

LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Mittelholcz Iván

Szakmai felelős: Mittelholcz Iván

2011. február



Logika és érveléstechnika

5. hét

Elsőrendű logika 1.

Mittelholcz Iván

Készült a következő mű felhasználásával:

Ruzsa Imre–Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris, 1997.

Nevek és predikátumok

Új grammatikai kategóriák és szemantikai értékeik

individuumnév: egyedi, konkrét dolgot (individuumot) jelöl

faktuális értéke: individuum

nevek

Janka

Janka férje

ő

predikátum: funktor, névből képez mondatot

faktuális értéke: individuumokhoz igazságértéket rendelő függvény

predikátumok

Janka főz.

Janka férje bemutatatta Jankát a gyilkosnak.

Géza gyilkos. – gyilkos (Géza)

Géza (van) a gyilkos. – Géza = „a gyilkos”

Individuumnév

Probléma: mi az, ami név lehet? Aminek egy, és csak egy jelölete van.

Általában a *kontextus* alapján döntjük el, mi a név jelölete.

Példa: egy osztály tanulóiról beszélünk és Aladárrol:

- csak egy Aladár van az osztályban – egyértelmű
- nincs Aladár az osztályban – értelmetlen
- több Aladár van az osztályban
 - megkülönböztetjük őket (leírás, vezetéknev stb.)
 - szűkítjük beszélgetés keretét: pl. a kémia szakkörre, amiben csak egy Aladár van

Tárgyalási univerzum, többértelműség

Tárgyalási univerzum (U): a kontextus megfelelője a logikában; individuumok halmaza, amin az elemzésben szereplő nevek jelölete egyértelmű

Janka, Janka férje, a gyilkos, ő: lehetnek nevek, ha egyértelmű, hogy U melyik elemére vonatkozik

- elmélet, érv stb. gyártásánál a tárgyalási univerzumot és az individuumneveket úgy kell egymáshoz igazítani, hogy egyértelmű legyen a nevek használata
- elmélet, érv stb. elemzésénél, ha nem tudjuk megszüntetni a többértelműséget (sem tulajdonságokkal, sem U megfelelő szűkítésével), akkor párhuzamosan több elemzést készítünk melyek önmagukban egyértelműek

indexelés

Aladár₁ okos.

Aladár₂ okos.

Individuumok

Mi lehet individuum? Mi lehet a tárgyalási univerzum eleme?

- nagyjából bármi, ami egyértelmű, körülhatárolható
- emlősök
- atomok – fizika (realizmus/instrumentalizmus)
- számok – matematika (absztrakt)
- problémák:
 - anyagfajták egy mennyisége (pl. a pohárban lévő víz) – ezeket nem szoktuk individuumként kezelni
 - rész-egész problémák: az individuumok egy adott osztály „atomjai”, elemei – az individuum részeit tarthatjuk individuumoknak (pl. szék – székláb), de csak óvatosan! (paradoxonok)

Nincs kőbe vésve, mit kell/lehet individuumnak tartani.

Az egyes szaktudományok ontológiája mondja meg, az aktuális elemzés során mit tekintünk individuumnak.

Predikátumok

A predikátum funktor, ami névhez igazságértéket rendel

monadikus predikátumok – egy argumentum

Géza telefonál.

Janka szőke.

Jenő sovány.

diadikus predikátumok – két argumentum

Rómeó szereti Júliát.

Aladár és Bendegúz testvérek. – Figyeljünk az *és*-re!

Jenő alacsonyabb Jankánál.

poliadikus predikátumok – több argumentum

Géza bemutatta Jankát Jenőnek.

Janka elküldte Jenőt Budára Gézához.

Predikátumok szemantikai értéke

monadikus predikátum

Janka *szőke*.

A *szőke* monadikus predikátum 1-et rendel a tárgyalási univerzum azon individuumaikhoz, amelyek szőkék, és 0-át a többihez;

Általánosan: a predikátum faktuális értéke az a függvény, ami a tárgyalási univerzum individuumaiból képzett *rendezett* n -esekhez rendel igazságértéket, ahol n a predikátum argumentumainak száma.

- véges individuum esetén a függvény elvben elkészíthető
- a függvény kiválasztja U -ból a predikátum igazságtartományát

igazságtartomány (terjedelem, extenzió) a tárgyalási univerzum azon individuumainak osztálya, melyekre a (monadikus) predikátum igaz

Argumentumok sorrendje

nem ekvivalens mondatok

Rómeó szereti Júliát.

Júlia szereti Rómeót.

Az argumentumok sorrendjére ügyeljünk!

ekvivalens mondatok

Jenő alacsonyabb Jankánál.

Jankánál alacsonyabb Jenő.

Mindegy, elsőre milyen sorrendben formalizálunk, de utána ugyanúgy formalizáljuk az azonos szemantikai értékű kifejezéseket.

Mi lehet predikátum?

predikátumok

Géza *költő*.

Géza *rossz költő*.

Géza *nagyon rossz költő*.

