

Modellezés és szimuláció az oktatásban

Geda Gábor

Modellezés és szimuláció az oktatásban

Geda Gábor

Publication date 2011

Szerzői jog © 2011 Hallgatói Információs Központ

Copyright 2011, Educatio Kht., Hallgatói Információs Központ

Tartalom

1. Bevezetés	1
1. Helyzetelemzés	2
2. Irodalmi előzmények, célkitűzések	3
2. Modellezés	6
1. A mérés másként	7
1.1. Mérés közvetlenül leolvasott értékek alapján	8
1.2. Mérés a felvételek számítógépes kiértékelésével	11
2. Jelenségtől a modellig	15
2.1. A jelenség leírása	15
2.2. A matematikai modell	15
2.3. A jelenség kémiai magyarázata	16
2.4. A modell általánosítása	17
2.5. Az általánosított modell kísérleti igazolása	18
2.6. További általánosítások	20
3. Matematikai háttér	23
1. Néhány differenciálegyenlettel kapcsolatos fogalom	23
2. Kezdetiérték-probléma	28
4. Egy modell gyakorlati alkalmazási lehetőségei	32
1. Exponenciális növekedés (Malthus-modell)	32
2. Logisztikus növekedés (Verhulst-féle modell)	34
3. Populációk közötti interakció	38
3.1. Zsákmány-ragadozó modell	41
3.2. Két faj versengése	42
4. Harci modellek	44
4.1. Hagyományos harc	45
4.2. Gerilla-harc	45
4.3. Vegyes (gerilla-hagyományos) harc	46
5. Rezgőmozgás	47
5.1. Harmonikus rezgőmozgás	48
5.2. Csillapított rezgés (szabad rezgés)	49
5. Néhány közelítő megoldás geometriai szemléltetése	51
1. Iránymező	51
2. Egylépéses módszerek	54
2.1. Explicit Euler-módszer	54
2.2. Javított Euler-módszer	55
2.3. Runge–Kutta-módszer	56
3. Közelítő módszerek hibája	59
4. Prediktor-korrektor-módszerek	62
6. Véletlen modellek matematikai alapjai	67
1. Véletlenszámok	67
2. Véletlenszám-generátorok használata	70
2.1. Egyenletes eloszlás tetszőleges tartományban	70
2.2. Egyenletestől eltérő eloszlású véletlenszámok	73
3. Véletlenszámok a szimulációkban	78
3.1. Brown-mozgás	78
3.2. Darázs-modellek	79
3.3. Sztochasztikus differenciál-egyenlet	79
7. Segédeszközök a szimulációkhoz	81
1. Táblázatkezelők	81
2. GeoGebra	83
3. Számítógép-algebrai rendszerek	86
8. Modellezési és szimulációs példák	88
1. További jelenségek	88
1.1. Testek hülése	88
1.2. A logisztikus növekedés pontosítása	88
1.3. Test lecsúszása	89

1.4. Függőleges hajítás	89
1.5. Neutrális szál	89
1.6. Visszatérítő erő	90
1.7. Lánc lecsúszása	90
1.8. Vagon mozgása szélben	91
1.9. Függőleges hajítás közegellenállás figyelembe vételével	91
1.10. Tengeraltjáró merülése	91
1.11. Rezgőkör	91
1.12. Bomlási-sor, sorozatos kémiai reakció	92
1.13. Egyensúlyi reakció	93
2. Makrogazdasági modellek	93
2.1. Két szereplős makrogazdasági modell	94
2.2. Három szereplős makrogazdasági modell	94
2.3. Négy szereplős makrogazdasági modell	95
9. Feladatok	96
Irodalomjegyzék	cii

1. fejezet - Bevezetés

„Modellen olyan matematikai konstrukciót értünk, amely – bizonyos szóbeli értelmezést hozzáadva – leírja a megfigyelt jelenséget. Az ilyen matematikai konstrukciót kizárólag és pontosan az igazolja, hogy működik.”

Neumann János

Világszerte tapasztalható jelenség a természettudományok iránti tanulói érdeklődés csökkenése. A PISA¹ felmérések összehasonlításokat tesznek lehetővé a magyar természettudományos nevelés eredményességével kapcsolatban [36]. A felmérések szerint 15 éves tanulóink teljesítménye nem tért el szignifikánsan az átlagtól. Ez további visszaesést jelent a korábbi nemzetközi összehasonlító vizsgálatokkal összevetve (például az 1995-ös TIMSS² vizsgálat), így a fentiek ismeretében a hazai természettudományos nevelést már nem tekinthetjük kiemelkedőnek. Elsősorban a fizika, kémia és a matematika népszerűségének csökkenése figyelhető meg az oktatás különböző szintjein. Ennek következtében már az érdeklődő, tehetséges diákok közül is egyre kevesebben választanak természettudományos vagy műszaki pályát. A legnagyobb mértékben talán a természettudományos tanárszakok iránti érdeklődés hiánya ad okot aggodalomra. Vannak felsőoktatási intézmények, amelyek kellő számú jelentkező hiányában esetleg nem, vagy csak nagyon alacsony létszámmal tudtak évfolyamokat indítani az említett szakokon. A már napjainkban is tapasztalható színvonalbeli változások hosszú távon a közoktatás jövőjét fenyegetik. Gondoljunk csak el – figyelembe véve a közoktatás társadalmi szerepét – milyen jövőt vetít elénk a jelenlegi helyzet? Képzeljünk el egy olyan világot, amelyet minden részletében egyre jobban átszö a technika, egyre nagyobb szerephez jutnak a különböző technikai eszközök a mindennapokban, ugyanakkor a lakói nem ismerik a legalapvetőbb szabályokat, amelyek szerint működnek.

Már a 80-as évek végén, kémiatanári konferenciákon tapasztalt kollégák számoltak be arról a szélsőségről, hogy míg hazai és nemzetközi versenyeken tanulóink szép sikereket érnek el, ugyanakkor az oktatás mindennapjaiban milyen tanulói ellenállásba ütközik a szaktanár. Az oktatás egészére vonatkozóan a helyzet ennél lényegesen szomorúbb, hiszen a kémia sajnos nincs egyedül ezen a téren. Azóta számtalan felmérés igazolta, hogy a kémián kívül a matematika és a fizika sem tartoznak a tanulók kedvencei közé. Mi okozhatja a problémát, hiszen a természet megismerésének igénye az ember veleszületett tulajdonsága, és ez a legfőbb mozgatója az emberiség fejlődésének.

