LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Mittelholcz Iván

Szakmai felelős: Mittelholcz Iván

2011. február

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Logika és érveléstechnika

7. hét

Elsőrendű logika 3.

Mittelholcz Iván

Készült a következő mű felhasználásával:
Ruzsa Imre–Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris, 1997.

Deskripció

Problémák a deskripcióval
Következtetés:

példa
A nő, akivel Jenő teniszezik, csak kezdőkkel teniszezik.

Jenő kezdő.

- ha következtetést akarunk levonni a deskripcióból, nem formalizálhatjuk tulajdonnévként

  névként formalizálva

  csak-kezdőkkel-teniszezik (az, akivel Jenő teniszezik)

Nulla vagy több jelöletű deskripciók:

példák
A jelenlegi francia király kopasz.
A francia király kopasz.

Deskripció kiküszöbölése
Két lehetőség:

- *deskriptor* operátor bevezetése (nyitott mondatból képez nevet)
- átfogalmazás mondattá
  - ezt motiválja az értékrés elkerülése is

Deskripciót tartalmazó mondatok átfogalmazása egzisztenciális állításokká:

- „a jelenlegi francia király” ⇔ „van egy és csak egy jelenlegi francia király”
- formalizálva: Fx: x jelenlegi francia király;

  $$\exists x\big(\forall y(Fy \equiv y = x)\big)$$

  (ez a deskripció egzisztenciaformulája)

Deskripciót tartalmazó mondatok

névként formalizálva
kopasz (jelenlegi-francia-király)
$\sim$ kopasz (jelenlegi-francia-király)

- $\Rightarrow A \vee \sim A$ alapján valamelyiknek igaznak kell(ene) lennie

mondatként formalizálva
$\exists x\big(\forall y(Fy \equiv y = x)\,\&\, Kx\big)$
$\exists x\big(\forall y(Fy \equiv y = x)\,\&\sim Kx\big)$

- mind a két állítás lehet egyszerre hamis (mert $\sim \exists x(Fx)$)
- álalánosítva: a deskripcióra vonatkozó predikátumot konjunkcióval hozzáfűzzük az egzisztenciálformulához (monadikus predikátumokra)

Analitikus táblázat

Analitikus táblázat első rendben

- mondat osztályok kielégíthetőségének ellenőrzése
- ha a premisszák és a feltételezett konklúzió együtt nem kielégthető (a táblázat minden ága zárt), akkor a következtetés helyes

emlékeztető
Ha Géza kapál, Jenő vagy Janka csinálja az ebédet.
Géza kapál.
Nem Jenő csinálja az ebédet.

Janka csinálja az ebédet.

Formalizálva elsőrendben:

- g: Géza; e: Jenő; a: Janka
- Kx: x kapál; Ex: x ebédet csinál
- $\big\{Kg \supset (Ee \vee Ea),\ Kg,\ \sim Ee\big\} \Rightarrow Ea$

Ellenőrzés

- felvesszük a premisszákat és a feltételezett konklúzió negáltját
- felvesszük a származékokat
  - atomi formulák (pl. Fx) és negáltjaik származéka önmaguk
  - összetett formulák származékai átalakítások után konjunktív (egymás alá írjuk) vagy alternatív (elágazás) formulák
- a következtetés helyes, ha minden ágon ellentmondásos

1.	$Kg \supset (Ee \vee Ea)$					
2.	Kg					
3.	$\sim Ee$					
4.	$\sim Ea$					
5.	$\sim Kg \vee (Ee \vee Ea)$	[1]				
6.	$\sim Kg$	[5]	$Ee \vee Ea$	[5]		
7.	* (2,6)		Ee	[6]	Ea	[6]
			* (3,7)		* (4,7)	

Az univerzális kvantor származékai
$\forall xA$ származéka $A^{a/x}$: ha mindenre igaz, akkor a-ra is

- a névparaméter; tetszőleges, az interpretációban szereplő név lehet
- az ágon előforduló minden névre fel kell venni (hisz mindegyikre igaz)
- ha az ágon még nem szerepel név, akkor bevezetünk egy tetszőleges nevet ($U \neq \emptyset$)
- ha később jelenik meg új név az ágon, akkor arra is föl kell venni $\forall xA$ származékát

példa
Minden ember halandó.
Szókratész ember.

Szókratész halandó.

Az univerzális kvantor származékai 2.
Formalizálva:

- Ex: x ember; Hx: x halandó; s: Szókratész
- $\{\forall x(Ex \supset Hx),\ Es\} \Rightarrow Hs$

1.	$\forall x(Ex \supset Hx)$			
2.	Es			
3.	$\sim Hs$			
4.	$\sim Es \vee Hs$	[1]		
5.	$\sim Es$	[4]	Hs	[4]
	*(2,5)		* (3,5)	

Az egzisztenciális kvantor és azonosság származékai
$\exists xA$ származéka $A^{b/x}$: van valami, amire igaz, nevezzük b-nek

- elég egy nevet fölvenni, amire igaz A
- ha már szerepel az ágon egy $A^{a/x}$ akkor nem kell új $A^{b/x}$-et bevezetni
- ha nincs, akkor új, a vizsgált ágon még nem szereplő névvel kell fölvenni
- ha volt már az ágon $\forall xA$ származéka fölvéve, akkor az új névvel is föl kell venni

Azonosság:

- $a = b$ származékaként föl kell venni az $A^{b/a}$ és az $A^{a/b}$ formulákat is (ha valami a-ra igaz, akkor b-re is)
- az $a \neq a$ szintén ellentmondásnak minősül és zárja az ágat, amin megjelenik

Kvantorok sorrendje
Azonos kvantorok sorrendje tetszőleges:

- $\forall x \forall y(A) \Leftrightarrow \forall y \forall x(A)$
- $\exists x \exists y(A) \Leftrightarrow \exists y \exists x(A)$

következtetés
Van valaki, aki mindenkinek barátja.
Mindenkinek van (legalább) egy barátja

- $\exists x \forall y(A) \Rightarrow \forall y \exists x(A)$
- $\forall y \exists x(A) \not\Rightarrow \exists x \forall y(A)$

Végtelen ág az analitikus táblán:

- $\forall x \exists y(Fxy)$ származékainak felvétele végtelen ágat eredményez
- ténylegesen F interpretációjától függ, kell-e végtelen individuumtartomány (pl. minden számnál van nagyobb, mindenkinek van anyja)

Feladatok
Vizsgáld meg analitikus táblázat segítségével az alábbi, elsőrendű következtetést!

1.	Gézának nincs olyan barátja, aki nem ismeri Jankát.
2.	Jenő Géza barátja.
3.	Jenő ismeri Jankát.