LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Mittelholcz Iván

Szakmai felelős: Mittelholcz Iván

2011. február

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Logika és érveléstechnika

4. hét

Nulladrendű logika 3.

Mittelholcz Iván

Készült a következő mű felhasználásával:
Ruzsa Imre–Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris, 1997.

Átalakítások

DeMorgan azonosságok

De Morgan-azonosságok 1.

konjunkció tagadása
Nem igaz, hogy esik az eső, és süt a nap.
Vagy nem esik az eső, vagy nem süt a nap.

- $A\&B$ igaz, ha mindkét tagja igaz, tagadása (kétértékű logikában): legalább az egyik hamis (de lehet, hogy mindkettő), azaz $\sim A \vee \sim B$
- formalizálva: $\sim(A \,\&\, B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$

igazolás igazságfüggvényekkel:

A	B	$A \,\&\, B$	$\sim(A \,\&\, B)$	$\sim A$	$\sim B$	$(\sim A) \vee (\sim B)$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

De Morgan-azonosságok 2.

alternáció tagadása
Nem igaz, hogy Géza vagy Jenő a gyilkos.
Sem Géza, sem Jenő nem gyilkos.

- $A \vee B$ hamis, ha mindkét tagja hamis – tagadásával pont ezt állítjuk: sem A, sem B nem igaz, tehát $\sim A \,\&\, \sim B$
- formalizálva: $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \,\&\, \sim B$

igazolás igazságfüggvényekkel:

A	B	$A \vee B$	$\sim(A \vee B)$	$\sim A$	$\sim B$	$(\sim A) \,\&\, (\sim B)$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

További azonosságok

Kondícionális átalakítása

kondícionális
Ha elkapom a gyilkost, előléptetnek.
Nem igaz, hogy elkapom a gyilkost, és nem léptetnek elő.
Vagy nem kapom el a gyilkost, vagy előléptetnek.

- definíció szerint $A \supset B \Leftrightarrow \sim(A \,\&\, \sim B)$
- alkalmazva a De Morgan-azonosságot: $\sim(A \,\&\, \sim B) \Leftrightarrow \sim(A) \vee \sim(\sim B)$
- tehát $A \supset B \Leftrightarrow \sim A \vee B$

igazságfüggvények:

A	B	$\sim B$	$A \,\&\, \sim B$	$\sim(A \,\&\, \sim B)$	$\sim A$	$\sim A \vee B$
1	1	0	0	**1**	0	**1**
1	0	1	1	**0**	0	**0**
0	1	0	0	**1**	1	**1**
0	0	1	0	**1**	1	**1**

Bikondícionális átalakítása

- megfordítható kondícionális: $A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$
- a kizáró vagy tagadása: $A \equiv B \Leftrightarrow \sim\big((A \,\&\, \sim B) \vee (\sim A \,\&\, B)\big)$
- másképp (fontos lesz): $A \equiv B \Leftrightarrow (A \,\&\, B) \vee (\sim A \,\&\, \sim B)$

utóbbi igazolása igazságfüggvénnyel:

A	B	$A \equiv B$	$A \,\&\, B$	$\sim A \,\&\, \sim B$	$(A \,\&\, B) \vee (\sim A \,\&\, \sim B)$
1	1	**1**	1	0	**1**
1	0	**0**	0	0	**0**
0	1	**0**	0	0	**0**
0	0	**1**	0	1	**1**

Igazság-függvények

Egybemenetű igazságfüggvények

Négy egybemenetű igazságfüggvény lehetséges:

A	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

1. minden bemenetre igaz kimenetet ad (pl. $A \vee \sim A$)

2. a kimenet megegyezik a bemenettel (= A – identikus)

3. a kimenet ellentettje a bemenetnek (*negáció*)

4. minden bemenetre hamis kimenetet ad (pl. $A \,\&\, \sim A$)

Kétbemenetű igazságfüggvények
Tizenhat kétbemenetű igazságfüggvény lehetséges:

A	B	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*	*13.*	*14.*	*15.*	*16.*
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0

Ezekből már ismert:

- *2.* alternáció
- *5.* kondícionális
- *8.* bikondícionális
- *12.* konjunkció

Több mondatfunktor bevezetésére nincs szükség: bármely kétbemenetű igazságfüggvény előállítható a negáció és valamelyik már ismert kétbemenetű igazságfüggvény ($\&$, $\vee$ $\supset$) felhasználásával.