Nem nehéz látni az oktatás különböző szintjei és a társadalom egésze közötti összefüggéseket. Ha a közoktatásból valamiféle kontraszelekció eredményeként motiválatlan fiatalok kerülnek a felsőoktatási intézményekbe, akikből aztán a jövő mérnökei, pedagógusai lesznek, akkor a műszaki fejlődés lelassulása és a társadalom egyféle kiszolgáltatottsága várható. Ennek az esetleges önmagát erősítő folyamatnak beláthatatlan következményei lehetnek. Természetesen nem csak a műszaki elit gyengülése jelenti az egyedüli veszélyt. Az egyén is hatalmas károkat okozhat önmagának és a természeti környezetnek csupán a tájékozatlanságából adódó felelőtlen magatartásával. Hogyan is tudnának megfelelni például a környezetvédelem *„Gondolkodj globálisan, cselekedj lokálisan!”* elvének a természet törvényeit csak felületesen ismerő, ezért tetteik következményeit hibásan megítélő emberek? Ebből a tájékozatlanságból fakad az egyre gyakrabban hallható vélekedés a globális felmelegedéssel kapcsolatban: *„Engem nem zavar, ha néhány fokkal melegebb lesz...”*. Mintha azt gondolhatnánk, hogy a környezeti változások ellenére mindennapjainkban semmiféle változás nem következik be, csak kisebb lesz a gázszámlánk.

Az alábbi hasonlat talán segít rávilágítani a lehetséges okokra, és esetleg sejtethet lehetséges megoldásokat is³.

A problémával kapcsolatban némi analógiát mutat a sport helyzete hazánkban. Élsportolóink kiváló teljesítményt nyújtanak, ellenben a tömegsport terén volna még mit tennünk. Erre persze lehet az a mentségünk, hogy nem születhet mindenki olyan adottságokkal, mint úszóink, vízilabdázóink és még sorolhatnánk. Említhetnénk azonban néhány olyan sportágat is, amelyben nem „szoktunk” jó eredményeket elérni. Ezeknek egyszerűen nincsen hagyománya, olyan a szélesebb körű megítélésük, hogy az nem teszi lehetővé a népszerűvé válásukat. Hasonló módon viszonyulunk a tantárgyakhoz is. Köztudott, hogy például Japánban, ahol nagy az elismertsége a matematikai tudásnak, a gyerekek nagyobb sikereket érnek el matematikatanulásban és problémamegoldásban. Ezt feltehetően a nagyobb társadalmi elfogadottság és az ennek megfelelő magasabb

¹Programme for International Student Assessment

²Trends in International Mathematics and Science Study

³A probléma okai természetesen nagyon szövevényesek, hiszen több évtizedes folyamat eredményeként jött létre a jelenlegi állapot. Ez a hely – sem terjedelménél, sem pedig témájánál fogva – nem alkalmas a jelenség esetleges társadalmi, gazdasági hátterének vizsgálatára.

iskolai óraszám magyarázza. Joggal feltételezhetjük, hogy a hazai érettségi vizsgák kötelező tárgyainak rendszere a tudományterületek társadalmi megítélését tükrözi, ami sajnos a természettudományos és a humán tárgyak vonatkozásában elég aránytalan képet mutat.

Természetesen Japánban sem szeretne mindenki matematikus lenni. Ha ez így volna, pontosan olyan szélsőséget jelentene, mint a tárgy elutasítása azok részéről, akik nem tudnak kimagasló teljesítményt nyújtani ezen a területen. Az a tény, hogy ez nálunk tömeges jelenség, arra figyelmeztet, hogy foglalkozni kell a problémával, de a példa azt is jelzi, hogy nem törvényszerű, hogy így legyen. Az előző sporttal vont párhuzam, és az azzal kapcsolatos tapasztalatok alapján mondhatjuk, hogy szinte mindenkit meg lehet tanítani úszni, de csak kevesekből válik élsportoló. Akik mégsem tudják ilyen szinten művelni ezt a sportot (vagy mást), azok is szeretik és tudják, hogy az épülésüket szolgálja.

Azt kellene tehát elérni a természettudományos tárgyak oktatásában is, hogy az egyén elfogadja, hogy személyisége ezekkel az ismeretekkel csak teljesebbé válik.

Az elért eredmények, sikerek a tehetségen túl a motiváltságtól és a ráfordított erőforrásoktól is függ. *David C. Geary (1994)* kategóriái szerint a matematikai képességek biológiailag első- és másodrendűek lehetnek. Elmélete alapján a biológiailag másodrendű matematikai képességeket a szülőktől vagy a hivatalos iskolai oktatás rendszerében tanult ismeretek, készségek és az ezekhez köthető számolási tevékenységek határozzák meg. Szerinte a matematikai teljesítmények terén tapasztalható nemzetközi különbségeket elsősorban a biológiailag másodrendű képességek okozzák.

A probléma oka nyilvánvalóan magában az oktatás gyakorlatában is lehet, hiszen a kezdetben a természet minden jelensége iránt érdeklődő, nyitott kisiskolások jelentős részéből az említett területekkel szemben különböző érettségizők válnak.

1. Helyzetelemzés

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat munkabizottsága 1995-ben vizsgálta a felsőfokú fizikaoktatás helyzetét. Ennek következményeként a következő évben végzett általános iskolai felmérés kimutatta, hogy a fizika és a kémia a legkevésbé kedvelt tantárgyak a 7. és a 8. osztályokban [13].

Egy a pályaválasztást motiváló tényezőket elemző, a József Attila Tudományegyetemen készült felmérés [17] alapján ebben a vonatkozásban szintén kedvezőtlen képet alkothatunk. A szerzők egy másik felmérés [24] során a fizikával kapcsolatos attitűdöt vizsgálták, hasonló tapasztalatokkal. Az említettekén túl, jónéhány további tanulmány jutott hasonló eredményre. Mintegy ezek összefoglalásaként kimutatták [8], hogy az általános iskolában az átlagosnál jobban romlik a fizika, a matematika és a kémia tárgyak megítélése. Ugyanakkor a középiskola évei során ez a kedvezőtlen helyzet a többi tárgyhoz képest már jelentősen nem változik. A tanulmányok szerint az attitűdöt legjelentősebben a tanár személye és az osztályzatok befolyásolják, és azt elsősorban a tanulók által végzett kísérletek javíthatják. A tárgyak kedvezőtlen tanulói megítélését erősíti, hogy a jelenlegi tananyag sok esetben nem kötődik kellő módon a mindennapi élethez.

