Matematikai geodéziai számítások 4.

Vetületi átszámítások

Dr. Bácsatyai, László

Matematikai geodéziai számítások 4.: Vetületi átszámítások

Dr. Bácsatyai, László
Lektor: Dr. Benedek, Judit

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Kivonat

Ez a modul bemutatja: adott (hallgatónként különböző) helységet magában foglaló 1:100000 méretarányú EOV szelvény sarokponti koordinátáinak átszámítását sztereografikus, henger- és UTM vetületekbe; lineármodulus és vetületi meridiánkonvergencia-számítást a sarokpontokban; az adott helységhez közeli OGPSH pont alapján az EOV (HD-72) és a WGS84 rendszer közötti 7 paraméteres transzformáció paramétereinek meghatározását és a számított paraméterekkel egyik rendszerből a másik rendszerbe történő átszámítást.

Tartalom

4. fejezet - Vetületi átszámítások

1. 4.1 A feladat megfogalmazása

Számítsa át a megadott helységet magában foglaló 1:100000 méretarányú EOV szelvény sarokpontjainak koordinátáit

- Sztereografikus,
- HKR,
- UTM vetületbe!

Az UTM vetületnél a 15^{o}, 18^{o} és 21^{o} kezdő-meridiánú sávok közül a helységhez legközelebb eső sávot válassza! Dokumentálja az eredményeket grafikusan is. A sztereografikus és a HKR vetületekbe való átszámításhoz a HungaPro 3.18., az UTM vetületbe való átszámításhoz a HungaPro 3.31. verzióját használja!

A VETULET (Bácsatyai, 1993) programmal mindhárom vetületben számítsa ki a sarokpontokban a lineármodulust és a vetületi meridiánkonvergenciát! Hasonlítsa össze a kapott értékeket!

A megadott 24 OGPSH pontból a helységhez legközelebb eső 5 OGPSH pont alapján határozza meg az EOV (IUGG/1967) és a WGS84 rendszer közötti 7 paraméteres transzformáció paramétereit! A meghatározott paraméterekkel számítsa ki 3, a helység környezetében lévő EOV-koordinátákkal rendelkező pont WGS84 ellipszoidi felületi koordinátáit! A számításhoz használja a HungaPro 4.18. verzióját!

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A használt programok és az átszámítás szöveges és grafikus dokumentációja
- A VETULET program eredményeinek (lineármodulusok és a vetületi meridián-konvergenciák számítási képletei, eredmények) dokumentálása, az eredmények szöveges értékelése, összehasonlítása
- A 7 paraméteres transzformáció programjának és eredményeinek dokumentációja.

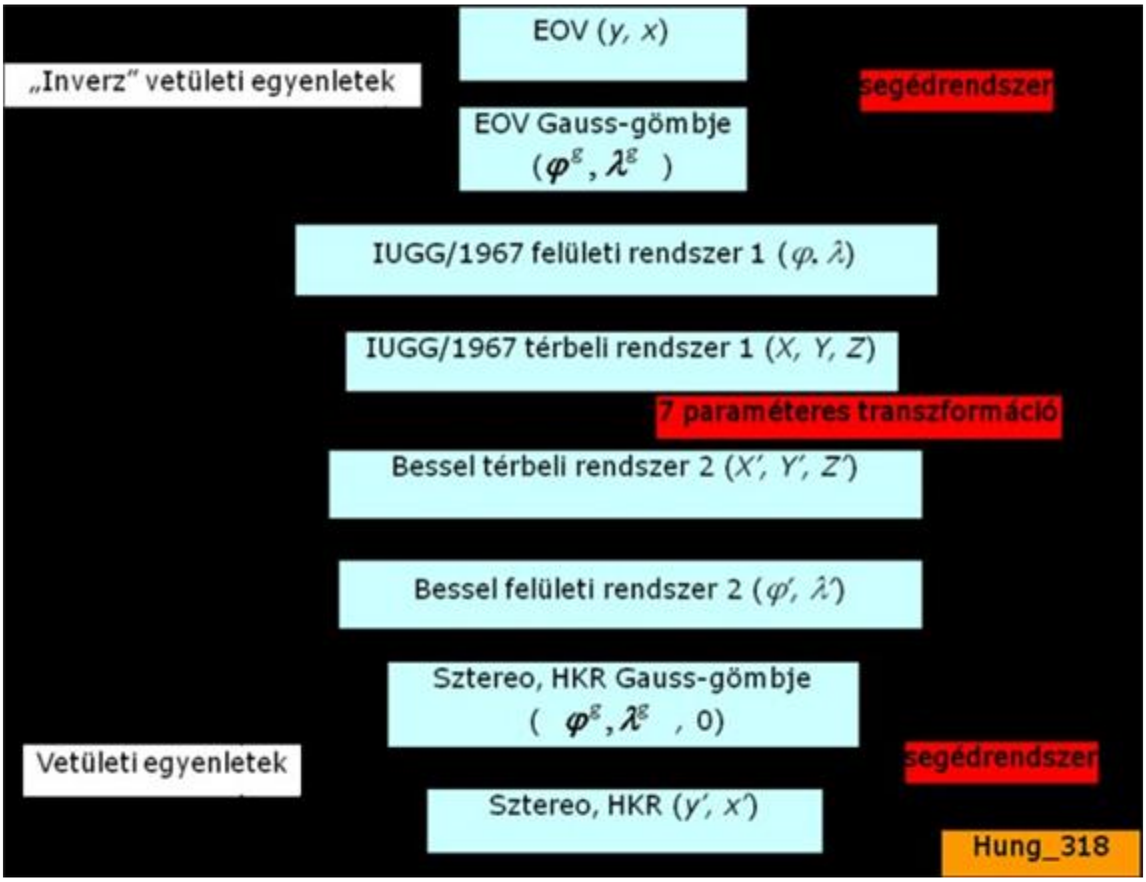
A feladatot kézírásos formában vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

