LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Mittelholcz Iván

Szakmai felelős: Mittelholcz Iván

2011. február

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Logika és érveléstechnika

6. hét

Elsőrendű logika 2.

Mittelholcz Iván

Készült a következő mű felhasználásával:
Ruzsa Imre–Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris, 1997.

Értékelés

Interpretáció kibővítése

változó értékelése: szabad változóhoz faktuális értéket rendelünk
(a tárgyalási univerzum valamely elemét)

- az értékelést mindig adott interpretáció *függelékeként* készítjük el
  - elsőrendű interpretáció: tárgyalási univerzum; predikátumok terjedelme; nevek jelölete
- a változók értékelésével a nyitott mondatok is igazságértéket kapnak
- a változók *értékelésével* megadható a kvantifikált mondatok igazságfeltétele

Igazságfeltételek

univerzális állítás $\forall x(A)$ adott interpretáció mellet igaz, ha x-nek nincs olyan értékelése, amire A hamis lesz; $\forall x(A)$ hamis, ha van ilyen értékelés.

egzisztenciaállítás $\exists x(A)$ adott interpretáció mellet igaz, ha x-nek van olyan értékelése, amire A igaz lesz; $\exists x(A)$ hamis, ha nincs ilyen értékelés.

Megjegyzések

- alapesetben A olyan nyitott mondat, amelyben x-nek szabad előfordulása van
- azonban A zárt mondat is lehet

  zárt mondat kvantifikálása

  $\forall x(okos(Janka))$

Változók névvel helyettesítése
Helyettesítés:

- ha A formula, akkor $A^{a/x}$ jelöli az a formulát, amiben x A-ban lévő szabad előfordulásait 'a' névvel helyettesítjük
  - $A^{a/x}$ nem ugyanaz, mint az *értékelés* – egy individuumnak több neve is lehet
  - ha A-ban nincs x-nek szabad előfordulása, akkor $A^{a/x} \Leftrightarrow A$

Következtetések:

- ha mindenre igaz, a-ra is igaz: $\forall x(A) \Rightarrow A^{a/x}$
- ha a-ra igaz, akkor van amire igaz: $A^{a/x} \Rightarrow \exists x(A)$
- összevonva: $\forall x(A) \Rightarrow \exists x(A)$
  - feltétel: a tárgyalási univerzum nem lehet üres ($U \neq \varnothing$)

Kvantifikált állítások

Összetett kvantifikált mondatok 1.
Leggyakoribb típusok

univerzális állítás
Minden holló fekete.

- hamis akkor, *ha* van olyan holló, amely nem fekete
- *Minden holló fekete.*$\not\Leftrightarrow$*Minden fekete holló.*
- kondícionálissal formaizálva: $F(x)$: x fekete; $H(x)$: x holló

$$\forall x(F(x) \supset H(x))$$

- predikátumterjedelmeket tekintve: $F \subseteq H$, azaz F minden eleme H-nak is eleme

Összetett kvantifikált mondatok 2.

egzisztenciaállítások
Van olyan holló, amely fekete.

- igaz akkor, ha van (legalább egy) valami, ami holló *és* fekete
- *Van olyan holló, amely fekete.*$\Leftrightarrow$*Van olyan fekete (valami), ami holló.*
- konjunkcióval formalizálva: $F(x)$: x fekete; $H(x)$: x holló

$$\exists x(F(x) \& H(x))$$

- predikátum terjedelmeket tekintve: $F \cap H \neq \emptyset$, azaz F és H nem diszjunkt halmazok, van közös elemük

Következtetés univerzélis állítással

példa

Minden ember halandó.
Szókratész ember.
Szókratész halandó.

- formalizálva: $\{\forall x(E(x) \supset H(x)),\ E(sz)\} \Rightarrow H(sz)$
- : $\forall x(A) \Rightarrow A^{a/x}$ alapján
$$\{\forall x(E(x) \supset H(x))\} \Rightarrow E(sz) \supset H(sz)$$
- modus ponens: $\{E(sz) \supset H(sz),\ E(sz)\} \Rightarrow H(sz)$

Összetett kvantifikált állítások tagadása

univerzális állítás tagadása

Nem minden holló fekete.
Van olyan holló, amely nem fekete.

- halmazokkal: $H \setminus F \neq \varnothing$
- formalizálva: $\sim \forall x(H(x) \supset F(x)) \Leftrightarrow \exists x(H(x) \& \sim F)$

egzisztenciaállítás tagadása

Nincs fehér holló.
Minden holló nem fehér.

- halmazokkal: $A \cap B = \varnothing$
- formalizálva: $\sim \exists x(H(x) \& F(x)) \Leftrightarrow \forall x(H(x) \supset \sim F(x))$

Az univerzális állítás furcsaságai

Ha a kondícionális előtagjának predikátumterjedelme üres, akkor az univerzális állítás igaz.

példák

Minden alma finom.

- $U =$ a kosár
- nincs alma a kosárban

Minden pegazusnak két szárnya van.

- ha az előtag üres terjedelmű, akkor akkor az előtag hamis
- hamis előtagú kondícionális mindig igaz
- az univerzális állítás is igaz lesz (nincs olyan értékelés, ami mellet a kondícionális hamis lenne)

A furcsaságok haszna

- normatív állítások akkor is igazak lehetnek, ha senki nem tartja be őket

  normatív állítások

  Jó tett helyébe jót várj.