A személyes, gyakorlathoz köthető tapasztalatok arányának növelése mellett szükségesnek tűnik a tananyag tartalmának korszerűsítése is. A jelenlegi állapot – melyre a tanulók többségének motivátlansága jellemző – kialakulásának talán az lehet az egyik oka, hogy az utóbbi 20-30 év technikai fejlődését nem követték megfelelően a tananyag tartalmi változásai. Lényegében kisebb változtatásoktól, belső átcsoportosításoktól eltekintve ezek a tárgyak tartalmi és módszertani szempontból is a két világháború közötti állapotokat tükrözik. Az eltelt csaknem 100 év alatt a mindennapjainkat is jelentősen megváltoztató technikai fejlődésen túl jelentősen megváltozott az iskolázottsággal kapcsolatos egyéni és társadalmi igény is. Joggal érheti kritika a tananyagot abból a szempontból, hogy nem fordít kellő figyelmet az aktuális problémákra. Érthető módon motivátlansághoz vezet, hogy szinte kizárólag csak a klasszikus, lineáris összefüggésekkel leírható területek szerepelnek mindhárom tárgy esetében. Ezt általában a magasabb matematikai ismeretek hiányával indokolják, amelyekkel ezek a jelenségek leírhatók volnának.

A másik jelentős problémát az okozza, hogy időközben az érettségi vizsgával záruló képzések tömegessé válását nem követte az oktatás ezekhez alkalmazkodó reformja, hiszen ma többé-kevésbé azokat az ismereteket követeljük meg – a tananyag szerint – az adott korosztály 70-80%-ától, amelyeket a XX. század első felében a 10%-a számára írtak elő. Ismert statisztikai tapasztalatok alapján nyilvánvaló, hogy az adott populáció „legjobb” 10%-ához képest a hasonló elvek alapján kiválasztott „legjobb” 80% nagyobb differenciáltságot mutat. Ezt a problémát a mai magyar oktatási rendszer sem regionálisan, vagy országosan, sem az egyes iskolák szintjén nem képes hatékonyan kezelni.

A vázolt két jelenség ellentétes megoldásokat sugall. Ha szeretnénk eleget tenni annak, hogy korszerű ismereteket közvetítsen az iskola, amely lehetővé teszi a tanuló számára, hogy jobban el tudjon igazodni akár a hétköznapi világában, akkor kétségkívül új elemeket kell bevinnünk a tananyagba, esetleg olyanokat, amelyeknek a matematikai megalapozottsága nem megoldott az adott szinten. Ha azonban figyelembe vesszük a középiskolások korábbiánál differenciáltabb összetételét és azt szeretnénk elérni, hogy eredményesebben eleget tudjanak tenni a követelményeknek, akkor ésszerűnek tűnik a tananyag mennyiségének és színvonalának csökkentése. Talán ennek a kettősségnek az eredményeként került sor olyan változtatásokra, amelyeknek eredményeként a differenciál- és integrálszámítás témaköre a 80-as évekre kikerült a középiskolás matematika tananyagból, ugyanakkor az általános iskolai kémia tananyag talán túlságosan is elszakadt a gyakorlattól például az anyagszerkezet tárgyalásmódjának köszönhetően a világszerte elterjedt tartalomközpontú tantervfejlesztési irányzatnak megfelelően. Általában sokat rontott a helyzeten (ahogyan ezt az említett tanulmányok is megállapították), hogy drasztikusan csökkent a tanulói, de a demonstrációs kísérletek száma is, aminek következtében szintén a közvetlen tapasztalatszerzés útján átadott ismeretek aránya csökkent.

A fentiek tartalmi és módszertani változtatások szükségességét vetik föl elsősorban a 7. és 8. osztály tananyagával kapcsolatban. A tanulók passzív befogadó szerepét nagyobb mértékben föl kellene váltani a korosztály számára jobban elfogadható, az új ismeretek megszerzésében nagyobb hatékonyságot mutató konstruktívizmusnak.

A természettudományok oktatásának átforgalmazása csak minden részletében körültekintő, összehangolt változásokon keresztül valósítható meg. A tényfeltárás mellett fontos tényező az oktatással szemben megfogalmazott hivatalos társadalmi elvárás vizsgálata is.

A Nemzeti alaptanterv [23] ma az egyik alapdokumentuma a magyar közoktatásnak. „A Nat az iskolában elsajátítandó műveltség alapjait határozza meg, megteremtve ezzel a közoktatás egységét.” Nem az a célja, hogy konkrét útmutatást adjon, de fontos irányadó szerepe van módszertani és tartalmi szempontból egyaránt. Ugyanakkor, ebből kifolyólag nem motivál kellőképpen a szükséges változtatásokra, illetve nyitva hagyja „változtatás” lehetőségét is. Ebből a szempontból jelent pozitív irányú elmozdulást a 2007-es módosítás, amely a kompetencia alapú oktatás szemléletével elősegíti a gyakorlati ismeretek arányának kedvező változását.

Az átfogó reformok hiánya miatt a tanulók idővel valóban túlterhelte váltak, mivel bizonyos új elemekkel (például a fizika és a kémia esetében az anyagszerkezet [9]) bővült a tananyag. A túlterheltség érzetét tovább erősítette a középfokú oktatás már említett tömegessé válása. A Nat – jellegénél fogva – nem alkalmas a tananyag pontos behatárolására, ugyanakkor a probléma kezelése érdekében az órakereteket jelentősen megváltoztatták. A szaktanárok általában nincsenek fölkészítve, és talán motiválva sem olyan változtatásokra, amelyekkel a tananyagot a csökkentett óraszámokhoz igazíthatnák tartalmilag és módszertanilag. A felmérések alapján úgy érzékelik, hogy változatlan tematikát kell teljesíteniük rövidebb idő alatt [31]. Ezek a problémák fölvetik a tanárképzés és a továbbképzések tartalmi átalakításának szükségességét is.

2. Irodalmi előzmények, célkitűzések

Abból a feltevésből indulunk ki, hogy új, hatékonyabb tárgyalásmód alkalmazása esetén az ismeretanyag csökkentése nem föltétlen szükséges olyan mértékben, ahogyan azt a tanulói túlterhelés csökkentése érdekében gondolnánk változatlan módszerek mellett. A célunk tehát annak vizsgálata, hogyan lehetne a számítógépek és más informatikai eszközök bevonásával hatékonyabbá, élményszerűbbé tenni az oktatást az átadó és a befogadó számára egyaránt az oktatás különböző szintjein. Ennek szellemében sok esetben részesítjük előnyben a hétköznapi szemléletességet a matematikai precizitással szemben.

Napjainkra az iskolák számítógépekkel és más informatikai eszközökkel való ellátottsága általánossá vált, és ezeknek az eszközöknek a teljesítménye is elérte azt a szintet, hogy az oktatás egyes területein alapozni lehet rájuk. Felmérések bizonyítják [31], hogy ennek ellenére a szaktanárok körében a számítógépek használata mégsem általános a fizika, kémia és matematika tárgyak óráin. A tapasztalataink azt mutatják, hogy bizonyos esetekben, megfelelő alkalmazásuk a korábbiaknál hatékonyabb megoldást jelenthetne néhány demonstrációs, vagy akár tanulói mérőkísérlet során. Segítségükkel olyan méréseket is demonstrálhatunk, amelyek korábban nem, vagy csak időigényes előkészítő munkával voltak lehetségesek. Ilyen alternatívákat mutat be a 2.1. bekezdés az [46], [49], [50] és a [?] alapján.

