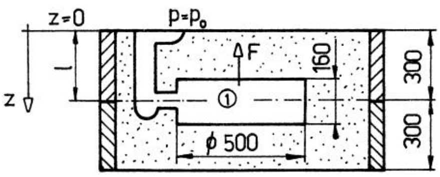
Áramlástani alapok

(0. fejezet)

1. **Mekkora erő igyekszik a vázolt homokforma tetejét felemelni, ha az olvadt fém sűrűsége:**

$$\rho = 7{,}3 \cdot 10^3\ [\mathrm{kg/m^3}]$$



A nyomás változása nehézségi erőtér esetén a térerő irányában:

$$p = \rho \cdot g \cdot z + \text{áll}$$

Ahol az **állandó** értéke a z = 0 ekvipotenciális felülethez tartozó értékekből határozható meg, azaz:

$$p_0 = \rho \cdot g \cdot 0 + \text{áll.} \rightarrow \textbf{állandó} = \mathbf{p_0}$$

A biztonság okáért célszerű a forma felezősíkjában ① fellépő nyomással számolni, azaz **z = 1**, tehát:

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot l + p_0$$

Ebből:

$$p_1 - p_0 = \rho \cdot g \cdot l = 7300 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}3 = 21484\ [\mathrm{N/m^2}]$$

A keresett erő pedig:

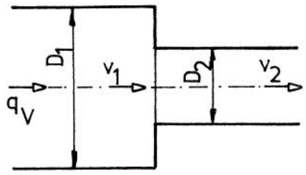
$$\mathbf{F} = (p_1 - p_o) \cdot A = 21484 \cdot 0{,}198 = \mathbf{4253{,}83\ [N]}$$

ahol

$$A = \frac{0{,}5^2 \cdot \pi}{4} = 0{,}198 \quad [\mathrm{m^2}]$$

2. **Az ábrán vázolt szűkületen q_v térfogatáram áramlik át. Határozza meg az átlagsebességeket.**

$$D_1 = 22\ [\mathrm{mm}],\ D_2 = 10\ [\mathrm{mm}],\ q_r = 0{,}2 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m^3/s}]$$



Felírva a kontinuitás egyenletét

$$q_v = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{áll.}$$

$$\mathbf{v_1} = \frac{q_v}{A_1} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{3{,}8 \cdot 10^{-4}} = 10 \cdot \frac{0{,}2}{3{,}8} = \mathbf{0{,}05} \quad \left[\mathbf{m/s}\right]$$

$$v_2 = \frac{q_v}{A_2} = \frac{0,2 \cdot 10^{-3}}{0,785 \cdot 10^{-4}} = 10 \cdot \frac{0,2}{0,785} = \mathbf{2,55} \quad \left[\mathbf{m}/\mathbf{s}\right]$$

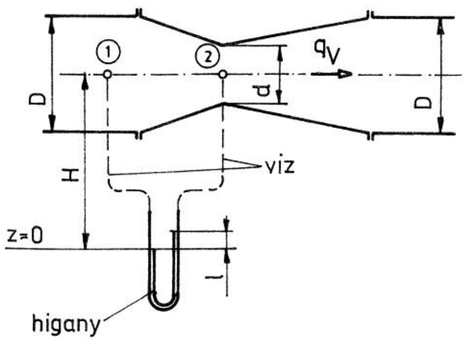
ahol

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 2,2^2 \cdot 10^{-4} = 3,8 \cdot 10^{-4} \quad \left[m^2\right]$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot D_2^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot 10^{-4} = 0,785 \cdot 10^{-4} \quad \left[m^2\right]$$

3. A csővezetékben áramló vízmennyiséget Venturi-csővel és a hozzákapcsolt differenciál-nyomásmérő segítségével mérjük.

Meghatározandó a térfogatáram (q_v) nagysága.
Adatok: D = 300 [mm], d = 150 [mm], l = 0,23 [m]
Sűrűségek: víz = 999,7 [kg/m^3], higany: 13,6.10^3 [kg/m^3]



A térfogatáram a kontinuitás ismert összefüggéséből:

$$q_v = A_2 \cdot v_2$$

A v_2 áramlási sebesség pedig az áramvonal két pontjára felírt Bernoulli-egyenletből (az áramlás stacionárius):

$$\left[\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}\right]_1^2 = 0$$

Az áramvonal két pontjában az összetartozó adatok:

① pont	② pont
v_1; p_1; $U_1 = gH$	v_2; p_2; $U_2 = gH$

Behelyettesítés, majd rendezés után:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\right]$$

A két sebesség aránya a kontinuitásból:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad \rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Ennek felhasználásával a v_2 sebesség:

$$v_2 = \left[\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2} \right]^{1/2}$$

Ebben az egyenletben ismeretlen még a $\Delta p = p_1 - p_2$ nyomáskülönbség is, amely a differenciál – nyomásmérő egyensúlyi egyenletéből határozható meg. Ez az egyenlet célszerűen a két folyadék érintkezési felületénél felvett ekvipotenciális felület (z=0) segítségével írható fel, s a következő:

$$p_1 + \rho_v \cdot g\,H = \rho_v \cdot g\,(H - l) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot l + p_2$$

Ebből a nyomáskülönbség:

$$p_1 - p_2 = g \cdot l\,(\rho_{Hg} - \rho_v) = 9{,}81 \cdot 0{,}23\,(13{,}6 \cdot 10^3 - 999{,}7) = 28430\ [N/m^2]$$

A keresett sebesség pedig:

$$\mathbf{v_2} = \left[\frac{2}{999{,}7} \cdot \frac{28430}{1 - \left(\frac{1{,}5}{3} \right)^4} \right]^{1/2} = \mathbf{7{,}78}\ \left[\mathbf{m/s} \right]$$

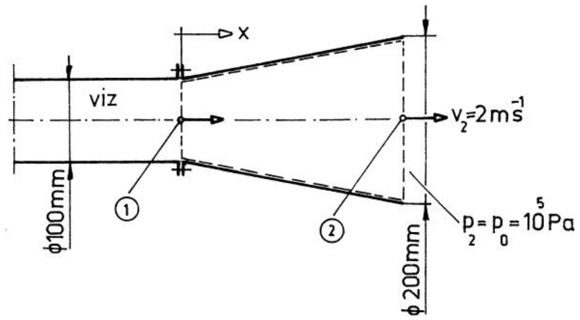
ahol

$$\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = \left(\frac{d}{D} \right)^4 = \left(\frac{1{,}5}{3} \right)^4$$

A térfogatáram:

$$\mathbf{q_v} = A_2 \cdot v_2 = 177{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 7{,}78 = \mathbf{0{,}138\ [m^3/s]}$$

4. **Határozza meg, hogy csővégre szerelt diffúzor esetén, az áramlás milyen erőhatást fejt ki az összefogó csavarokra.**



A súrlódási és a súlyerőt elhanyagolva az ellenőrző felületre felírt impulzus tétel a következő:

$$\rho \cdot A_2 \cdot v_2^2 - \rho \cdot A_1 \cdot v_1^2 = -\,[p_2 \cdot A_2 - p_1 \cdot A_1] + F$$

ahol:

F – a palástfelületen a diffúzor által a folyadéknak átadott erő.

A felírt egyenletben még további két ismeretlen van, a v_1 áramlási sebesség és a p_1 nyomás. Az előbbit a kontinuitásból, az utóbbit pedig a Bernoulli-egyenletből lehet meghatározni.

Felírva a kontinuitást, majd a v_1-et kifejezve:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow \mathbf{v_1} = v_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} = 2 \cdot \left(\frac{2}{1} \right)^2 = \mathbf{8}\ \left[\mathbf{m/s} \right]$$

ahol

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

Az áramvonal két pontjára (1-2) felírt Bernoulli-egyenletből pedig az ismeretlen p_1 nyomás értéke:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \rightarrow \mathbf{p_1} = p_2 + \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) =$$

$$= 10^5 + \frac{10^3}{2}\left(2^2 - 8^2\right) = \mathbf{7 \cdot 10^{-4}} \left[\mathbf{N}/\mathbf{m}^2\right]$$

