Mérnöki Optimálás Példatár

A példa megnevezése:	Három rúdból álló tartó optimálása
A példa száma:	OPT-BME-1
A példa szintje:	alap
A feladat rövid leírása:	A feladat a Mérnöki optimálás tananyag 1. fejezetéhez kapcsolódó illusztratív feladat, amely egy konkrét feladaton keresztül segít megérteni a fejezetben bemutatott alapfogalmak értelmezését: tervezési változó kiválasztása, optimálási feltétel és célfüggvény előírása. A két tervezési változós feladattal lehetővé válik a fenti alapfogalmak grafikus szemléltetése és a feladat grafikus megoldása is.

1. A feladat megfogalmazása:

Tekintsük az ábrán látható három rúdból álló tartó feladatot! A szerkezet rúdjait acélból készítjük, két terhelési esetet veszünk figyelembe, amelyeket egy-egy koncentrált erőterhelésként (P_I,P_{II}) modellezünk. Előre rögzített tervezési paraméternek tekintjük az anyagjellemzőket (rugalmassági modulus, sűrűség, folyáshatár, stb.), a szerkezet topológiáját (azt, hogy egy-egy rúd található az A-B, A-C és A-D pontok között) és a rúdvégek koordinátáit. Tervezési változóként az X1, X2 rúdkeresztmetszeteket választjuk.

Az alkalmazott terhelési esetek: $P_I = 20 \quad P_{II} = 20$

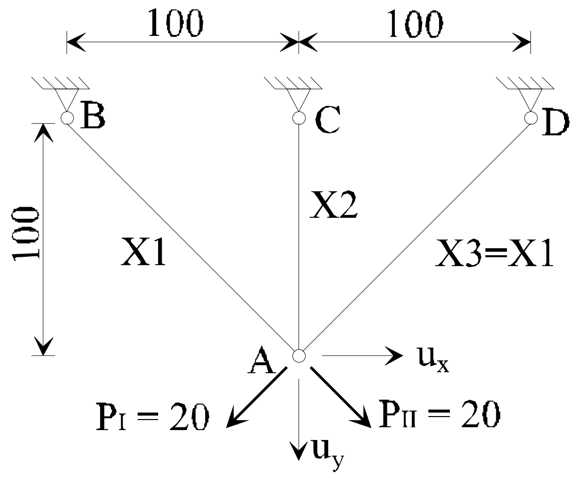
A megengedett feszültség határai a rudakban:

felső határ: $\sigma^F = 20$,

alsó határ: $\sigma^A = -15$

A legkisebb megengedett keresztmetszet terület: $X^A = 0$

Határozza meg a feltételeknek eleget tevő minimális tömegű tartó rúdkeresztmetszeteit!



2. A megoldás lépései:

1. lépés: tervezési változók és tervezési paraméterek meghatározása

Minthogy a két terhelési eset és a geometria is szimmetrikus, ezért elég két tervezési változót (X1 és X2) figyelembe venni, ez egyszerűbbé teszi a grafikus ábrázolást. A tervezési változók a matematikai osztályozás szerint a folytonos kategóriába tartoznak, míg fizikai osztályozás alapján a keresztmetszeti méretek közé sorolhatóak. A szerkezet összes egyéb jellemzőjét (anyagjellemzők, topológia, stb.) tervezési paraméternek tekintjük, ezek nem változhatnak az optimálás során.

2. lépés: Optimálási feltételek előírása

Az optimálási feltételeket egyenlőtlenségek formájában írhatjuk föl.

A geometriai optimálási feltételek a tervezési változó alsó határára vonatkozó triviális feltételek (emlékeztetőül megjegyezzük, hogy a g-vel jelöljük az egyenlőtlenség típusú feltételeket):

$$g_1:\ -X_1 \le 0$$

$$g_2:\ -X_2 \le 0$$

A tervezési változók felső határának a gyártási feltételek szabnak határt, ennek korlátozása most nem szükséges, hiszen a minimális tömeg elérésére törekszünk, így ezek a feltételek biztosan nem lennének aktívak.

A feszültségi optimálási feltételek a működőképesség megtartását garantálják, miután mindhárom rúdra hasonlóan a nyomó és húzó feszültségek esetére is meg van adva a megengedhető maximális feszültség, ezért ez a 3 rúdra nézve összesen 6 darab egyenlőtlenség típusú feltételt jelent, amelyeket folytonosan g_3-tól g_8-ig számozunk.

Eszerint a feszültségi optimálási feltételek

$$g_3:\ \sigma_1 - 20 \le 0$$

$$g_4:\ -\sigma_1 - 15 \le 0$$

$$g_5:\ \sigma_2 - 20 \le 0$$

$$g_6:\ -\sigma_2 - 15 \le 0$$

$$g_7:\ \sigma_3 - 20 \le 0$$

$$g_8:\ -\sigma_3 - 15 \le 0$$

Minthogy a feladat egy viszonylag egyszerű tartót vizsgál, így lehetőség van a rudakban ébredő feszültség zárt alakú (numerikus módszert nélkülöző) megadására.