Az emberiség fejlődése során a felhalmozódott ismeretek rendszerezése újabb és újabb tudományterület létrejöttét generálta. A XX. század elejére, a több évszázados formálódás után az ókori görög szemlélethez képest a tudományterületek jóval szerteágazóbb képet mutattak, és specializációjuk révén egyre inkább

eltávolodtak, elszigetelődtek egymástól. Később azonban olyan kapcsolatokat fedeztek föl az egymástól távoli területek kutatási eredményei között is, amelyek megszüntették az addigi szigorú határokat. Ezeknek az egyetemes összefüggéseknek a fölismerése alapozta meg a rendszerelmélet létrejöttét. Ez a tudományterület a problémák specialitásaitól elvonatkoztatva a matematika eszközeivel teszi lehetővé azok általánosabb módon való leírását és megoldását. Ezt egyszerű példákon keresztül a 2.2. bekezdés, a 4. fejezet és a 8.1. bekezdés mutatja be különböző megközelítésekben a [40] és a [41] alapján. Az oktatás szempontjából a különféle jelenségek matematikai eszközökkel történő leírásának, azaz a matematikai modellezésnek a számítógépes szimuláció szempontjából van jelentősége. Ez azért is fontos, mert a mérés mellett napjainkra a megismerés fontos módszerévé vált, ezért a természettudományok oktatásában is helye van.

A differenciálegyenletek a rendszerelmélet nagyon hasznos eszközeinek bizonyultak. Bár az utóbbi években ez a terület helyenként a felsőoktatásban is kevesebb hangsúlyt kap, a témával kapcsolatos fogalmi és alkalmazás szintű ismereteket fontosnak tartjuk. Ezt a meggyőződést erősíti meg a [14], amelyben a szerzők a témát az elmélet oldaláról közelítik meg, de nagy figyelmet fordítanak a szemléletességre. A kapcsolódó elmélet a 3. fejezetben kapott helyet. Itt csak a későbbiekhez föltétlen szükséges, legfontosabb fogalmakról és összefüggésekről olvashatunk, hiszen a differenciálegyenletek elméletéről számtalan kitűnő hazai és külföldi irodalom érhető el.

Célszerűnek tűnik annak vizsgálata, hogy a számítástechnika eszközeinek segítségével milyen lehetőségek kínálkoznak a jelenségek szemléletre épülő, rendszerszemintű megközelítésére. Ennek érdekében a 4. fejezetben megadunk egy közönséges, nem lineáris, konstansgyűthetős differenciálegyenlet-rendszert, amely az egyűthetők és a kezdeti feltételek választásától függően alkalmas lehet az egyszerű exponenciális növekedési folyamatoktól kezdve a periodikus jelenségeken át, olyan különféle változások és jelenségek leírására, amelyek az oktatás szempontjából is jelentősek lehetnek. Ennek alapjául elsősorban [41] szolgált. A 8.1. bekezdést tekinthetjük az előzőek kiegészítéseként is, mivel az itt megfogalmazott problémák – megfelelő paraméterezés esetén – szintén a 4. fejezetben megadott modellel írhatók le.

A most említett modell megadásával az volt a cél, hogy az alapul szolgáljon különböző rendszerek számítógépes szimulációjához. A belőle megfelelő paraméterezések útján előálló konkrét modellek egységes módon való kezelhetőségét a szimuláció során a differenciálegyenletek közelítő módszereivel oldhatjuk meg. Az 5. fejezet néhány ilyen egyszerű módszer algoritmusát értelmezi a geometria szemléletességével. A fejezet előzményeül a [43], a [47] és a [48] szolgálnak.

Az egyes résztémák tárgyalásmódja azok sokszínűsége miatt sem lehet teljes. Ettől függetlenül esik majd szó a determinisztikus és a sztochasztikus szimulációkkal kapcsolatos lehetőségekről is.

A természet jelenségeinek alaposabb megismerése – nem csak az oktatás folyamatában – a róluk alkotott modellek segítségével is lehetséges. A megismerés mélységét csak a modell hitelessége korlátozza. Célkitűzésünk volt, hogy olyan elemeket vegyünk sorra, amelyeknek szemléletformáló szerepe lehet a matematikai modellezés és a számítógépes szimuláció témakörében, ugyanakkor gyakorlati haszna is van az oktatás és a modellezés terén egyaránt.

Számos hazai és nemzetközi felmérés eredményeit értékelő publikáció számolt be a természettudományos – elsősorban a fizika, kémia és a matematika – tárgyak oktatásának egyféle válságáról⁴. A több évtized alatt kialakult helyzet összetettsége miatt a probléma megoldását jelentő változtatások is szerteágazók lehetnek. Vélhetően tartalmi és módszertani változtatásokra lesz szükség az oktatás különböző szintjein, bele értve a tanárképzést és – hogy a változtatások kedvező hatása a lehető leghamarabb érvényesüljön – a tanártovábbképzést is. Alapvető problémaként már említettük a tanulók túlterheltségét, az utóbbi évtizedek tudományos eredményeinek alulreprezentáltságát, a kísérletek (különösen a tanulói kísérletek) és általában a szemléltetés szerepének csökkenését.

A számítógép ma már az oktatás különböző szintjein megtalálható, sokoldalúan alkalmazható oktatási eszköz. Az említett problémák mindegyikére megoldást jelenthet az informatikai eszközök célzott használata.

Az első fontos elem a kísérleti mérés, amire alapozhatjuk a vizsgált jelenség belső összefüggéseinek matematikai leírását. Erre láthattunk egy minden tekintetben egyszerű, de mégis szemléletes példát a 2.2. bekezdésben. Azért is van hangsúlyos szerepe ennek a fejezetnek, mert egy újszerű, hatékony alternatívát

⁴A felmérések eredményei arra engednek következtetni, hogy a probléma lényegesen összetettebb, mint azt a korábbiakban vázoltuk, hiszen a magasabb évfolyamokon lényegében minden tárgy kedveltsége alacsonyabb, mint korábbiakon. Ezen kívül a fent említett három tárggyal együtt a nyelvtan szerepel az utolsó négy helyen [8]. Ugyanakkor például a biológia lényegesen előkelőbb helyet foglal el a sorban. Ebben az összefüggésben a probléma azonban már messze túl mutatna a jegyzet keretein.

ismertet a kísérleti mérések vonatkozásában. Az itt modellezett jelenség révén kínálkozik az első alkalom, hogy érzékeltessük a matematika eszközeinek fontosságát és egyetemességét.