Ezután az impulzus-tételből az ismeretlen **F** erő:

$$\mathbf{F} = \rho\,(A_2 \cdot v_2^2 - A_1 \cdot v_1^2) + p_2 \cdot A_2 - p_1 A_1 =$$

$$=10^3(31{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 - 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 8^2) + 10^5 \cdot 31{,}4 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^4 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 125{,}6 - 499{,}2 + 3140 - 546 = \mathbf{2220{,}4\ [N]}$$

A diffúzort terhelő erő ezzel ellentett értelmű, azaz:

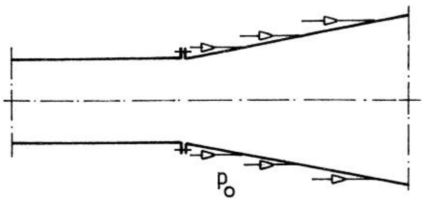
$$F_d = -\,2220{,}4\ [N]$$

A csavarok terhelésének a meghatározásához figyelembe kell venni a külső nyomásból származó palástra ható erőt is.

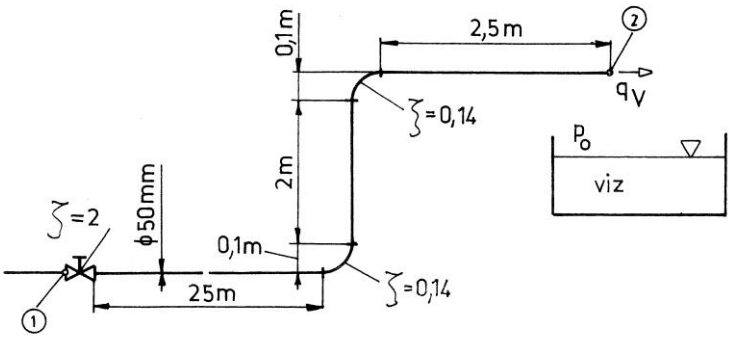
$$\mathbf{F_k} = A_k \cdot p_0 = (A_2 - A_1) \cdot p_0 = (31{,}4 \cdot 10^{-3} - 7{,}8 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^5 = \mathbf{2360\ [N]}$$

A csavarokat terhelő erő pedig:

$$\mathbf{F_{cs}} = F_d + F_k = -\,2220{,}4 + 2360 = \mathbf{139{,}6\ [N]}$$



5. Határozza meg az alábbi elrendezésre a ($p_1 - p_0$) nyomáskülönbség értékét.



A hidraulikailag simának tekinthető csővezetékben áramló víz jellemzői:
sűrűsége: 999,7 [kg/m^3]; $q_v = 3 \cdot 10^{-3}$ [m^3/s]
viszkozitása: $1{,}306 \cdot 10^{-6}$ [m^2/s]
Az áramvonal két pontjára (1-2) felírt veszteséges Bernoulli egyenlet:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 + 0 = p_0 + \rho \cdot g \cdot H + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 + \Delta p\,.$$

Ebből a keresett nyomáskülönbség:

$$p_1 - p_0 = \rho \cdot g \cdot H + \Delta p = \rho \cdot g \cdot H + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot \left[\frac{\sum l}{d} \cdot \lambda + \sum \xi \right] =$$

$$= 999,7 \cdot 9,81 \cdot 2,2 + \frac{999,7}{2} \cdot 1,53^2 \cdot \left[\frac{29,5}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot 0,0203 + 2,28 \right] =$$

$$= \mathbf{36296,073} \left[\mathbf{N/m^2} \right] = \mathbf{36,3} \; [\mathbf{kPa}]$$

ahol

v – az áramlás közepes sebessége = $\frac{q_v}{A} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{19,6 \cdot 10^{-4}} = 1,53 \; [m/s]$.

H – a z =0 ekvipotenciális felülettől számított távolság = 2 + 0,1 + 0,1 = 2,2 [m]

Σζ– a veszteségtényezők összege: 2 + 0,14 + 0,14 = 2,28

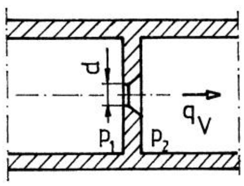
Λ – csősúrlódási tényező: $\frac{0,316}{R_e^{1/4}} = \frac{0,316}{58846^{1/4}} = 0,0203$

mert

$$R_e = \frac{v \cdot d}{\upsilon} = \frac{1,53 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{1,306 \cdot 10^{-6}} = 58846 > 2320 \; .$$