2. 4.2 Az átszámítások sémái, képletei

A feladatok megoldása előtt szükséges a Vetülettan jegyzet „Átszámítások vetületi rendszerek között" fejezetének

(http://www.geo.info.hu/geodezia/dokumentumok/geod-vettan/vetulettan.pdf, 69-72. old.), valamint a Hung_318, Hung_331 és a Hung_418 szoftverek szöveges leírásának tanulmányozása.

2.1. 4.2.1 Átszámítási séma az EOV és a történelmi Magyarország vetületei között



Jelölések:

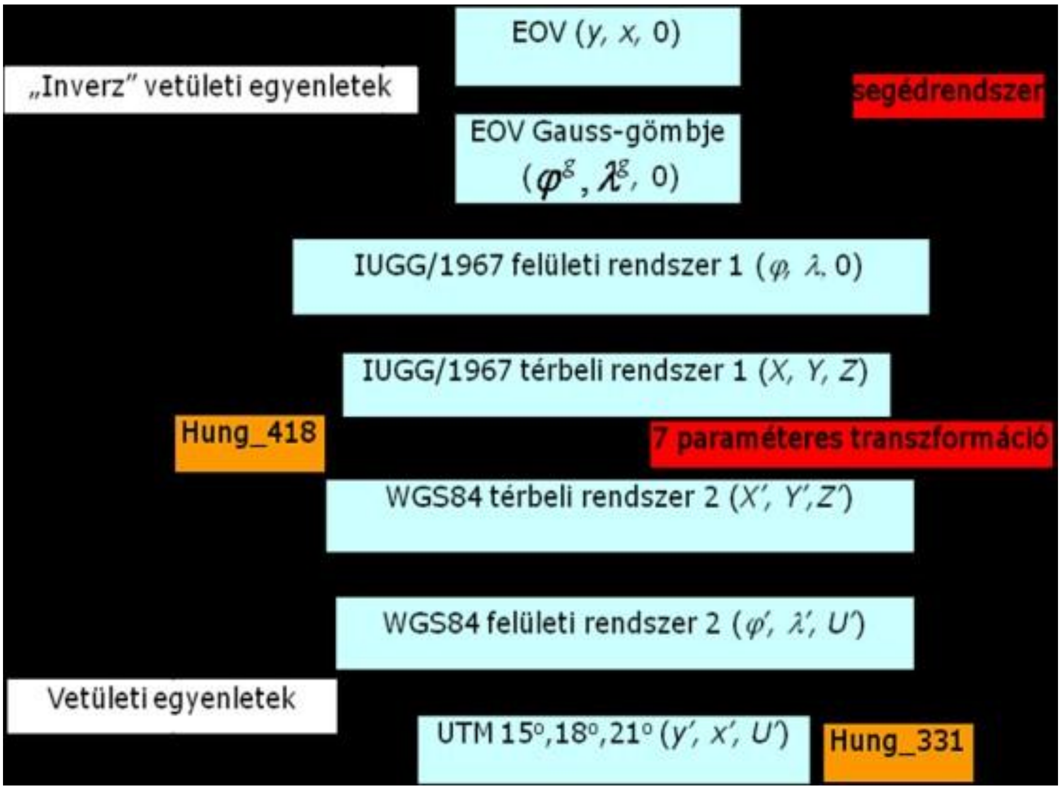
ϕ, λ, ϕ', λ' - ellipszoidi felületi koordináták az IUGG/1967, ill. a Bessel ellipszoidon,

ϕ^g, λ^g – gömbi földrajzi szélesség és hosszúság,

X, Y, Z, X', Y', Z' – ellipszoidi térbeli koordináták az IUGG/1967, ill. a Bessel ellipszoidon,

y, x, y', x' – vetületi koordináták az EOV, ill. a sztereografikus és HKR rendszerben.

2.2. 4.2.2 Átszámítási séma az EOV és az UTM vetületek között



Jelölések:

ϕ, λ, ϕ', λ' - ellipszoidi felületi koordináták az IUGG/1967, ill. a WGS84 ellipszoidon,

