LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Mittelholcz Iván

Szakmai felelős: Mittelholcz Iván

2011. február

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Logika és érveléstechnika

8. hét

Elsőrendű logika 4.

Mittelholcz Iván

Készült a következő mű felhasználásával:
Ruzsa Imre–Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris, 1997.

Tárgynyelv és metanyelv

Hazug paradoxon

kétértékűség megsértése
Ez a mondat hamis.

Elemzés:

- Tegyük fel, hogy a mondat igaz. Ekkor teljesül, amit állít: hamis (nem igaz). Ellentmondás!
- Tegyük fel, hogy a mondat hamis. Ekkor nem igaz, amit állít, tehát nem hamis. Ellentmondás!

Lehetséges stratégiák:

- értékréses logika
- önreferencia tiltása

A paradoxon elkerülése

kétértékűség megsértése – ismét
A következő mondat igaz.
Az előző mondat hamis.

Elemzés:

- Tegyük fel, hogy az első mondat igaz. Ekkor igaz, amit a második mondat állít, tehát az első mondat hamis. Ellentmondás!
- Tegyük fel, hogy az első mondat hamis. Ekkor nem igaz, amit a második mondat állít, tehát az első mondat nem hamis. Ellentmondás!

Az önreferencia tiltása nem elég: azt kell megtiltani, hogy egy nyelven belül az adott nyelv bármely formulájára referáljunk (más lehetőségek is vannak).

Tárgy- és metanyelv
Megkülönböztetés:

- tárgynyelv: az a nyelv, amiről beszélünk
  - elsőrendű nyelv, mint tárgynyelv része pl. a &, $\supset$, $\sim$ stb.
- metanyelv: az a nyelv, amin beszélünk a tárgynyelvről
  - az elsőrendű nyelv metanyelvének része pl. a $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\nRightarrow$ stb. (következményreláció: állítások közötti viszony, ami az állításokhoz képest meta nyelven fejezzük ki)
- szótár: kifejezések fordítása a két nyelv között

Természetes nyelv:

- mindig rekonstruálható benne a hazug-paradoxon
- általában metanyelvként használjuk

Elsőrendű nyelvek

Grammatika
$L^1 = \langle Log, Var, Con, Term, Form\rangle$

- logikai konstansok: $Log = \{(,\ ),\ \sim,\ \&,\ \forall,\ =\}$
  - $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\exists$ szintén fölvehető Log-ba, de definícióval is bevezethetőek
- kvantifikálható változók: $Var = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
  - végtelen változó áll rendelkezésre
- nem logikai konstansok: Con tartalmazza a neveket és a predikátumokat
  - a felbontatlanul hagyott mondatok 0 bemenetű predikátumokként kezelendők
  - Con akár üres is lehet
- terminusok: $Term$ nevek és változók
  - csak a formulák ($Form$) definíciójához szükségesek

Formulák
Induktív definíció:

- bázis: megadjuk a definiálandó osztály egy részosztályát (*atomi formulák*)
  - ha F n-argumentumú predikátum és $t_1, \ldots, t_n$ terminusok, akkor $F(t_1 \ldots t_n)$ atomi formula
  - ha t_1 és t_2 terminusok, akkor $t_1 = t_2$ atomi formula
  - az atomi formulák formulák
- indukciós szabályok: milyen további elemek tartoznak az osztályba
  - ha A formula, akkor $\sim A$ is formula
  - ha A éa B formula, akkor $A \& B$ is formula
- záradék: más dolgok nem tartoznak az osztályba

Szemantikai felépítés
Interpretáció: $Ip = \langle U, \phi \rangle$

- U: individuum tartomány (tárgyalási univerzum)
- ϕ: függvény, ami faktuális értéket rendel a nyelv nem logikai konsatansaihoz (Con)
  - ha c névkonstans, akkor $\phi(c) \in U$
  - ha F 0 argumentumú predikátum, akkor $\phi(F)$ 0 vagy 1 (igazságérték)
  - ha F n argumentumú predikátum, akkor $\phi(F)$ U elemeiből képzett rendezett n-esek osztálya

Értékelés: v függvény, ami a nyelv változóihoz U egy-egy elemét rendeli

- ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$

$|\ldots|_v^{Ip}$: jelöli $\ldots$ kifejezés faktuális értékét
Pl. $|A\&B|_v^{Ip} = 1$ ha $|A|_v^{Ip} = 1$ és $|B|_v^{Ip} = 1$

Szintaktikai felépítés
Szemantikai felépítés:

- nem tekint el a logikai szavak jelentésétől ($\sim$, $\&$, $\vee$ stb.)
- az interpretáció (az individuumokra és a predikátumok jelentése) szükséges a felépítéshez, de a később már nincs szükség rá

Szintaktikai felépítés (kalkulus):

- tisztán formai szabályok
- nem vesz figyelembe semmi „nyelven kívülit” (individuumokat, jelentést)

Kérdés: lehet-e szerkeszteni tisztán szintaktikai rendszert, amely lefedi a szemantikait? szintaktikai következményreláció jele: $\vdash$

- egy kalkulus *helyes*, ha $\Gamma \vdash A$ esetén mindig $\Gamma \Rightarrow A$ is fennáll
- egy kalkulus *teljes*, ha $\Gamma \Rightarrow A$ esetén mindig fennáll $\Gamma \vdash A$ is

Szintaktikai felépítés

- alapsémák
  - pl. $(A \supset (B \supset A))$
- levezetési szabályok
  - ha A alapformula, vagy $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$
  - ha $\Gamma \vdash (A \supset B)$ és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$ (*modus ponens*)

Megjegyzések

- elsőrendű szemantikához van szintaxis, amely helyes és teljes
- elsőrendben nincs univerzális eldöntési eljárás (emlékezz az analitikus táblázat végtelen regresszusára $\forall x \exists y(Fxy)$ esetén)