6. Határozza meg a mérőperemen áthaladó térfogatáramot.

Adatok: d = 1,2 [mm] ρ = 880 [kg/m^3]
p_1 = 6,3 [MPa] μ = 0,63
p_2 = 3,8 [MPa]

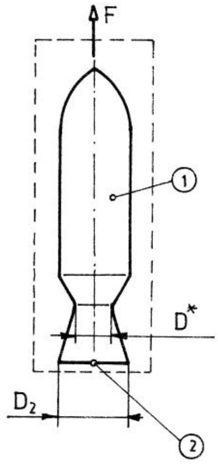


Az általános átfolyási egyenlet:

$$q_v = \mu \cdot A \cdot \left[\frac{2}{\rho} \cdot \Delta p \right]^{1/2} = 0,63 \cdot 1,13 \cdot 10^{-6} \cdot \left[\frac{2}{880} \cdot (63 - 38) \cdot 10^5 \right]^{1/2} =$$

$$= \mathbf{0,54 \cdot 10^{-4}} \left[\mathbf{m^3/s} \right] = \mathbf{3,24} \left[\mathbf{dm^3/min} \right]$$

7. **Határozza meg a 0.45. ábrán szereplő rakétához kapcsolt Laval-cső maximális – és legszűkebb keresztmetszetéhez tartozó átmérőket.**



Adatok: $F = 5 \cdot 10^4$ [N]; $T_1 = 1373$ [K]; $p_1 = 20 \cdot 10^5$ [Pa]; $p_2 = 10^5$ [Pa];
$C_p = 1010$ [J/kg K]; $\kappa=1,4$; $\rho\Big|_{0,98\ (bar)}^{0\ (°C)} = 1,252\ \left[kg/m^3\right]$

A szükséges tolóerőt a kiáramló gáz impulzusereje szolgáltatja. A jelölt ellenőrző felületre felírt impulzus tételből:

$$F = \rho_2 \cdot A_2 \cdot u_2^2$$

Ezen összefüggésből határozható meg a Laval-cső maximális keresztmetszete (A_2), de ismeretlen az u_2 és a ρ_2 is. Az u_2 kiáramlási sebesség felírható:
egyrészt az izentrópikus áramlásra levezetett összefüggés alapján:

$$u_2^2 = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]$$

másrészt pedig az összenyomható közeg energia egyenlete alapján:

$$T_1 + T_{1_{din}} = T_2 + \frac{u_2^2}{2 \cdot c_p}$$

Ahol jelen esetben $T_{1din} = 0$, mert a tartályban a gázáramlási sebessége $u_1 = 0$.
Mindezt figyelembe véve írható:

$$u_2^2 = 2 \cdot c_p (T_1 - T_2) = 2 \cdot c_p \cdot T_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Az izentrópikus állapotváltozás esetén a hőmérsékletviszonyra érvényes

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

összefüggés felhasználásával a kiáramlási sebesség:

$$\mathbf{u_2^2} = 2 \cdot c_p \cdot T_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] =$$

$$= 2 \cdot 1010 \cdot 1373\left[1 - \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}}\right] = \mathbf{1584,4 \cdot 10^3}\ \left[\mathbf{m^2/s^2}\right]$$

A gáz sűrűsége kiáramlásnál (ρ_2) az általános gáztörvény – $\frac{p}{\rho} = R \cdot T$ – alapján határozható meg:

$$\rho_2 = \frac{p_2 \cdot \rho \cdot T}{p \cdot T_2} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 1{,}252 \cdot 273}{0{,}98 \cdot 10^5 \cdot 580{,}7} = 0{,}601 \quad \left[{}^{kg}\!/\!{}_{m^3} \right]$$

ahol

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1373 \cdot \left(\frac{1}{20} \right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 580{,}7 \quad [K]$$

Ezek után az impulzus tételből kifejezve a szükséges keresztmetszetet:

$$A_2 = \frac{F}{\rho_2 \cdot u_2^2} = \frac{5 \cdot 10^4}{0{,}601 \cdot 158{,}44 \cdot 10^4} = 0{,}0525 \quad [m^2]$$