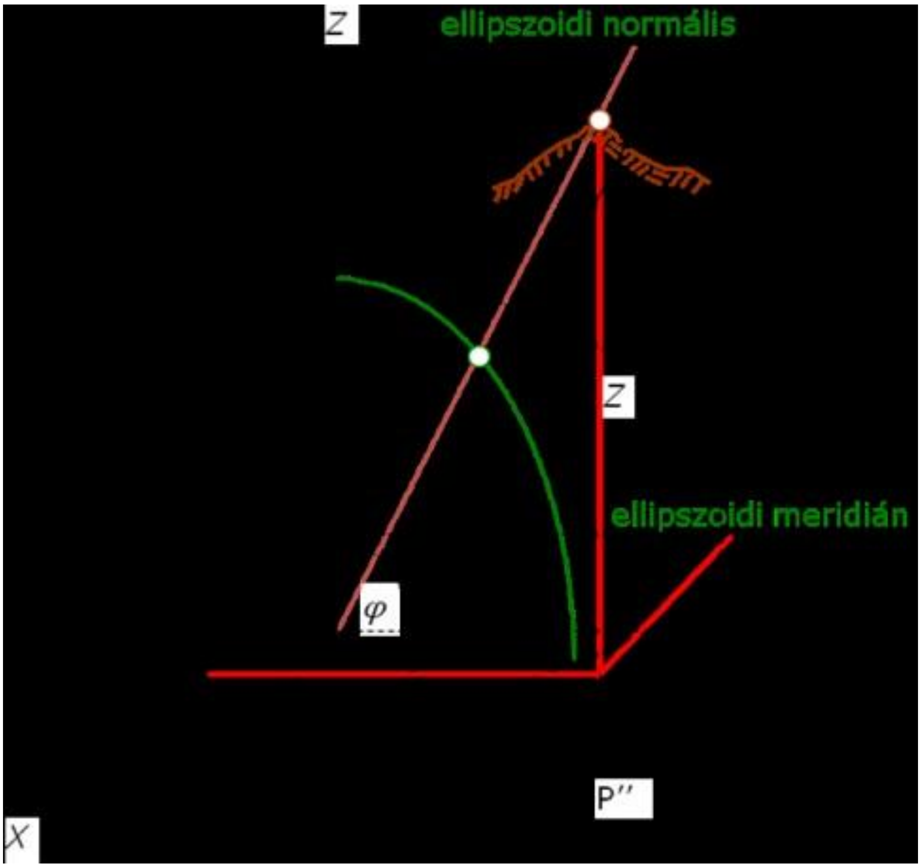
ϕ^g, λ^g – gömbi földrajzi szélesség és hosszúság,

X, Y, Z, X', Y', Z' – ellipszoidi térbeli koordináták az IUGG/1967, ill. a WGS84 ellipszoidon,

y, x, y', x' – vetületi koordináták az EOV, ill. az UTM vetületi rendszerben.

U' - geoidunduláció

2.3. 4.2.3 Átszámítások ellipszoidi felületi és ellipszoidi térbeli koordináták között (ábra és képletek)



Ellipszoidi felületi rendszerből ellipszoidi térbeli rendszerbe:

$$X = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda,$$
$$Y = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda,$$
$$Z = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + h\right) \cdot \sin\varphi.$$

Ellipszoidi térbeli rendszerből ellipszoidi felületi rendszerbe:

$$\varphi = \arctan\frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot \sin^3\vartheta}{p - e^2 \cdot a \cdot \cos^3\vartheta}$$
$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$
$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\varphi} - N$$

Jelölések:

ϕ, λ - ellipszoidi felületi koordináták,

h – ellipszoidi magasság, esetünkben *h* = 0,

a – az ellipszoid fél nagytengelye,

b – az ellipszoid fél kistengelye,

$N = \dfrac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$ – harántgörbületi sugár,

$e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ – első numerikus excentricitás négyzete,

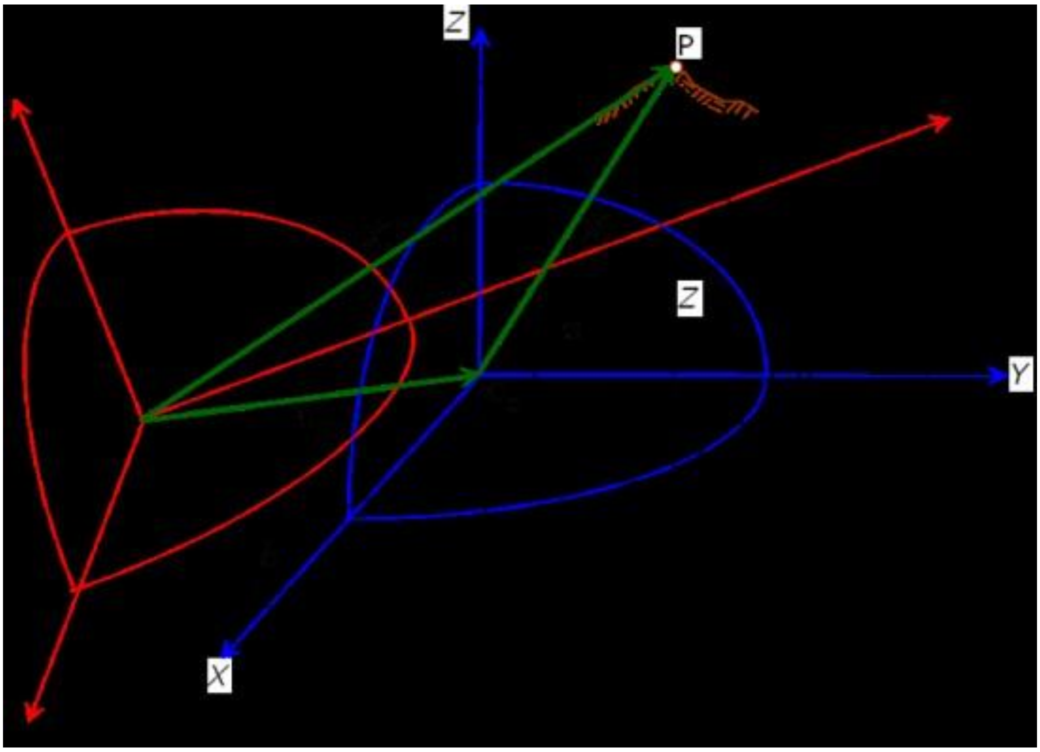
X, Y, Z – ellipszoidi térbeli koordináták.,