A tanulók túlterheltsége jellemezhető az elsajátítandó ismeretek mennyiségével és a tanuláshoz szükséges idővel. Mivel a természettudományok jellemző módon a minket körül vevő világ jelenségeit tanulmányozzák, elsődlegesnek kell tekintenünk a közvetlen tapasztalatokat. Bizonyos esetekben azonban – a szaktanárok által is megfogalmazott időhiány enyhítésére – hatékonyan alkalmazhatunk számítógépeket (főleg használva azok multimédiás lehetőségeit) egyes költséges, vagy más szempontból nehezen elvégezhető kísérletek bemutatására. Ilyen mérőkísérletekre láthatunk majd példákat a 2.1. bekezdésben. Itt lényegében olyan videofelvételek mutatják be a vizsgált jelenséget, amelyeket a felvétel szerkesztése során megfelelő képi elemekkel ellátva alkalmassá tettünk a mérés szempontjából fontos értékek leolvasására. A módszer alkalmazását indokolja, hogy segítségével kvalitatív és kvantitatív vizsgálatok egyaránt elvégezhetők, nem szükséges a kísérleti eszközök és anyagok jelenléte, segítségével a tanulók önállóan, akár veszélyes jelenségeket is vizsgálhatnak és tetszőlegesen sokszor tanulmányozhatók. Természetesen hátrányt jelent, hogy egy adott felvétel esetében nem lehetséges a paraméterek módosítása⁵. Ez ellensúlyozható azzal, ha a kísérletről több, különböző beállítással készült felvétel áll rendelkezésre, ahogyan ezt a 2.1. bekezdés 2.1. táblázata és 2.2. ábrája szemlélteti. Ezeknél a méréseknél tekinthetjük úgy, hogy valaki más jóval korábban előkészítette és el is végezte a kísérleteket – így ez a megoldás nem alkalmas a kísérletezésben való jártasság fejlesztésére – de az eredmények leolvasása és azok kiértékelése a felvételek elemzőire vár. A kísérleti méréseknek egy másik, a fejezetben ismertetett módja – a felvételek számítógép által végzett kiértékelése – megint más céllal választható. Ezzel a megoldással a vizsgált jelenséghöz közvetlenül tudunk nagy mennyiségű elektronikusan tárolt mérési eredményt társítani. A modellalkotás folyamatában van szükség arra, hogy meg tudjuk jeleníteni és vizsgálni tudjuk a mért értékek közötti kapcsolatokat. Tudjuk, hogy a számítógépes adatgyűjtés gyors kiértékelést tesz lehetővé.

A különböző megoldásokat más-más céllal, tudatosan választva, lényegében a teljes műveletnek azt a részét kiemelve, amely az oktatás folyamatában valóban szükséges, teljesen nem szakadunk el a kísérletezés gyakorlatától, de mégis időt takaríthatunk meg.

Az így szerzett tapasztalatok már önmagukban is hasznosak, de szeretnénk ezeket a jelenségek mélyebb összefüggéseinek föltárására használni. A NaAc kristályosodását vizsgálva, annak eredményeként előállítjuk a jelenség egy speciális körülmények között érvényes matematikai modelljét, és ennek értelmezésével a modell általánosításait. Az itt nyert összefüggéseket aztán majd párhuzamba állítjuk a mechanikai mozgásokat leíró néhány törvényszerűséggel, ezzel is alátámasztva, hogy a matematika eszközei az egyes tudományterületek sajátosságaitól függetlenül alkalmazhatók a jelenségek leírására.

Különböző tudományterületekhez (kémia, fizika, biológia, anyagszerkezet, ökológia, stb.) tartozó jelenségek egész sora ismert, amelyek törvényszerűségei a matematika eszközeinek segítségével hasonló módon írhatók le. Ugyanezt a tapasztalatot szeretnénk nyomatékosítani a 4. fejezetben egy összetettebb modell segítségével, amelyet a (4.1) differenciálegyenlet-rendszer formájában adhatunk meg. Ez az egyenletrendszer felépítésénél fogva alkalmas különféle jól ismert jelenségek (exponenciális és logisztikus növekedés, populációk közötti interakciók, egyszerűbb harci modellek, bizonyos periodikus jelenségek) leírására. Ennek igazolására a 8. fejezet tartalmaz még különböző jelenségeknek egy olyan gyűjteményét, amelyek modellezésére szintén alkalmas ez az egyenletrendszer.

A számítógépek fejlődésével (műveleti sebességük és számítási pontosságuk javulásával) egyre jobban képesek vagyunk kielégíteni a közelítő számítások iránti igényeket. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egyre nagyobb az igény az ilyen algoritmusok ismerete iránt is. Ilyenek a differenciálegyenletek közelítő módszerei is, amelyek közül néhány (Euler-módszer, javított Euler-módszer, Runge–Kutta-módszer, implicit Euler-módszer, trapéz-módszer) szemléletes bemutatását tűztük ki célul azért, hogy segítse azok algoritmizálását.

Ha abból indulunk ki, hogy az oktatás különböző szintjein az ismereteknek csak az adott szintre jellemző, megfelelő mélységű elsajátíttatására törekszünk, bizonyos esetekben kimondottan előny lehet, ha a számítógépes szimuláció elfedi a tanulók előtt a számítási műveletek bonyolultságát. Ezekon túlmenően a matematikai modellezés és a számítógépes szimuláció jó koncentrációs lehetőséget biztosít a különféle műveltségi területek, elsősorban természettudományos tantárgyak között. Hogy ezek a lehetőségek realizálhatók legyenek, a témában járatos oktatókra van szükség.

⁵Fontos megjegyeznünk, hogy a valós körülmények között elvégzett kísérleteket, méréseket mindenkor előnyben kell részesítenünk, ha az lehetséges.

2. fejezet - Modellezés

„Jósolni nagyon nehéz, különösen, ha a jövőről van szó.”

Niels Bohr

A tudományos megismerést – melynek mára egyik eszközévé vált a modellezés – a minden részletre kiterjedő alaposág és a tervszerűség jellemzi. Ebben – meglehetősen hosszú idő óta – a legkülönbözőbb tudományterületeken a mérésnek jelentős szerepe van. Hamar fölismerték, hogy ez az a módszer, amivel biztosítani lehet a tudományos munkában elengedhetetlenül szükséges tárgyilagosságot. Bár az egyes tudományágak mérési gyakorlata, módszerei egyre specializálódtak, ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy a mérési eredmények feldolgozásához egyre általánosabban alkalmazható elméleti háttér áll rendelkezésre.