- szabadon eldönthetjük, az adott elemzésben mit tekintünk atomi predikátumnak, és mit bontunk fel
- *rossz*: funktor, aminek a bemenete és kimenete is predikátum

argumentum szám

Rómeó *szereti Júliát*. – x szereti Júliát: egy argumentum

Rómeó *szereti Júliát*. – x szereti y -t: két argumentum

azonos argumentumok

Janka *fésülködik*. – x fésülködik

Janka *fésülködik*. – x fésüli y -t (és $x=y$)

Formalizálás

név:

- az abc kisbetűit használunk (a, b, c)
- szükség esetén indexelünk (a_1, a_2 stb.)

predikátum:

- prefix írásmód: elől a predikátum, utána az argumentumai
- az abc nagybetűi F -től (F, G, H stb.)

szövegesen

szereti(Rómeó)(Júlia)

szimbólumokkal

$F(a)(b)$ vagy Fab

szótár

a : Rómeó, b : Júlia

$F(xy)$: x szereti y -t – az argumentumok sorrendjét meg kell adni!

Interpretáció

Nulladrendben: elemi mondatokat igazságértékkel látjuk el – ezáltal az összetett mondatok is igazságértéket kapnak

Első rendben:

- megadjuk a tárgyalási univerzumot (U)
- megadjuk a használt predikátumok igazságtartományát U -ra
- megadjuk a használt nevek jelöleteit U -ban,

ezáltal a mondataink is igazságértéket kapnak (ha van felbontatlan mondatunk, igazságértéket rendelünk hozzá, mint nulladrendben)

Változók és kvantorok

Nyitott mondatok – szabad változók

zárt mondat

Janka főz.

$F(j)$

A zárt mondatok igazak vagy hamisak.

nyitott mondat

főz(x)

$F(x)$

Ha egy mondatban egy nevet individuumváltozóra cserélünk, nyitott mondatot kapunk. A nyitott mondatnak – amíg nem rendelünk értéket a változókhoz – nincs igazságértéke.

Változók lekötése

szabad változó bevezetése

Ha Géza egyetemista, van indexe.

$\text{egyetemista}(\text{Géza}) \supset \text{van indexe}(\text{Géza})$

$\text{egyetemista}(x) \supset \text{van indexe}(x)$

változó lekötése

minden x , ha x egyetemista, akkor x -nek van indexe

minden x -re: $\text{egyetemista}(x) \supset \text{van indexe}(x)$

- *operátor*: leköti a hatókörében lévő szabad változót
 - *minden*: univerzális kvantor
- ha egy nyitott mondat (minden) szabad változóját lekötjük, akkor zárt mondatot kapunk: igazságértéke lesz

Változók lekötése 2.

szabad változó bevezetése

Gézának van indexe.

$\text{van indexe}(\text{Géza})$

$\text{van indexe}(y)(\text{Géza}) - \text{indexe}(y)(x)$: y indexe x -nek

változó lekötése

van olyan y , hogy $\text{indexe}(y)(x)$

van olyan y , hogy $\text{indexe}(y)(\text{Géza})$

- *van olyan*: egzisztenciális kvantor
- szintén leköti a szabad változót és igazságértékkel bíró mondatot képez

teljes mondat

minden x -re: $\text{egyetemista}(x) \supset \text{van olyan } y, \text{ hogy indexe}(y)(x)$

Formalizálás

- univerzális kvantor: $\forall x(A)$
- egzisztenciális kvantor: $\exists x(A)$
 - mindig jelöljük zárójellel a hatókört
 - A -ban nem kell legyen x
- tagadás
 - nem minden x -re: $\sim \forall x(A) \Leftrightarrow \forall x(\sim A)$
 - nincs olyan x : $\sim \exists x(A) \Leftrightarrow \exists x(\sim A)$

a példamondat

minden x -re: $\text{egyetemista}(x) \supset \text{van olyan } y, \text{ hogy indexe}(y)(x)$

szótár: $E(x)$: x egyetemista; $I(y)(x)$: y indexe x -nek

$\forall x(E(x) \supset \exists y(I(y)(x)))$

A kvantifikáció szabályai

Univerzális állítás tagadása: egzisztenciális állítás és a hatókörön belüli mondat tagadása.

Egzisztenciális állítás tagadása: univerzális állítás és a hatókörön belüli mondat tagadása.

- $\sim \forall x(A) \Leftrightarrow \exists x(\sim A)$

- $\sim \exists x(A) \Leftrightarrow \forall x(\sim A)$

Az egzisztenciális és az univerzális kvantor kifejezhető egymással:

- $\sim \forall x(\sim A) \Leftrightarrow \exists x(A)$

- $\sim \exists x(\sim A) \Leftrightarrow \forall x(A)$

Feladatok 1.

Formalizáld az alábbi mondatokat elsőrendű logikában

(a formalizáláshoz mellékelj a szótárat is)!

- Jenő mindenkinél alacsonyabb.
- Jankánál mindenki alacsonyabb.
- Aladárnak van testvére.
- Mindenkinek van testvére.

Feladatok 2.

Formalizáld az alábbi mondatokat elsőrendű logikában

(a formalizáláshoz mellékelj a szótárat is)!

- Minden holló fekete.
- Van olyan holló, amely fekete.
- Nem minden arany, ami fénylik.
- Nincs olyan az osztályban, akinek ne lenne testvére.