$p = \sqrt{X^2 + Y^2}$ - segédmennyiség,

$e'^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$ – második numerikus excentricitás négyzete,

$\vartheta = \arctan\dfrac{Z \cdot a}{p \cdot b}$ - segédmennyiség.

2.4. 4.2.4 A 7 paraméteres transzformáció (ábra és képletek)



A 7 paraméteres transzformáció képlete:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{a}_0 + (1+\kappa)\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{X} \quad (1)$$

Jelölések:

$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ - a pont térbeli koordinátái a transzformált és az eredeti koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$ - az eltolásvektor három paramétere,

$1+\kappa=\upsilon$ - a méretaránytényező (κ – méretaránykülönbség),

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$ - forgatási mátrix[1].

A forgatási mátrix elemei:

$$R_{12} = \cos\beta \cdot \sin\gamma$$
$$R_{13} = -\sin\beta$$
$$R_{21} = -\cos\alpha \cdot \sin\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$$
$$R_{22} = \cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$
$$R_{23} = \sin\alpha \cdot \cos\beta$$
$$R_{31} = \sin\alpha \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$$
$$R_{32} = -\sin\alpha \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$
$$R_{33} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

α, β, γ – a forgatási szögek.

A transzformáció végrehajtása során kihasználjuk, hogy az elforgatási szögek kicsik (általában néhány szögmásodperc nagyságrendűek) és méretarány-tényező az 1-től csak csekély mértékben tér el, az (1) vektoregyenletet linearizáljuk.

Kis szögek esetén ($\cos\alpha \approx \cos\beta \approx \cos\gamma = 1$, $\sin\alpha \approx \mathrm{d}\alpha$, $\sin\beta \approx \mathrm{d}\beta$, $\sin\gamma \approx \mathrm{d}\gamma$) a forgatási mátrix:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{d}\gamma & -\mathrm{d}\beta \\ -\mathrm{d}\gamma & 1 & \mathrm{d}\alpha \\ \mathrm{d}\beta & -\mathrm{d}\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

A 7 paraméter meghatározásához legalább 7 egyenletre van szükség, melyet biztosít 2 közös pont és 1 pont valamelyik koordinátájának ismerete a két rendszerben. Általában célszerű legalább 3 közös pontot ismerni, ami összesen 9 egyenletet jelent. A két (vagy több pont esetén több) fölös adat a gyakorlatban azt jelenti, hogy a paramétereket kiegyenlítéssel kell meghatározni.

A kiegyenlítés eredményeként megbecsülhetjük a transzformáció pontosságát is. Ez döntően a közös pontok területi kiterjedésétől függ. Kis kiterjedésű területen végzett ún. lokális transzformáció – a pontok számától gyakorlatilag függetlenül – mindig pontosabb, mint a nagyobb, pl. országos viszonylatban végzett transzformáció.

[1] A forgatás sorrendje a Z, Y és X körüli forgatás, akkor R=R1(α)*R2(β)*R3(δ), ahol R1, R2, R3 rendre az X, Y, Z tengelyek körüli forgatáshoz tartozó mátrixok.

A közös pontok alapján a Hung_418 szoftverrel végzett kiegyenlítésből megkapjuk a 7 paramétert:

$$\underset{(7)}{\mathbf{x}} = (a_0 \;\; b_0 \;\; c_0 \;\; \kappa \;\; \mathrm{d}\alpha \;\; \mathrm{d}\beta \;\; \mathrm{d}\gamma)^{\mathrm{T}}$$
.

A képletben a $^{\mathrm{T}}$ betű transzponált mátrixot jelöl.

2.5. 4.2.5 Lineármodulus és meridiánkonvergencia

Mind a lineármodulus, mind a vetületi meridiánkonvergencia meghatározható a földrajzi és a vetületi koordináták alapján is. Az összefüggések vetületenként változnak.

Lineármodulus:

Sztereografikus vetület (vetületi koordinátákból):

$$l = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4 \cdot R^2}$$
,

x és *y* a sztereografikus vetületi koordináták, *R* a Gauss-gömb sugara:

R = 6378512,966 m

Hengervetület Középső Rendszer – HKR (Gauss-gömbi földrajzi szélességből a segédrendszerben):

$$l = \frac{1}{\cos \varphi^{g'}}$$

$\varphi^{g'}$ - a segédföldrajzi szélesség.

Egységes Országos Vetület (Gauss-gömbi földrajzi szélességből a segédrendszerben):

$$l = \frac{m_0}{\cos \varphi^{g'}}$$

$\varphi^{g'}$ - a segédföldrajzi szélesség, m_0=0,99993 a redukálás mértéke.

