, 3.0, 3.5, 3.5, 4.1.

a. Határozza meg az adatok számtani közepét, mediánját, móduszát!

b. Számítsa ki és értelmezze a szóródási, valamint a ferdeségi mutatószámot, a csúcsossági mutatószámot!

1. 48 db eladásra kínált lakás megoszlása a kínálati ár szerint

Ár (mFt)	Lakások száma (db)
2.0-2.9	6
3.0-3.9	19
4.0-4.9	11
5.0-5.9	6
6.0-6.9	3
7.0-7.9	3
Összesen	48

Számítsa ki és értelmezze a helyzetmutatókat (átlag, módusz, medián)!

1. Egy iparág vállalataira vonatkozóan az alábbi adatokat ismerjük:

Létszám (fő)	Vállalatok száma
- 500	10
501 - 1000	15
1001 - 1500	21
1501 - 2000	9
2001 - 2500	3
2501 -	2
Összesen	60

Számítsa ki és értelmezze a helyzetmutatókat (átlag, módusz, medián), a szóródási mutatókat, a ferdeségi mutatókat és a csúcsosságot!

1. Egy közúti forgalom-ellenőrzés során 1000 személygépkocsi lépte túl a megengedett sebességet. A túllépés mértéke:

Sebességtúllépés (km/h)	Gépkocsik száma (db)
1 - 10	50
11 - 20	250
21 - 30	380
31 - 40	170

41 - 50	80
51 - 60	40
61 - 70	20
71 -	10
Összesen	1000

Számítsa ki és értelmezze a helyzetmutatókat (átlag, módusz, medián)!

1. Egy közkedvelt gyorsétterem-hálózat egyik egységében megfigyelték a kiszolgálási időt (mp):

45	48	49	56	61	66	66	66	70	72
72	75	78	79	81	81	83	95	102	135

a. Határozza meg az adatok átlagát, mediánját, móduszát!

b. Határozza meg ugyanezen értékeket osztályozással is!

1. A 18 éves fiúk körében kísérleti jelleggel intelligenciateszteket végeztek. A vizsgálathoz felkért 19 főnél az alábbi intelligencia-értékeket (IQ) mértek:

141	65	75	100	99	96	89	82	101	110

104	119	107	103	114	104	130	122	58	

a. Határozza meg az adatok átlagát, mediánját, móduszát!

b. Határozza meg ugyanezen értékeket osztályozással is!

Irodalomjegyzék

Csanády V, Horváth R, Szalay L : *Matematikai statisztika,* EFE Matematikai Intézet, Sopron, 1995

Hunyadi - Vita : *Statisztika közgazdászoknak,* KSH, Budapest, 2002

Keresztély-Sugár-Szarvas: *Statisztika példatár közgazdászoknak,* BKE, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005

Korpás A: *Általános statisztika I-II.,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996

Obádovics J Gy: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika,* Scolars Kiadó, Budapest, 2003

Reimann J, - Tóth J: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991

Závoti-Polgárné-Bischof: *Statisztikai képletgyűjtemény és táblázatok,* NYME Kiadó, Sopron, 2009