Az ehhez tartozó átmérő **D_2 = 0,259 [m] ~ 260 [mm]**.
A legszűkebb keresztmetszethez tartozó adat a kontinuitás összefüggéséből határozható meg:

$$A^* = \frac{\rho_2 \cdot A_2 \cdot u_2}{\rho^* \cdot u^*}$$

Azonban ismeretlen még a ρ^* és az u* értéke is. A kritikus értékekre vonatkozó hányadosok alapján:

$$\frac{\rho^*}{\rho_1} = 0{,}639 \rightarrow \rho^* = 0{,}639 \cdot \rho_1 = 0{,}639 \cdot 5{,}08 = 3{,}25 \quad \left[{}^{kg}\!/\!{}_{m^3} \right]$$

ahol

$$\rho_1 = \frac{p_1 \cdot \rho \cdot T}{p \cdot T_1} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 1{,}252 \cdot 273}{0{,}98 \cdot 10^5 \cdot 1373} = 5{,}08 \quad \left[{}^{kg}\!/\!{}_{m^3} \right]$$

A legszűkebb keresztmetszetben, mint ismert: M=1, azaz $a^* = u^*$

de $\frac{a^*}{a_1} = 0{,}913 \rightarrow a^* = 0{,}913 \cdot a_1 = 0{,}913 \cdot 741 = 676{,}5 \left[{}^{m}\!/\!{}_{s} \right] = u^*$

ahol

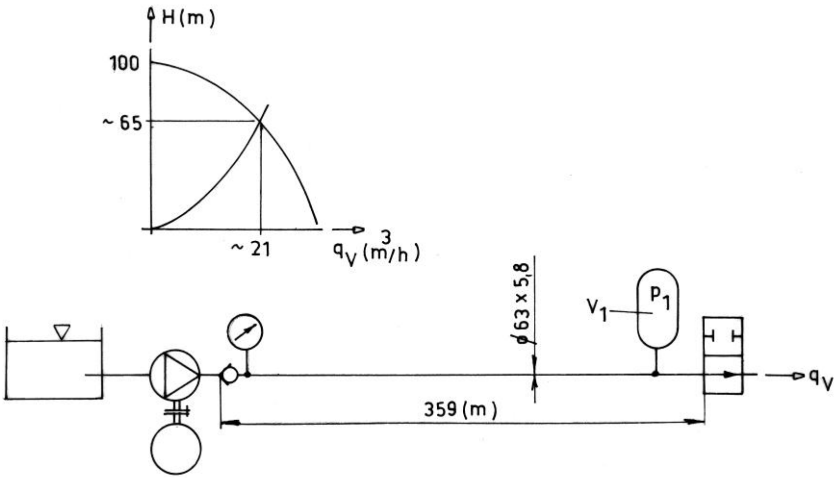
$$a_1 = 20 \cdot T_1^{1/2} = 20 \cdot 1373^{1/2} = 741 \quad [m/s].$$

Visszatérve a keresett keresztmetszet összefüggéséhez:

$$A^* = \frac{\rho_2 \cdot A_2 \cdot u_2}{\rho^* \cdot u^*} = \frac{0{,}601 \cdot 0{,}0525 \cdot 1258{,}73}{3{,}25 \cdot 676{,}5} = 0{,}0181 \quad [m^2]$$

Ebből a szükséges átmérő: **D^* = 152 [mm].**

8. Az alábbi csővezetékben egy örvényszivattyú gázolajat szállít. A vezetéket t_z = 45 [ms] alatt elzárják, határozza meg a kialakuló nyomásnövekedést és ha szükséges válasszon a csillapításra hidroakkumulátort.



Adatok: q_V = 21 [m³/h]; ρ = 860 [kg/m³]; υ = $8\cdot10^{-6}$ [m²/s]; $E_f = 1{,}62\cdot10^{9}$ [Pa]; $E_{cső} = 7\cdot10^{8}$ [Pa].