UTM Vetület (vetületi koordinátából):

$$l = m_0 \left(1 + \frac{y^2}{2 \cdot R_{01}^2}\right)$$

R_{01} - a közép-meridián mentén értelmezett átlagos földgörbületi sugár a redukált ellipszoidon, m_0=0,9996 a redukálás mértéke.

Vetületi meridiánkonvergencia:

Sztereografikus vetület (vetületi koordinátákból):

$$\sin \mu = y \cdot \frac{4 \cdot R \cdot \sin \varphi_K - 2 \cdot x \cdot \cos \varphi_K}{\sqrt{(4 \cdot R^2 \cdot \cos \varphi_K - d^2 \cdot \cos \varphi_K + 4 \cdot R \cdot x \cdot \sin \varphi_K)^2 + 16 \cdot R^2 \cdot y^2}}$$

y, *x* – vetületi koordináták, $\varphi_K = 47°26'21{,}1372''$ $R = 6378512{,}966\,\mathrm{m}$ budapesti sztereografikus vetület kezdőpontjának Gauss-gömbi földrajzi szélessége, - a Gauss-gömb sugara.

Hengervetület Középső Rendszer – HKR (Gauss-gömbi földrajzi koordinátákból):

$$\tan\mu = \frac{\sin\varphi_K \cdot \sin\lambda}{\cos\varphi_K \cdot \cos\varphi + \sin\varphi_K \cdot \sin\varphi \cdot \cos\lambda}$$

$\varphi_K = 47°06'00''$ - a HKR kezdőpontjának Gauss-gömbi földrajzi szélessége,

ϕ és λ – Gauss-gömbi földrajzi koordináták.

Egységes Országos Vetület (a Gauss-gömbi földrajzi koordinátákból történő számítás képlete megegyezik a hengervetületre vonatkozó képlettel):

$$\tan\mu = \frac{\sin\varphi_K \cdot \sin\lambda}{\cos\varphi_K \cdot \cos\varphi + \sin\varphi_K \cdot \sin\varphi \cdot \cos\lambda}$$

$\varphi_K = 47°06'00{,}0000''$ - az EOV kezdőpontjának Gauss-gömbi koordinátái,

ϕ és λ –földrajzi koordináták az EOV Gauss-gömbjén,

Az EOV Gauss-gömbjének sugara: $R = 6379743{,}001\,\mathrm{m}$.

UTM Vetület (ellipszoidi földrajzi koordinátákból):

$$\mu = L\cdot\sin\varphi + \frac{L^3}{3}\cdot\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\left(1 + 3\cdot\eta^2 + 2\cdot\eta^4\right) + \frac{L^5}{15}\cdot\sin\varphi\cdot\cos^4\varphi\cdot\left(2 - \tan^2\varphi\right)$$

ϕ – ellipszoidi földrajzi szélesség,

$L = \lambda - \lambda_0$ - a közép-meridiántól számított, attól keletre pozitív, nyugatra negatív előjelű ellipszoidi földrajzi hosszúság,

$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2\varphi$, ahol e' - második numerikus excentricitás.

2.6. 4.2.6 Számpélda

Vetületi számítások

1. Sarokpontok koordinátáinak számítása

Helység: Kiskunhalas

Az 1:100 000 méretarányú EOV szelvényszám: *26*

A szelvény sarokpontjainak számozása:

4 3

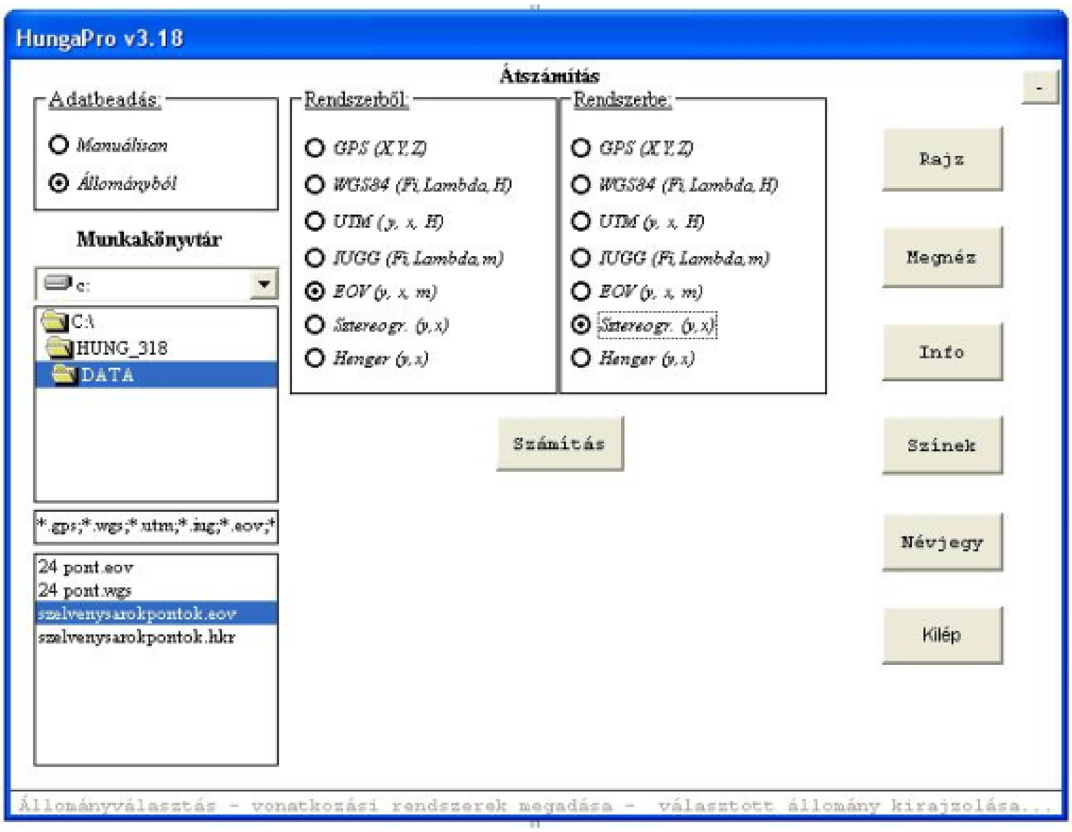
26

1 2

A szelvény sarokpontjainak EOV koordinátái:

Sarokpont száma	*Y* (m)	*X* (m)
1	672000	96000
2	720000	96000
3	720000	128000
4	672000	128000

A sarokpontok sztereografikus, HKR és UTM vetületi koordinátáinak számítása a HungaPro v3.18 program segítségével történt:



A számítás eredményei:

S.p. száma	Sztereografikus vetület		HKR		UTM vetület		
	y (m)	*x* (m)	*y* (m)	*x* (m)	*y* (m)	*x* (m)	*U* (m)
1	-21995,44	142118,71	-22000,07	104354,27	102792,76	5118042,94	43,63
2	-69999,02	142122,34	-70003,44	104354,59	150775,85	5118671,28	43,15

3	-70001,60	110119,15	-70003,63	72352,41	150356,87	5150663,66	42,97
4	-21996,90	110116,11	-22000,09	72351,81	102370,61	5150030,53	43,48

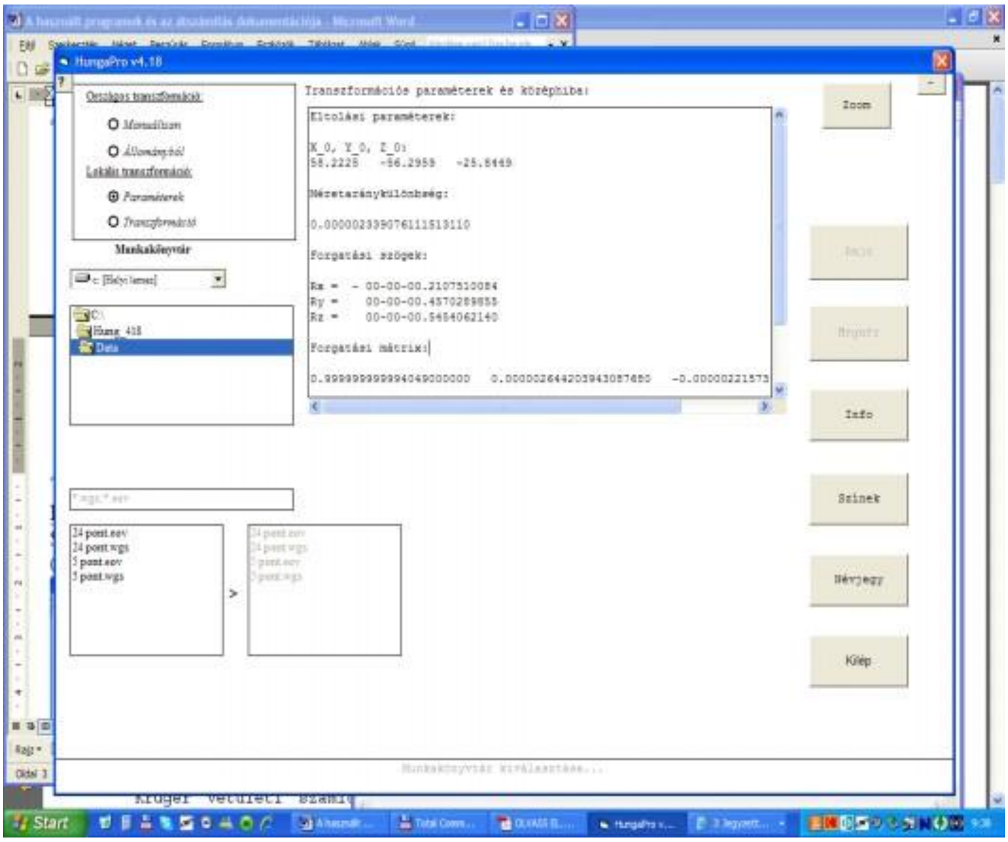
A táblázat utolsó oszlopa a – szintén a HungaPro v3.18 programmal számítható - WGS84 ellipszoidhoz viszonyított geoidundulációkat tartalmazza.

A sarokpontok koordinátái ’szelvénysarokpontok.eov’, ’szelvénysarokpontok.szt’, ’szelvénysarokpontok.hkr’ és ’szelvénysarokpontok.utm’ nevű fájlokban a számítási folyamat gyorsítása érdekében tárolásra is kerültek.