Ha feltételezzük, hogy a világ jelenségei mögött matematikai eszközökkel leírható összefüggések, törvények állnak és azok megismerhetők, akkor megfigyelések és mérések útján gyűjtött adatokból a törvények kikövetkeztethetők. Erre a matematikában egyre kifinomultabb eszközök alakultak ki. Az egyik, talán legalapvetőbb ilyen fogalom a mérési eredmények közötti hozzárendelési szabály megadására alkalmas függvény. Az elvonatkoztatásnak ezen a szintjén szükségtelen a vizsgálat tárgyának pontos ismerete. Sőt – ahogyan ezt látni fogjuk – két, jellegében merőben különböző dolog matematikai leírása is lehet teljesen azonos. Hasonló felismerések és ezeknek az egységbe foglalása vezetett a XX. század első felében a mára a matematikai modellalkotás eszközéül szolgáló rendszerelmélet¹ kialakulásához.

A rendszerelmélet fogalmai nem csak a különböző tudományok szóhasználatában lelhetők fel, hanem a köznyelvben is. Ilyen maga a rendszer szó is. Különböző szókapcsolatokban (iskolarendszer, rendszerváltás, követelmény rendszer, stb.) napjainkra használata megszokottá vált.

A rendszer működése változói segítségével írható le. A bemenő és kimenő változók megadásával tudjuk a rendszert úgy megadni, hogy ne legyen független a külvilágtól. Ha a rendszer megadásakor nem adunk meg sem bemenő sem kimenő változót, akkor a modell létrehozásakor elhanyagoljuk a rendszer külvilággal való kapcsolatát. Ekkor úgynevezett zárt rendszert hozunk létre. Nyílt rendszerről akkor beszélünk, ha bemenő és/vagy kimenő változója van. Ha a vizsgálat tárgya nem csak kezdő és/vagy végállapottal jellemezhető, hanem van értelme beszélni a rendszer jellemzőinek változásáról is valamely mennyiség(ek) függvényében, akkor ezt az állapotváltozók megadásával vehetjük figyelembe a modellezés során.

A rendszerelmélet fogalmai tehát lehetővé teszik a merőben különböző jelenségek egységes módon való leírását. Minden rendszer leírása során megadjuk annak elemeit és azok egymással való kapcsolatait. Természetesen az adott rendszer minden eleme is tekinthető egy (al)rendszernek, ahogy az éppen szóban forgó rendszer is lehet eleme egy „nagyobb” rendszernek.

A szeparáció és a szelekció azok a műveletek, amelyek révén a valós rendszerből „kiemelhetjük” a modellezés szempontjából fontosnak tartott elemeket és kiválasztjuk a közöttük működő kölcsönhatások közül azokat, amelyek lényegesek a modellezési cél szempontjából.

A tudomány története során számtalanszor megfigyelhető volt, hogy a mérési módszerek egyre pontosabbá válásával – azaz egyre több és egyre pontosabb adat birtokában – „csiszolódtak”, váltak pontosabbá a jelenségeket leíró elméletek is. Elegendő, ha csak az anyag szerkezetével kapcsolatos elképzelésekre gondolunk. A Démokritosz-féle oszthatatlan atomoktól Thomson „mazsolás kalácsán”, Rutherford bolygórendszer-szerű és Bohr atommodelljén keresztül a kvantummechanikához vezetett az út. De hasonló változások figyelhetők meg azoknak az elméleteknek a fejlődésében is, amelyek nem az anyag szerkezetét, hanem az abból fölépülő anyagi halmazok tulajdonságait igyekeztek magyarázni. A kezdetben laposnak gondolt Föld, a Föld körül keringő Nap, a Nap körül óramű pontossággal mozgó égitestek mind fontos állomásai voltak az egyre pontosabbá váló tudományos megismerésnek.

Az itt felsorolt elméletek bizonyos értelemben egymásra épülnek. Az újabbak létrejöttét a korábbiak hiányosságai tették szükségessé. Ezekre a hiányosságokra mindig egy-egy olyan jelenség hívta föl a figyelmet, amit a korábbi modellel már nem lehetett magyarázni².

¹Az elmélet kidolgozása Ludvig von Bertalanffy magyar származású osztrák biológus munkásságával kezdődött.

²Például a katódsugárcső működését, hogy a légtelen térben elektronok áramlása indul meg a katód felületéről, jól lehetett magyarázni pozitív töltésű, nagy méretű atomokkal, amelyekben elszórtan – mint a kalácsban a mazsolaszemek – negatív elektronok helyezkednek el

Az induktív modellalkotás esetében jellemző módon a már főlhalmozott tapasztalatokra, adatokra építve áll elő egy új hipotézis.

Az induktív út esetében a tapasztalat szolgáltat alapot az elmélethez, a dedukció esetében pedig a tapasztalat segít igazolni vagy cáfolni az elméletet. Ennek megfelelően tehát a tudományos elméletek indukciós és dedukciós lépések egymásutánjaként finomodnak. A modellalkotás tisztán induktív vagy deduktív módjai határesetnek tekinthetők. A gyakorlatban megvalósuló modellezési folyamatokban általában mindkettő jelen van.

A fejezet nagyon egyszerű példái megkísérelnek rávilágítani arra, hogy a minket körül vevő világban zajló változások – függetlenül attól, hogy azok a természet vagy a társadalom jelenségei – leírhatók a matematika eszközeivel. Valójában ez a matematika feladata. A fejezet azt is sejteni engedi, hogy ezekkel az eszközökkel lehetőségünk van a múltbéli történések alapján a jövőre vonatkozólag bizonyos következtetések levonására. Ez csak úgy lehetséges, ha megfigyeléseken, kísérleteken alapuló mérésekre támaszkodva először meghatározzuk a vizsgált rendszer fejlődéstörvényét.

Sok esetben a felismert törvények összefüggéseket fogalmaznak meg a rendszer állapotának leírására alkalmas mennyiségek időbeli és/vagy térbeli változására vonatkozóan, azaz a rendszer pillanatnyi állapotában, annak függvényében milyen irányú és nagyságú változások következnek be. Az ilyen rendszerek absztrakt matematikai modellje a differenciálegyenlet.

Az előzőekből következik, hogy ezeknek az egyenleteknek – az algebrai egyenletekkel szemben – a megoldásai (ha léteznek) olyan függvények, amelyek egy adott időponthoz vagy térbeli helyhez hozzárendelik a rendszer állapotváltozóinak megfelelő értékeit.

1. A mérés másként

A modellalkotás célja az adott rendszer vagy jelenség megismerése. Ehhez azonban kellő mennyiségű információt szükséges összegyűjtenünk a modellezni kívánt jelenségről illetve rendszerről, amit annak megfigyelése során megfelelő pontosságú méréssel tehetünk meg.