Következtetés

„Kézi” ellenőrzés

Következtetések ellenőrzése 1.

feltételezett következtetés

Ha Géza kapál, Jenő vagy Janka csinálja az ebédet.
Géza kapál.
Nem Jenő csinálja az ebédet.
———————————————
Janka csinálja az ebédet.

szótár

- p_1: Géza kapál
- p_2: Jenő csinálja az ebédet
- p_3: Janka csinálja az ebédet

formalizálva: $\{p_1 \supset (p_2 \vee p_3),\, p_1,\, \sim p_2\} \Rightarrow p_3$

- p, q, r stb. vagy p_1, p_2, p_3 stb.: *mondatparaméterek*, konkrét mondatokat neveznek meg
- A, B, C stb.: mondatsémák (változók)

Következtetések ellenőrzése 2.

Először alkalmazzuk a *modus ponens* következtetési sémát:

$\{p_1 \supset (p_2 \vee p_3),\, p_1\} \Rightarrow p_2 \vee p_3$

Ezután az alternációs következtetési séma felhasználásával:

$\{p_2 \vee p_3,\, \sim p_2\} \Rightarrow p_3$

Probélmák:

- a következtetési sémákat emlékezetben kell tartani
- az alkalmazható sémák felismerése az egyéni leleményességen múlik
- ha nem jutunk el a premisszáktól a konklúzióig, nem tudhatjuk, hogy a konklúzió tényleg nem következik, vagy csak mi nem találtuk a megfelelő sémát hozzá

Nulladrendben van olyan (szemantikai alapú) eljárás, amivel véges lépésben el lehet dönteni, hogy a következtetés helyes-e.

Interpretáció

Interpretáció – definíció

interpretáció: a felbontatlan kifejezéshez szemantikai értéket rendelünk

- *extenzionális logikában*: faktuális értéket
- *nulladrendben*: elemi mondatokhoz faktuális értékűket (igazságérték)
- ezáltal az összetett mondatok is igazságértéket kapnak

kielégíthetőség 1.: a mondatok egy osztálya kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyik minden mondatot igazra értékel

modell: egy mondatosztály modellje az az interpretáció, amelyik az osztály minden mondatát igazra értékeli

kielégíthetőség 2.: mondatok egy osztálya kielégíthető, ha van modellje

Interpretáció – példák

kielégíthető mondatosztályok
$\{p,\, q,\, r\}$
$\{(p_1 \,\&\, p_2) \supset p_3,\ p_1 \vee \sim p_4\}$

kielégíthetetlen mondatosztályok
$\{p, \sim p\}$; $\{p \,\&\, \sim p\}$
$\{p_1,\ p_2 \vee p_3,\ p_1 \supset (\sim p_2 \,\&\, \sim p_3)\}$

logikai igazságok
$\{p \vee \sim p\}$
$\{\sim (q \,\&\, \sim q)\}$
$\{r \supset r\}$

Analitikus táblázat

Analitikus tábla – bevezetés

Következmény reláció: $\Gamma \Rightarrow A$, ahol Γ premisszák egy adott halmaza, A pedig a konklúzió

- a premisszák igazsága esetén a konklúzió is mindig igaz
- a Γ minden modellje A-nak is modellje
- nincs olyan modell, amely Γ-t igazra, A-t pedig hamisra értékeli
- $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen (hiszen a premisszák igazsága esetén a konklúziónak is igazra kell kiértékelődnie)

Ez utóbbit használja ki az „analitikus táblázat"módszere: ha a premisszákhoz hozzávesszük a feltételezett konklúzió tagadását, ellentmondásra kell jutnunk. Ha nem jutunk ellentmondásra, a premisszákból nem következik az állítás.

Analitikus tábla – példa
Ellenőrizzük a bevezetés következtetését
$\{p_1 \supset (p_2 \vee p_3)\,,\ p_1,\ \sim p_2\} \Rightarrow p_3$

1.	$p_1 \supset (p_2 \vee p_3)$					
2.	p_1					
3.	$\sim p_2$					
4.	$\sim p_3$					
5.	$\sim p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$	[1]				
6.	$\sim p_1$	[5]	$p_2 \vee p_3$	[5]		
7.	* (2,6)		p_2	[6]	p_3	[6]
			* (3,7)		* (4,7)	

A táblázat minden ágán ellentmondásra jutottunk – a következtetés helyes.