1. Transzformációs paraméterek számítása 5 közeli OGPSH pont alapján:

A megadott 24 pontból Kiskunhalashoz az alábbi pontok esnek legközelebb (a legközelebbi pontok kiválasztásához az ITR program került felhasználásra):

Psz	EOV koordináták			WGS84 koordináták		
	Y (m)	*X* (m)	*H* (m)	Fi	Lambda	*h* (m)
2	691744,460	169203,850	123,827	46-51-56,81292	19-35-41,95482	166,909
4	775016,420	109637,020	99,910	46-19-10,43609	20-40-14,78947	142,722
17	696126,170	107849,365	127,207	46-18-48,83672	19-38-46,68390	170,795
19	691930,680	216542,440	227,727	47-17-29,75259	19-36-06,57499	270,719
20	596277,192	135678,234	165,196	46-33-47,97123	18-20-48,38479	209,832



A transzformációs paraméterek számítása a fentebb látható HungaPro v4.18 program segítségével történt. A program az EOV koordinátákat és a *H* tengerszintfeletti magasságot az IUGG/1967 ellipszoid térbeli koordinátarendszerébe, a WGS84 Fi, Lambda, *h* koordinátákat a WGS84 ellipszoid térbeli koordinátarendszerébe számítja át, majd e kettő között végzi el a 7 paraméteres transzformációt. A transzformáció eredményeit a program egy „5 eovwgs.PAR” nevű fájlban tárolta.

A transzformáció eredményei:

Eltolási paraméterek:

X_0, Y_0, Z_0:

58,2225 -56,2959 -25,8449 [m]

Méretaránykülönbség:

0,0000023390761115131O

Forgatási szögek:

Rx = - 00-00-00,2107510084

Ry = 00-00-00,4570289855

Rz = 00-00-00,5454062140

Forgatási mátrix:

0,999999999994049000000	0,000002644203943087680	-0,000002215739048492390

-0,000002644206207023540	0,99999999999959820000000	-0,000001021749721760920
0,000002215736346768850	0,000001021755580625790	0,99999999999970230000000

Sigma a posteriori: 0,080 m.

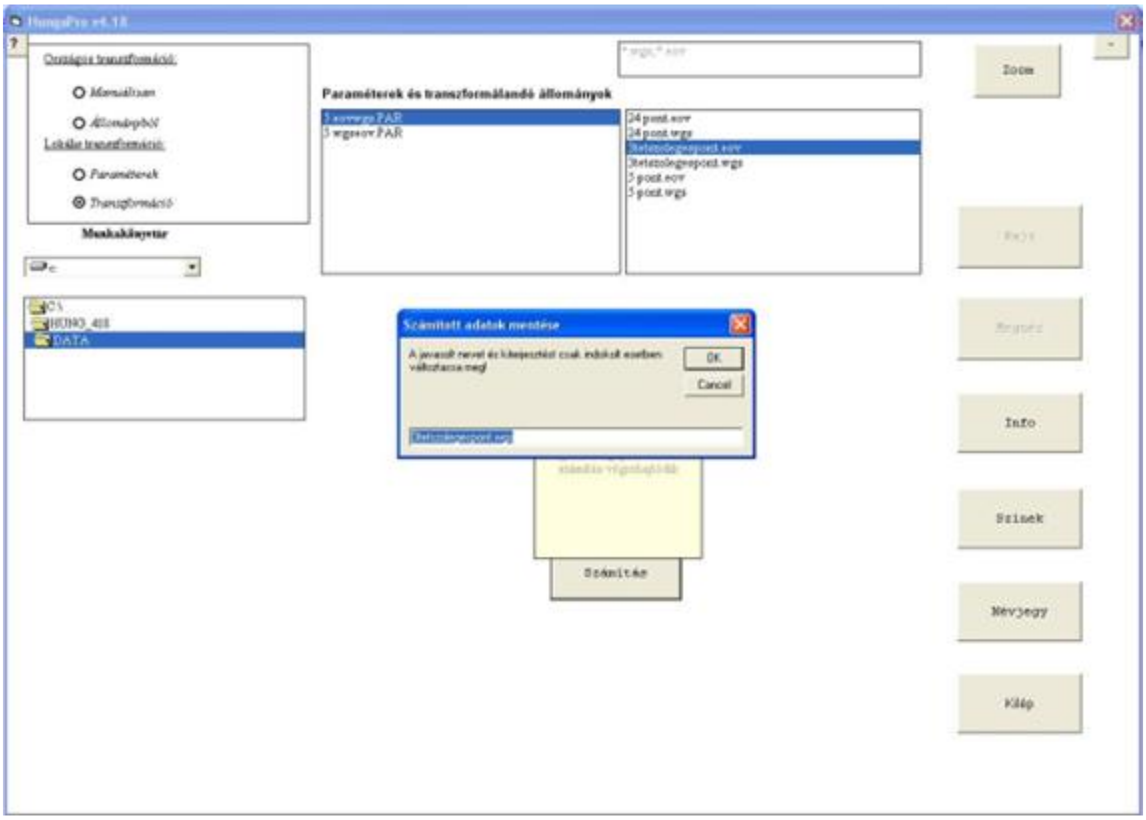
Az utolsó mérőszám az egyik rendszerből a másikba történő átszámítás várható megbízhatóságát mutatja. A forgatási mátrix főátlójában szigorúan véve 1 értékek állnak.