Kézenfekvő a számítógépek bevonása a mérési eredmények kiértékelésén túl az adatok összegyűjtésébe is, ami a korábbinál jóval gyorsabb és pontosabb méréseket tesz lehetővé. Ez olyan eszközöket feltételez, amelyek a mérési eredményeket digitális formában képesek eljuttatni a számítógépbe. Az alkalmazott szenzorok paraméterei is jelentősen befolyásolják a mérés pontosságát. Elsősorban demonstrációs céllal kínál aránylag könnyen elérhető lehetőséget a Lego cég által forgalmazott NXT robot. (A gyári csomagnak része egy ultrahangszensor, amivel 2 méteren belül megközelítőleg 1 cm pontossággal lehet távolságot mérni.)

A vizsgált rendszerek, jelenségek esetében gyakran jellemzőiknek időbeli változását szeretnénk tanulmányozni; erre utal különböző tudományok nyelvhasználata is, amikor bizonyos mennyiségek megnevezése előtt a *pillanatnyi* jelzőt látjuk, mint például a fizika területén a *pillanatnyi sebesség*, *pillanatnyi gyorsulás*, *pillanatnyi szögsebesség*, *pillanatnyi feszültség*, kémiában *pillanatnyi reakciósebesség*, *pillanatnyi koncentráció*, *pillanatnyi konformáció*, *pillanatnyi polarizáció* esetében. De szoktunk egyszerűen a rendszer pillanatnyi állapotáról is beszélni, ami kifejezi a különféle, az állapotának leírására alkalmas jellemzők, állapotváltozók értékének időbeli változását. Ilyen vizsgálatok során tehát fontos az idő megfelelő pontossággal való mérése. Ezt általában annál nehezebb megvalósítani, minél gyorsabb a változás, amit a mérés során szeretnénk nyomon követni. A technika fejlődésével egyre bővül az ilyen céllal főlhasználható eszközrendszer.

Mivel minden szabályos, periodikus „jelenség” alkalmas lehet az idő mérésére, ezért talán nem meglepő, hogy bizonyos esetekben a mozgóképek rögzítése is megfelel ebből a célból. Ez természetesen attól is függ, hogy milyen a képrögzítés sebessége a változás sebességéhez képest. A képrögzítés sebessége a mozgóképek egy igen fontos jellemzője. Azt fejezi ki, hogy a felvétel során másodpercenként hány állóképet rögzítenek. Például az általánosan ismert 25 frame per másodperces³ rögzítési sebesség a mi szempontunkból azt jelenti, hogy 0,04 másodpercenként nyerünk új információt a vizsgált rendszer állapotáról. (Más megközelítésben pedig azt mondhatjuk, hogy természetes módon hozzárendeljük a mérés időpontját az egyes képkockákhoz a felvétel készítése során.) Ez a megoldás sok olyan esetben megfelelő lehet, amikor a változásokat szemmel nem tudjuk követni. (A 25 fps-os rögzítési sebesség, mint szabvány az emberi szem tehetetlenségének figyelembevételével

szabálytalanul. Ugyanakkor az ilyen felépítésű atomokból álló anyagon még részben sem hatolhatna át nagy tömegű, pozitív töltésű részecskéket tartalmazó α -sugárzás, ahogyan azt Rutherford tapasztalta ismert kísérlete során.

³angol rövidítése: fps=frames per second

jött létre.) Jegyezzük meg, hogy napjainkban már nem elérhetetlenek akár 80 fps-os sebességű kamerák sem, amelyek természetesen még gyorsabb változások megfigyelését és a hozzájuk kapcsolódó méréseket tesznek lehetővé.

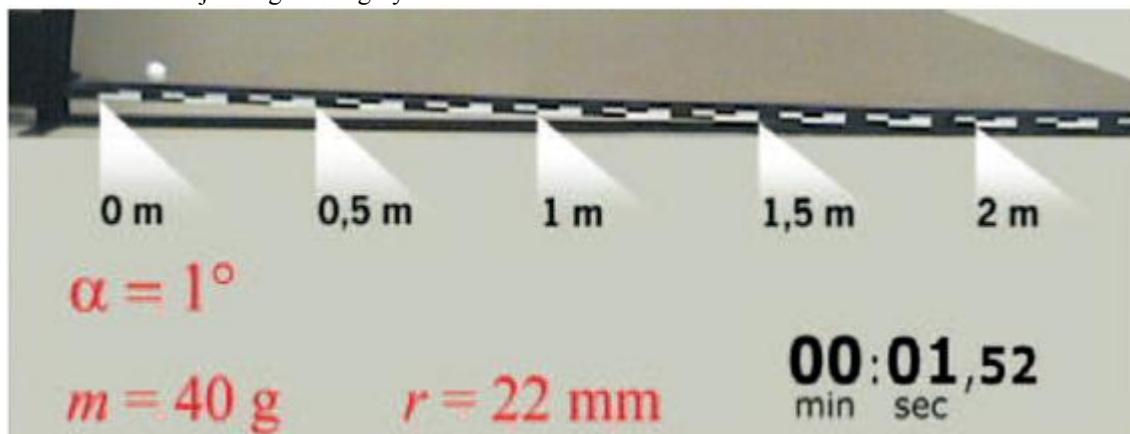
A rögzített állóképek sorozata, amelyek a mozgóképet alkotják, különböző módon dolgozható föl a mérés szempontjából. Ha nem kell túlságosan sok leolvasást végezni, és a jelenség természetéből adódóan megoldható, hogy a képeken megfelelő markereket helyezünk el (akár utólag, a mozgókép szerkesztése során), akkor a leolvasások a felvétel kockázatával akár manuálisan is elvégezhetők. Ez a megoldás elsősorban olyankor vehető számításba, amikor az elmozdulás mérése a cél, vagy a mérés erre visszavezethető. (Sok esetben a kísérlet megfelelő tervezésével ez megvalósítható, hiszen a digitális kijelzésű mérőműszerek elterjedése előtti szerkezetek pontosan ilyen elven működtek.)

Egy másik számba vehető megoldás, amely lényegesen több lehetőséget hordoz magában, az egymást követő képkockák számítógépes kiértékelésében rejlik. Természetesen itt előtérbe kerül az optika okozta torzulás korrekciójának kérdése, hiszen ez a tényező jelentősen befolyásolhatja a mérés pontosságát.

