

# LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA





SZÉCHENYI TERV

# LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében  
Tartalomfejlesztés az ELTE TátK Közgazdaságtudományi Tanszékén  
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék,  
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet,  
és a Balassi Kiadó  
közreműködésével.



A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség  
[www.ujszechenyiterv.gov.hu](http://www.ujszechenyiterv.gov.hu)  
06 40 638 638



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL



A projekt az Európai Unió  
támogatásával valósul meg.



ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

# Logika és érveléstechnika

9. hét

A LOGIKA HATÁRAI

Készítette: Mittelholcz Iván  
Szakmai felelős: Mittelholcz Iván

2011. február

Készült a következő mű felhasználásával:

*Ruzsa Imre–Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris, 1997.*

Eldöntésprobléma: felismerhető-e automatikusan minden esetben a következményreláció ( $\Gamma \Rightarrow A$  vagy  $\Gamma \vdash A$ ) fennállása

Különböző módszerek:

- analitikus táblázat
- Turing-gép
- rekurzív függvények (Kleene)
- algoritmusok (Markov)

Eredmények: a különböző megközelítések ekvivalensek, és *nem* univerzálisak – nincs egyetemes eljárás, amivel a következtetés eldönthető.

## példa

*Az ember értelmes állat.*

definiendum = genus proximum + differentia specifica

- genus proximum: legközelebbi nem fogalom (pl. állat)
- differentia specifica: fajta alkotó különbség (pl. értelmes)
- problémák:
  - csak monadikus predikátumok definiálására alkalmas
  - mappák (hierarchikus) vs. címkék (keresztbe osztályozás)

# Formális definíció

- két azonos szabad változót tartalmazó, nyitott mondat
  - lekötött változók eltérhetnek
- jele:  $\Leftrightarrow_{df}$

## példa

$x$  bátyja  $y$ -nak  $\Leftrightarrow_{df}$   $x$  idősebb  $y$ -nál &  $x$  testvére  $y$ -nak &  $x$  férfi

Egy definíció után a nyitott mondatokat univerzálisan kvantifikálva és a definíció jelét bikondicionálisra cserélve igaz állítást kapunk:

## példa

$\forall x \forall y ((x \text{ bátyja } y\text{-nak}) \equiv (x \text{ idősebb } y\text{-nál} \ \& \ x \text{ testvére } y\text{-nak} \ \& \ x \text{ férfi}))$



Elsőrendű elmélet:  $\mathcal{E} = \langle \mathcal{L}, \Gamma \rangle$

- $\mathcal{L}$ : egy elsőrendű nyelv
- $\Gamma$ :  $\mathcal{L}$  nyelv formuláinak egy osztálya (axiómák)
- alapfogalmak:  $\mathcal{L}$  nemlogikai konstansai
- származtatott fogalmak: alapfogalmak + definíció
- tételek:  $\Gamma$  következményei
  - $\Gamma$  végetelen is lehet
  - $\Gamma$  akár üres is lehet
  - *valódi tételek*: nem logikai igazságok
- $\mathcal{E}$  negációteljes, ha nincs eldönthetetlen problémája – azaz, ha tetszőleges  $A$  formula bizonyítható vagy cáfolható az elméletben

## Természetes számok aritmetikája

- nemlogikai konstansok:  $\langle 0, ', +, \cdot \rangle$ 
  - $a'$  a tovább számolás névfunktora ( $n' = n + 1$ )
- axiómák:
  - $\forall x \sim (x' = 0)$
  - $\forall x \forall y ((x' = y') \supset (x = y))$
  - $\forall x (x + 0 = x)$
  - $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$
  - $\forall x (x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x \forall y (x \cdot y' = (x \cdot y) + x)$
  - $(A^{0/x} \& \forall x (A \supset A^{x'/x}) \supset \forall x A)$

# Nemteljességi tétel (Gödel, 1931)

Ha egy formális elmélet elegendően erős és konzisztens, akkor nem lehet negációteljes.

- formális elmélet: formalizálható (pl. elsőrendben), rekurzívan felsorolható axiómarendszerrel
- elegendően erős: tartalmazza a Peano aritmetikát
- konzisztens: nincs benne olyan mondat, ami bizonyítható és cáfolható is volna
- nem negációteljes: megfogalmazható benne olyan mondat, ami se nem bizonyítható, se nem cáfolható

# Nemteljesség és konzisztencia

- inkonzisztens elmélet: ellentmondó premisszákból bármi – és annak az ellenkezője is – levezethető

## „bármi” levezetése

premisszák:  $\{A, \sim A\}$

1. lépés:  $\{A\} \Rightarrow A \vee B$

2. lépés:  $\{A \vee B, \sim A\} \Rightarrow B$

- konzisztens (ellentmondásmentes) egy elmélet, ha van olyan mondata, ami nem vezethető le az axiómáiból
- nemteljesség: az elméletnek van olyan mondata, aminek a tagadása sem vezethető le az elméletből (és ő maga sem)
  - mindig ilyen az elmélet ellentmondásmentességét kimondó állítás (2. nemteljességi tétel)

- Nemptelenség: minden (elegendően erős) elméletnek vannak problémái, ahol nem bizonyítható sem az állítás, sem annak tagadása.
- Univerzális eldönthetőség hiánya: ahol lehetséges a bizonyítás, ott sem mindig ismerhető fel automatikusan.

Definiáld az  $x$  *testvére*  $y$ -nak kétargumentumú predikátumot  
következők segítségével:

- $x$  és  $y$ -nak van közös szülője
- figyelj a kötött változókra is

Definiáld az  $x$  *féltestvére*  $y$ -nak kétargumentumú predikátumot is!

- $x$  és  $y$ -nak pontosan egy közös szülője van