LOGIKA ÉS ÉRVELÉSTECHNIKA

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Mittelholcz Iván

Szakmai felelős: Mittelholcz Iván

2011. február

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Logika és érveléstechnika

9. hét

A logika határai

Mittelholcz Iván

Készült a következő mű felhasználásával:
Ruzsa Imre–Máté András: Bevezetés a modern logikába. Osiris, 1997.

Univerzális döntési eljárás
Eldöntésprobléma: felismerhető-e automatikusan minden esetben a következményreláció ($\Gamma \Rightarrow A$ vagy $\Gamma \vdash A$) fennállása

Különböző módszerek:

- analitikus táblázat
- Turing-gép
- rekurzív függvények (Kleene)
- algoritmusok (Markov)

Eredmények: a különböző megközelítések ekvivalensek, és *nem* univerzálisak – nincs egyetemes eljárás, amivel a következtetés eldönthető.

Klasszikus definíció

példa
Az ember értelmes állat.

definiendum = genus proximum + differentia specifica

- genus proximum: legközelebbi nem fogalom (pl. állat)
- differentia specifica: fajta alkotó különbség (pl. értelmes)
- problémák:
  - csak monadikus predikátumok definiálására alkalmas
  - mappák (hierarchikus) vs. címkék (keresztbe osztályozás)

Formális definíció

- két azonos szabad változókat tartalmazó, nyitott mondat
  - lekötött változók eltérhetnek
- jele: $\Leftrightarrow_{df}$

példa
x bátyja y-nak $\Leftrightarrow_{df}$ x idősebb y-nál & x testvére y-nak & x férfi

Egy definíció után a nyitott mondatokat univerzálisan kvantifikálva és a definíció jelét bikondícionálisra cserélve igaz állítást kapunk:

példa
$\forall x \forall y\big(($ x bátyja y-nak $) \equiv ($ x idősebb y-nál & x testvére y-nak & x férfi$)\big)$

Axiómatikus módszer
Elsőrendű elmélet: $\mathcal{E} = \langle \mathcal{L}, \Gamma \rangle$

- $\mathcal{L}$: egy elsőrendű nyelv
- Γ: $\mathcal{L}$ nyelv formuláinak egy osztálya (axiómák)
- alapfogalmak: $\mathcal{L}$ nemlogikai konstansai
- származtatott fogalmak: alapfogalmak + definíció
- tételek: Γ következeménnyei
  - Γ végetelen is lehet
  - Γ akár üres is lehet
  - *valódi tételek*: nem logikai igazságok
- $\mathcal{E}$ negációteljes, ha nincs eldönthetetlen problémája – azaz, ha tetszőleges A formula bizonyítható vagy cáfolható az elméletben

Peano aritmetika
Természetes számok aritmetikája

- nemlogikai konstansok: $\langle 0, \ ', +, \cdot \rangle$
  - a $'$ a tovább számolás névfunktora ($n' = n + 1$)
- axiómák:
  - $\forall x \sim (x' = 0)$
  - $\forall x \forall y\big((x' = y') \supset (x = y)\big)$
  - $\forall x(x + 0 = x)$
  - $\forall x \forall y\big(x + y' = (x + y)'\big)$
  - $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x \forall y\big(x \cdot y' = (x \cdot y) + x\big)$
  - $\big(A^{0/x} \& \forall x(A \supset A^{x'/x}) \supset \forall x A\big)$

Nemteljességi tétel (Gödel, 1931)
Ha egy formális elmélet elegendően erős és konzisztens, akkor nem lehet negációteljes.

- formális elmélet: formalizálható (pl. elsőrendben), rekurzívan felsorolható axiómarendszerrel
- elegendően erős: tartalmazza a Peano aritmetikát
- konzisztens: nincs benne olyan mondat, ami bizonyítható és cáfolható is volna
- nem negációteljes: megfogalmazható benne olyan mondat, ami se nem bizonyítható, se nem cáfolható

Nemteljesség és konzisztencia

- inkonzisztens elmélet: ellentmondó premisszákból bármi – és annak az ellenkezője is – levezethető

  „bármi" levezetése

  premisszák: $\{A, \sim A\}$

  1. lépés: $\{A\} \Rightarrow A \vee B$

  2. lépés: $\{A \vee B, \sim A\} \Rightarrow B$

- konzisztens (ellentmondásmentes) egy elmélet, ha van olyan mondata, ami nem vezethető le az axiómáiból
- nemteljesség: az elméletnek van olyan mondata, aminek a tagadása sem vezethető le az elméletből (és ő maga sem)
  - mindig ilyen az elmélet ellentmondásmentességét kimondó állítás (2. nemteljességi tétel)

Összefoglalás

- Nemteljesség: minden (elegendően erős) elméletnek vannak problémái, ahol nem bizonyítható sem az állítás, sem annak tagadása.

- Univerzális eldönthetőség hiánya: ahol lehetséges a bizonyítás, ott sem mindig ismerhető fel automatikusan.

Feladatok

Definiáld *az x testvére y-nak* kétargumentumú predikátumot következők segítségével:

- x és y-nak van közös szülője
- figyelj a kötött változókra is

Definiáld *az x féltestvére y-nak* kétargumentumú predikátumot is!

- x és y-nak pontosan egy közös szülője van