A szimmetriaviszonyokat és a feszültséget előjelét kihasználva megállapíttató, hogy a 6 feszültségi optimálási feltételből elegendő hármat vizsgálni, ezek a 3., 5.,8. feszültségi optimálási feltételek.

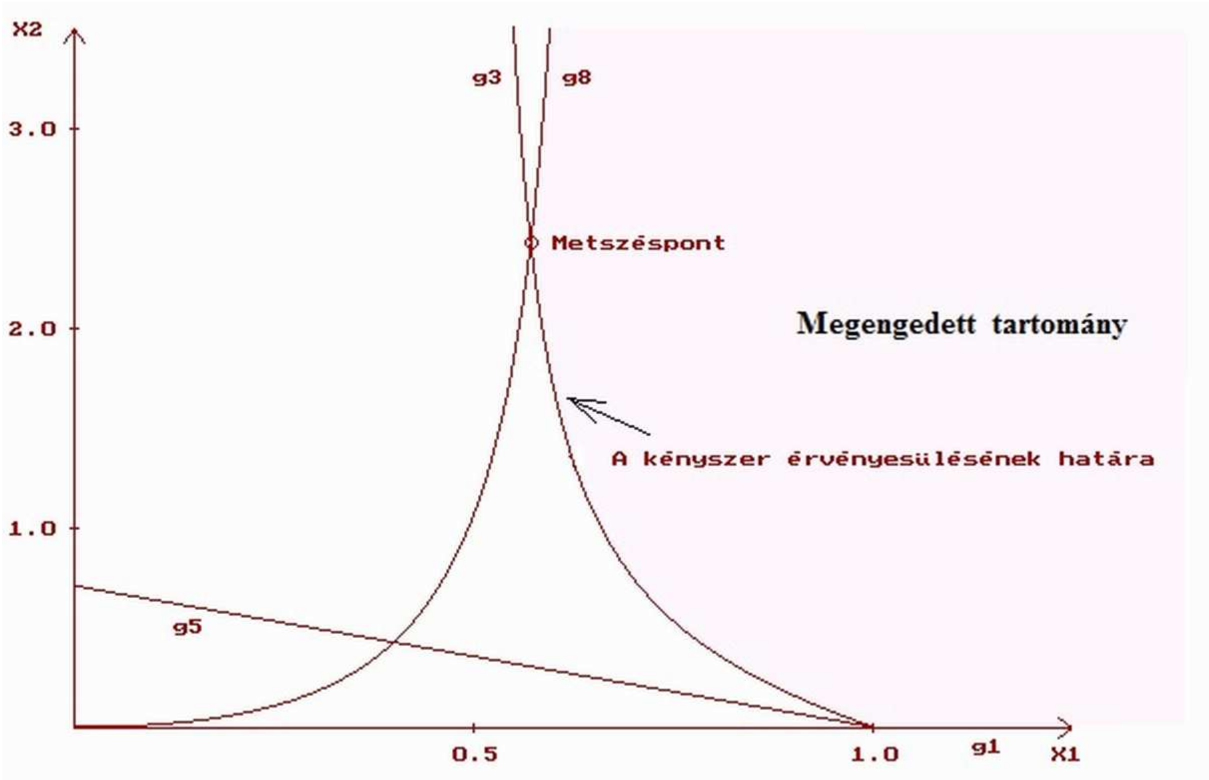
Ezek a feszültségek a tervezési változóval kifejezve a következő módon állnak elő:

$$g_3 : \sigma_1 - 20 = 20\frac{X_2 + \sqrt{2}X_1}{2X_1X_2 + \sqrt{2}X_1^2} - 20 \le 0$$

$$g_5 : \sigma_2 - 20 = 20\frac{\sqrt{2}X_1}{2X_1X_2 + \sqrt{2}X_1^2} - 20 \le 0$$

$$g_8 : -\sigma_3 - 15 = 20\frac{X_2}{2X_1X_2 + \sqrt{2}X_1^2} - 15 \le 0$$

A feszültségi optimálási feltételeket grafikusan ábrázolva a következő ábra kapható:



Megemlítjük, hogy a g_1 és g_2 optimálási feltételeket úgy vettük figyelembe, hogy eleve a koordinátarendszer pozitív síknegyedében ábrázoljuk a függvényeket.

Ez az ábra alkalmas arra, szemléltessük, hogy amennyiben a tervezési változóknak konkrét értéket adunk, akkor ez a tervezési változók terében egy pontot fog jelenteni (ez igaz akárhány dimenziós feladat esetén is), amely visszakódolható egy valós fizikai konstrukcióra. Továbbá egyértelműen látszik az is, hogy az egyenlőtlenség típusú optimálási feltételek a tervezési változók terét két részre bontják és azt a részt, ahol az összes feltétel teljesül, megengedett tartománynak nevezzük. Látszik továbbá az is, hogy amennyiben csak az optimálási feltételeket tekintenénk, úgy végtelen sok megoldása lenne a feladatnak, hiszen a megengedett tartomány összes pontja olyan szerkezetet reprezentál, amelynek összes rúdja eleget tesz a feszültségi feltételeknek, amely működőképes szerkezetet jelent.