A vezetékszakasz statikus nyomását annak ellenállása határozza meg:

$$p_{st.} = \Delta p = \frac{\rho}{2}\cdot v^2 \cdot \frac{l}{d}\cdot\lambda$$

ahol

$$v = \frac{q_v}{A} = \frac{5{,}83\cdot10^{-3}}{20{,}74\cdot10^{-4}} = 2{,}82\ \left[{}^{m}\!/_{s}\right]$$

$$R_e = \frac{v\cdot d}{\upsilon} = \frac{2{,}82\cdot51{,}4\cdot10^{-3}}{8\cdot10^{-6}} = 18{,}12\cdot10^{3} > 2320$$

$$\lambda = \frac{0{,}316}{R_e^{1/4}} = \frac{0{,}316}{(1{,}812\cdot10^{3})^{1/4}} = 2{,}724\cdot10^{-2}$$

Ezekkel a statikus nyomás:

$$\mathbf{p_{st.}} = \Delta p = \frac{860}{2}\cdot 2{,}82^2\cdot\frac{359}{51{,}4\cdot10^{-3}}\cdot 2{,}724\cdot10^{-2} = 6{,}51\cdot10^{5}\,[\mathrm{Pa}] = \mathbf{6{,}51\ [bar]}$$

A gyors zárás következtében előálló nyomásnövekedés:

$$\Delta p_z = \rho\cdot a\cdot v$$

ahol

$$a - \text{a hangsebesség} = \left(\frac{E_R}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Az eredő térfogati rugalmassági modulusz pedig:

$$\frac{1}{E_R} = \frac{1}{E_f} + \frac{1}{E_{Cső}\cdot\frac{s}{d}} = \frac{1}{1{,}62\cdot10^{9}} + \frac{1}{7\cdot10^{8}\cdot\frac{5{,}8}{51{,}4}} = 13{,}287\cdot10^{-9}\ \left[{}^{1}\!/_{Pa}\right]$$

$$\mathbf{E_R = 7{,}526\cdot10^{7}\ [Pa]}$$

Ezzel a hangsebesség:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{7{,}526\cdot10^{7}}{860}\right)^{1/2} = \left(8{,}75\cdot10^{4}\right)^{1/2} = \mathbf{296}\ \left[{}^{\mathbf{m}}\!/_{\mathbf{s}}\right].$$

A nyomásnövekedés pedig

$$\mathbf{\Delta p_z} = \rho \cdot a \cdot v = 860 \cdot 296 \cdot 2{,}82 = \mathbf{7{,}18 \cdot 10^5\ [Pa].}$$

Ezzel a rendszer maximális nyomása:

$$\mathbf{p_{(max)}} = p_{st} + \Delta p_z = 6{,}51 + 7{,}18 = \mathbf{13{,}69\ [bar].}$$

A főidő:

$$t_{főidő} = \frac{2 \cdot L}{a} = \frac{2 \cdot 359}{296} = \mathbf{2{,}43}\ [\mathbf{s}] \gg \mathbf{45}\ [\mathbf{ms}]!\ .$$

A rendszerben 10 [bar]-nál nagyobb nyomás nem engedhető meg, ezért szükség van a hidroakkumulátor beépítésére.

A szükséges össztérfogat:

$$V_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot (n-1)}{p_1^{\frac{1}{n}} \cdot \left(p_3^{\frac{n-1}{n}} - p_2^{\frac{n-1}{n}} \right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 640 \cdot 2{,}82^2 \cdot (1{,}4-1)}{\left(5 \cdot 10^5\right)^{\frac{1}{1{,}4}} \cdot \left[\left(10 \cdot 10^5\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} - \left(6 \cdot 10^5\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} \right]}$$

$$\mathbf{V_1} = \frac{1017{,}9}{11723{,}7 \cdot (51{,}999 - 45{,}97)} = \mathbf{1{,}44 \cdot 10^{-2}}\ [\mathbf{m^3}] \sim \mathbf{15}\ [\mathbf{dm^3}]$$

ahol

m – a lezárt vezetékszakaszban levő folyadék tömege = $\rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot L = 860 \cdot 20{,}74 \cdot 10^{-4} \cdot 369 = 640$ [kg]

v – az áramlási sebesség a zárás pillanatában = 2,82 [m/s]

p_3 – a megengedhető maximális nyomás = 10 [bar]

p_2 – a rendszer statikus nyomása = 6,5 [bar]

p_1 – a gáz előtöltési nyomása a hidroakkumulátorban = 5 [bar]

n – az állapotváltozási kitevő = κ = 1,4.