- szűk tárgyalási univerzumban is igazak a törvényszerűségek

  szűk tárgyalási univerzum

  Akinek rossz az érettségije, az nem tanulhat tovább. (U olyan osztály, ahol mindenki jól érettségizett)

- ha mégis fel akarjuk használni következtetésben, hogy nincs üres terjedelmű előtag, akkor egy plusz premisszát kell felvenni (a *„Minden alma finom”* mellé *„Van almá”*-t)

Stiláris változatok – univerzális állítás

fordított formalizálás
Mindenki bűnös, aki fűre lép.
minden x-re: fűrelép(x) $\supset$ bűnős(x)

határozott névelő
A kecske párosujjú patás.

határozatlan névelő
Ha egy háromszög derékszögű, akkor a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

bármely, akármely
Akárki megmondhatja, hol van a kastély.
Bármelyik háromszög belső szögeinek összege 180 fok.

Stiláris változatok – univerzális állítás

csak aki
A fűre csak a kertészek léphetnek.
Csak aki kertész, léphet a fűre.
Aki nem kertész, nem léphet a fűre.
minden x-re: fűre léphet(x) $\supset$ kertész(x)

hatókör
Ha mindenki otthon marad, dühös leszek.
(minden x-re: otthon marad(x)) $\supset$ dühös lesz(én)

Stiláris változatok – egzisztenciaállítás

számosság
Csak egy legény van a gáton.
Van egy legény a gáton.
Néhány legény van a gáton

- egzisztenciaállítással a „legalább egy"-et tudjuk kifejezni
- ha fel akarjuk használni, hogy pontosan egy, vagy több mint egy dologról teszünk állítást, akkor formalizálhatunk egzisztenciális állítással – az információveszteség nem számít
- ha fel akarjuk használni, hogy pontosan egy, vagy több mint egy dologról állítunk valamit, akkor plusz premisszára van szükségünk

Azonosság

Azonosság 1.

ismerkedés
Mindenki megismerkedett mindenkivel. – Pl. egy party-n

- formalizálva: $\forall x \forall y (megismerkedett(x)(y))$
- hiba: magát már mindenki ismerte
- azonosság predikátummal: $\forall x \forall y \big(\sim x = y \supset megismerkedett(x)(y)\big)$

- hiba: nem mondunk semmit arról, ha x azonos y-nal
- bikondícionálissal: $\forall x \forall y \big(\sim x = y \equiv \mathit{megismerkedett}(x)(y) \big)$

Megjegyzés: az azonosság nem ugyanaz, mint az egyenlőség (pl. két szög lehet egyenlő, de nem azonos) $a = b$ igaz akkor, és csak akkor, ha a és b faktuális értéke azonos

Azonosság 2.
logikai igazság: minden individuum azonos önmagával

- $\Rightarrow a = a$
- $\Rightarrow \forall x(x = x)$ – nem séma!
- a logikai igazságok nem fejeznek ki információt: a világ bármely állapota esetén igazak

információ: több név is jelölheti ugyan azt az individuumot

- $a = b$

  példa

  Magyarország legmagasabb pontja a Kékestető.

- nem logikai igazságok: a világ különböző állapotait képesek kifejezni

következtetés:

- $\{F(a),\ a = b\} \Rightarrow F(b)$
- ez csak extenzionális környzetben igaz! (pl. függő beszédben nem)

Számosság
Legalább

- legalább egy dologra: $\exists x(Fx)$
- legalább két dologra: $\exists x \exists y(x \neq y \& Fx \& Fy)$
- legalább három dologra: $\exists x \exists y \exists z(x \neq y \& x \neq z \& y \neq z \& Fx \& Fy)$
- rövidítve: $\exists_n x(Fx)$ - legalább n dologra

Pontosság

- pontosan egy dologra: $\exists x \forall y(Fy \equiv x = y)$ – unicitás
- pontosan két dologra: $\exists x_1 \exists x_2 \Big(x_1 \neq x_2 \& \forall y \big(Fy \equiv (y = x_1 \vee y = x_2) \big) \Big)$
- unicitás rövidítése: $\exists ! x(Fx)$
- általános rövidítés: $\exists_n ! x(Fx)$ – pontosan n dologra

A természetes számok kifejezfehtők azonossággal, számokra hivatkozás nélkül!

Deskripció

Problémák a deskripcióval

példa

A nő, akivel Jenő teniszezik, csak kezdőkkel teniszezik.

Jenő kezdő.

- ha következtetést akarunk levonni a deskripcióból, nem formalizálhatjuk tulajdonnévként

  névként formalizálva

  csak-kezdőkkel-teniszezik(az, akivel Jenő teniszezik)

  minden x-re: teniszezik(x)(azzal, akivel Jenő teniszezik) $\supset$ kezdő(x)

Deskripció kiküszöbölése
Két lehetőség:

- *deskriptor* operátor bevezetése (nyitott mondatból képez nevet)
- átfogalmazás mondattá
  - ezt motiválja az értékrés elkerülése is

Deskripciót tartalmazó mondatok átfogalmazása egzisztenciális állításokká:

- „A jelenlegi francia király kopasz.” $\Leftrightarrow$ van egy és csak egy jelenlegi francia király, és az kopasz
- Formalizálva: $\exists x\big(\forall y(Fy \equiv y = x)\big)$ (egzisztenciál formula) $\exists x\big(\forall y(Fy \equiv y = x)\,\&\,Kx\big)$ (állítás)

Feladatok 1.
Formaizáld az alábbi kvantifikált mondatokat:

- Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
- Nincsen rózsa a tövis nékül.

Hogyan formalizálnád az alábbi mondatokat azonosságperdikátum segítségével?

- Janka vagy Jenőhöz megy feleségül, vagy senkihez.
- Géza csak Jenőt és Jankát ismeri.
- Ha két zsivány beszélget, akkor egy harmadik harmadik hallgat.

Feladatok 2.
Formalizáld az alábbi, deskripciót tartalmazó mondatokat!

- A nővérem Győrben él és rendőr.
- A Győrben élő nővérem rendőr.