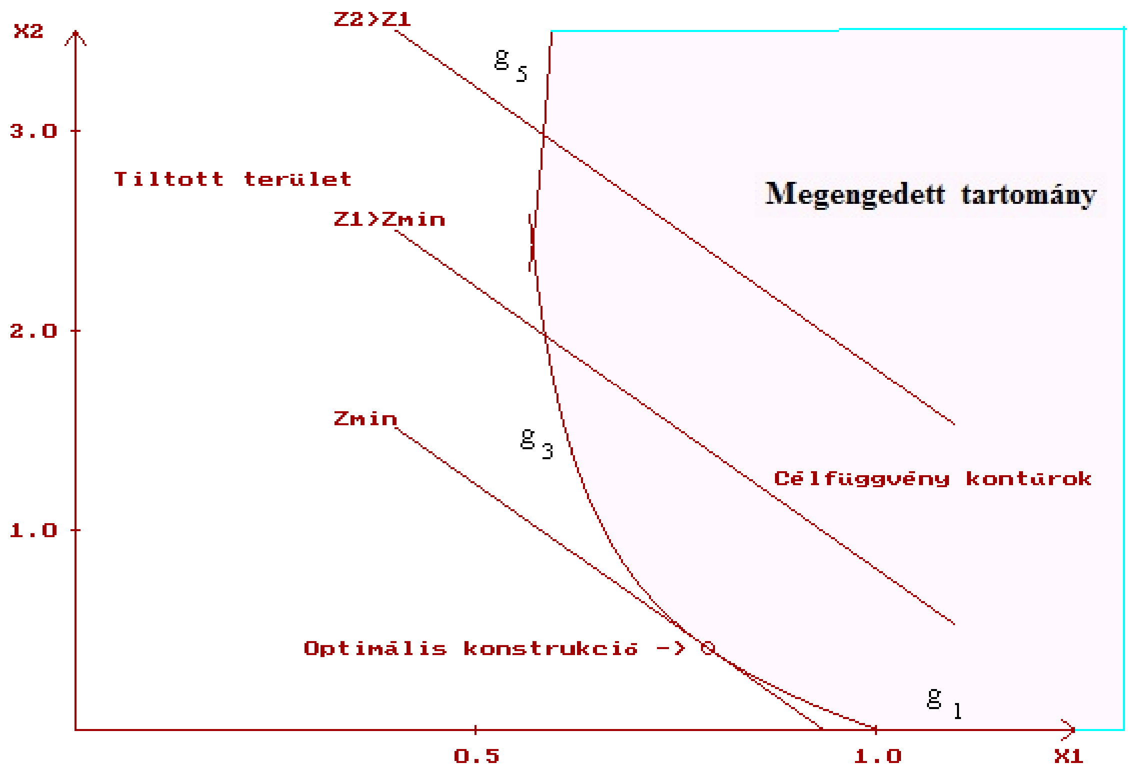
3. lépés: A célfüggvény megadása

Abból a célból, hogy össze tudjuk hasonlítani a végtelen sok megfelelőnek tűnő konstrukciót, egy mérőszámot vezetünk be. Célfüggvényként a tömeg helyett a térfogatot fogjuk alkalmazni, mert a jelen feladatban a szerkezet homogén sűrűségű és a térfogat célfüggvénynek is ugyanott van a szélső értéke, ahol a tömegnek.

A középső rúd térfogata $100 \cdot X_2$, amihez hozzájön még a két 45 fokos szögben álló rúd darabonkénti $100 \cdot \sqrt{2} X_1$ térfogata, így a célfüggvény:

$$Z = 2 \cdot 100 \cdot \sqrt{2} X_1 + 100 \cdot X_2 = 282.8 X_1 + 100 X_2$$

A célfüggvény egyes szintfelületei (amelyek a Z=konstans összefüggésből határozhatók meg) láthatók a következő ábrán. Egy adott egyenes mentén a rúdszerkezet kialakítások térfogata azonos. Látható, hogy a körrel jelölt pont a tervezési változók terének az a pontja, ahol a szerkezet kialakítása (a vizsgált szempontból) optimálisnak tekinthető.



4. lépés az optimális konstrukció meghatározása

Az előző ábráról leolvasható, hogy a feladat megoldása, amely $X_1 = 0.788\, X_2 = 0.410$ tervezési változó értékek mellett adódik és a minimális konstrukció térfogata: $Z = 263.9$ lesz. Ezzel a feladatot megoldottuk grafikus technika alkalmazásával, amely két tervezési változó esetén még áttekinthető, de több tervezési változó esetén már nem alkalmazható. Megállapítható továbbá az is, hogy a vizsgált feladat specialitása, hogy az optimumban csupán egy optimálási feltétel aktív.