Analitikus tábla – szabályok 1.

1. felírjuk egymás alá a premisszákat
2. hozzávesszük a (feltételezett) konklúzió negáltját
3. az összetettebb formulákat átalakítjuk egyszerű konjunkciókká és alternációkká és fölvesszük őket a táblázatba (származékok)
4. a konjunkciók tagjait egymás alá írjuk
5. az alternációknál elágaztatjuk a táblázatot, a tagokat külön oszlopokba vesszük fel
6. ha elágazás után veszünk fel egy származékot, akkor azt minden (nyitott) ágra fel kell venni
7. az eljárást addig folytatjuk, amíg a táblázat nem befejezett

Analitikus tábla – szabályok 2.

- ágak lezárása: ha egy ágon egy formula és annak tagadása is szerepel, akkor az ágat egy *-gal lezárjuk és megadjuk az ellentmondó formulák sorszámát
  - ezután csak a nyitott ágakat kell folytatni
- a táblázat befejezett, ha minden ága zárt, vagy ha a nyitott ágakon szerepel a konjunktív formulák összes származéka és az alternációs formulák valamely származéka
- tétel: a formulák egy osztálya kielégíthető, ha analitikus táblázatuknak van (legalább egy) nyitott ága. Ha minden ág zárt, a formulaosztály kielégíthetetlen

Analitikus tábla – származékok
alap formulák

konjunkció	alternáció		kondícionális		bikondícionális	
$A \,\&\, B$	$A \vee B$		$A \supset B$		$A \equiv B$	
A	A	B	$\sim A$	B	A	$\sim A$
B					B	$\sim B$

és tagadásaik

konjunkció		alternáció	kondícionális	bikondícionális	
$\sim (A \,\&\, B)$		$\sim (A \vee B)$	$\sim (A \supset B)$	$\sim (A \equiv B)$	
$\sim A$	$\sim B$	$\sim A$	A	A	$\sim A$
		$\sim B$	$\sim B$	$\sim B$	B

Feladat
Helyes-e az alábbi következtetés?
Ellenőrizzünk analitikus táblázattal!

Ha a titkár nem beszél, a visszaélés nem derül ki.
Ha a visszaélés kiderül, a jegyzőt kirugják.

Ha a titkár beszél, a jegyzőt kirugják.

- p: A titkár beszél
- q: A visszaélés kiderül
- r: A jegyzőt kirúgják

Formalizálva: $\{\sim p \supset \sim q, q \supset r\} \Rightarrow p \supset r$
Mi volt a hiba? Lehetséges, hogy a titkár (mellé)beszél, és a visszaélés nem derül ki. $\sim p \supset \sim q \not\Leftrightarrow p \supset q$

A következményreláció törvényei

- Ha Γ'-vel jelöljük Γ egy bővítését, és $\Gamma \Rightarrow A$, akkor $\Gamma' \Rightarrow A$ is teljesül.
- Többpremisszás következtetések egypremisszássá alakíthtók: $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\} \Leftrightarrow \{C_1 \,\&\, C_2 \,\&\, \ldots \,\&\, C_n\}$
- Egypremisszás következtetés logikai igazsággá alakítható: $A \Rightarrow B$ akkor, és csak akkor teljesül, ha: $\Rightarrow A \supset B$

Feladatok 1.
Fejezd ki az ismert mondatfunktorok felhasználásával az alábbi igazságfüggvényeket:

A	B	1.	2.	3.
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	0	0	1

Feladatok 2.
Ellenőrizd az alábbi következtetés helyességét analitikus táblázat segítségével:

1. Ha a gyilkost elkapják, a nyomozás véget ér.
2. Ha belső ellenőrzés lesz, a tárgyalás elmarad.
3. A nyomozás nem ér véget, pedig vagy elkapják a gyilkost, vagy belső ellenőrzés lesz.

---

4. A tárgyalás elmarad.

Feladatok 3.
Ellenőrizd az alábbi következtetés helyességét analitikus táblázat segítségével:

1. Ha a szemtanú megbízható, a tettes magas férfi volt.
2. Ha a tettes külföldi volt és magas, akkor csak Moriarti lehetett.
3. A szemtanú megbízható.
4. A tettes külföldi.

---

5. A tettes Moriarti.