1. A 3 tetszőlegesen választott pont transzformációja:

A kapott transzformációs paraméterekkel az alábbi EOV koordinátájú pontok WGS84 ellipszoidi felületi koordinátarendszerbe számítására került sor:

Pontszám	EOV koordináták		
	Y (m)	*X* (m)	*H* (m)
1001	676283,37	115074,11	127
1002	690972,55	115618,16	135
1003	690428,51	127043,08	112

A számítás itt is HungaPro v4.18 program segítségével történt, az eredmények ’3tetszolegespont.wgs’ néven tárolásra is kerültek.



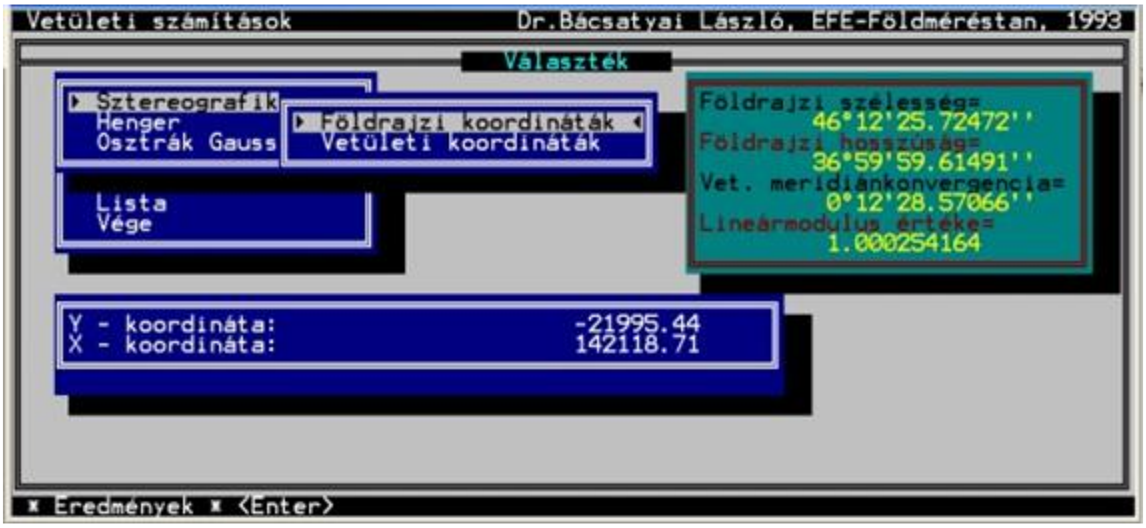
Transzformáció eredménye:

Pontszám	EOV koordináták		
	Y (m)	*X* (m)	*H* (m)
1001	676283,37	115074,11	127
1002	690972,55	115618,16	135
1003	690428,51	127043,08	112

Pontszám	WGS84 koordináták		
	Fi	Lambda	*h* (m)
1001	46-22-46,66342	19-23-20,76149	170,812
1002	46-23-01,62589	19-34-48,27065	178,642
1003	46-29-11,74043	19-34-26,40910	155,567

1. Az EOV szelvény sarokpontjaiban számított lineármodulusok és meridiánkonvergenciák:

A lineármodulusokat és a meridiánkonvergenciákat az alábbi (Bácsatyai, 1993) DOS-os ’Vetület’ nevű programmal számítjuk:



A számítási képletek vetületenként változóak, azok itt nem soroljuk fel.

Az eredmények a szelvény négy sarokpontjában az alábbi két összehasonlító táblázatban találhatók:

Pont száma	**EOV**		**UTM**	
	Meridián konvergencia	Lineármodulus	Meridián konvergencia	Lineármodulus
1	0-12-32,38571	1,000062883	0-57-43,13348	0,999729889

2	0-39-53,81661	1,000062883	1-24-39,65454	0,99987946
3	0-40-06,41643	0,999993689	1-25-16,67122	0,999877891
4	0-12-36,34642	0,999993689	0-58-03,72525	0,999728815

Pont száma	**Sztereografikus**		**HKR**	
	Meridián konvergencia	Lineármodulus	Meridián konvergencia	Lineármodulus
1	0-12-28,57066	1,000254164	0-12-27,92350	1,000248245
2	0-39-42,11553	1,000308447	0-39-39,73115	1,000248239
3	0-40-00,436	1,000209245	0-39-52,04528	1,00014902
4	0-12-34,35053	1,000154962	0-12-31,79268	1,000149024

A táblázatokból látszik, hogy az érintő vetületeknél a lineármodulusok értékei mindig nagyobbak 1-nél.

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: *Vetülettan, elektronikus jegyzet pdf formátumban,* NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár,

Bácsatyai László: *Magyarországi vetületek,* tankönyv, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2006

Bácsatyai László: *Magyarországi vetületek,* elektronikus tankönyv,

Hazay István: *Földi vetületek.* Akadémia Kiadó, Budapest, 1954

Németh Gyula: *Vetülettan,* EFE Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár, 2003

Varga József: *Alaphálózatok I. (Vetülettan).* Tankönyvkiadó, Budapest, 1986