1.1. Mérés közvetlenül leolvasott értékek alapján

Az első példában egy a fizika területéről jól ismert mozgásformához, a lejtőn legördülő golyó egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgásához kapcsolódó kísérleti mérést vizsgálunk meg. A test egy állítható hajlásszögű pályán mozog, amelyet megfelelő beosztású skálával láttunk el (2.1. ábra). Ez teszi lehetővé a megtett út leolvasását. Az egyszerűbb leolvasást segíti a képek utólagos, a felvétel szerkesztése során történő fölratozása. Ekkor kerültek a képekre az adott kísérlet további jellemzői is (lejtő hajlásszöge, golyó tömege és sugara), valamint az egyes képkockákhoz rendelhető, a golyó mozgásának kezdete óta eltelt idő is.

2.1. ábra. 1° -os lejtőn legördülő golyó



A különböző hajlásszögekkel készült felvételek „kockázatával” leolvashatók az azonos nagyságú utak megtételéhez szükséges részüidők. Ezeket az adatokat a 2.1. táblázat tartalmazza. A leolvasott értékeket és a mérési pontokhoz illesztett parabola-íveket a 2.2. ábra mutatja be.

2.1. táblázat. A lejtőn legördülő golyó számára azonos utak megtételéhez szükséges idő különböző hajlásszögek esetén.

s [m]	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$t_{(\alpha=1^\circ)}$ [s]	0,00	1,28	1,85	2,30	2,66	2,98	3,26	3,54	3,78	4,02
$t_{(\alpha=2^\circ)}$ [s]	0,00	0,88	1,24	1,56	1,80	2,02	2,22	2,40	2,56	2,72
$t_{(\alpha=3^\circ)}$ [s]	0,00	0,72	1,04	1,27	1,48	1,65	1,80	1,97	2,09	2,22
$t_{(\alpha=4^\circ)}$ [s]	0,00	0,58	0,86	1,07	1,24	1,39	1,52	1,66	1,78	1,89
$t_{(\alpha=5^\circ)}$ [s]	0,00	0,52	0,76	0,96	1,12	1,25	1,38	1,49	1,60	1,70

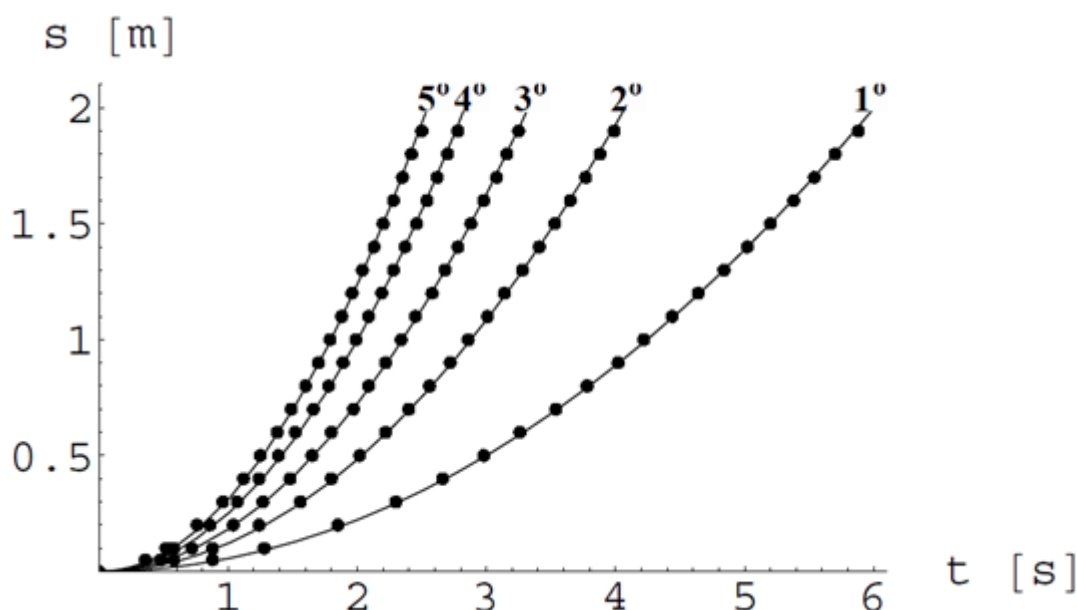
s [m]	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$t_{(\alpha=1^\circ)}$ [s]	4,22	4,44	4,64	4,84	5,02	5,20	5,38	5,54	5,70	5,88
$t_{(\alpha=2^\circ)}$ [s]	2,86	3,01	3,14	3,28	3,41	3,53	3,65	3,77	3,88	3,99
$t_{(\alpha=3^\circ)}$ [s]	2,34	2,45	2,58	2,68	2,78	2,88	2,98	3,08	3,16	3,25
$t_{(\alpha=4^\circ)}$ [s]	1,99	2,09	2,19	2,28	2,37	2,46	2,54	2,62	2,70	2,78
$t_{(\alpha=5^\circ)}$ [s]	1,79	1,88	1,96	2,04	2,13	2,20	2,28	2,35	2,42	2,50

Jelölje α a lejtő hajlásszögét G pedig a mozgó test súlyát. A test egyenletesen gyorsuló mozgást végez egy a lejtő irányában ható állandó F erő hatására, amely arányos a test súlyával és $\sin \alpha$ -val:

$$F = G \sin \alpha.$$

A várakozásnak megfelelően a mérési pontok olyan parabolaívекből álló görbesereg sereggyöreibre illeszkednek, amelyekhez a lejtő különböző hajlásszögei tartoznak.

2.2. ábra. Különböző hajlásszögű ($\alpha = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$) lejtőkön legördülő golyó által megtett út az idő függvényében



A szilárd anyagok kristályosodása során azt figyelhetjük meg, ahogyan a folyadék fázis részecskéi a szilárd fázisba beépülve a szilárd–folyadék határfelület elmozdulását eredményezik. Lényegében tehát ez a változás is tekinthető mozgásnak, ahogyan azt a 2.3. ábra is mutatja. A számszerű értékek leolvasását a kémcső mellé helyezett térfogat-skála biztosítja. (A mozgókép szerkesztése során, a 2.1. ábrához hasonlóan, ennél a felvételnél is felkerültek az egyes képkockákra a folyamat kezdete óta eltelt időértékek is.) A leolvasott értékeket a 2.2. táblázat tartalmazza. A 2.4. ábra mutatja, hogy ezek az értékek jól illeszkednek egy egyeneshez, tehát a határfelület vándorlása egyenletes sebességgel történt.

A fentiekhez hasonló módon, két különböző fázis határfelületének vándorlása figyelhető meg és a hozzá kapcsolódó mérés végezhető el gázfejlődéssel járó kémiai reakciók esetében, ahol a gázbürettából a keletkező gáz kiszorítja a folyadékot. A készüléket megfelelő skálával ellátva nyomonkövethetjük a reakció során keletkező gáz térfogatának növekedését.

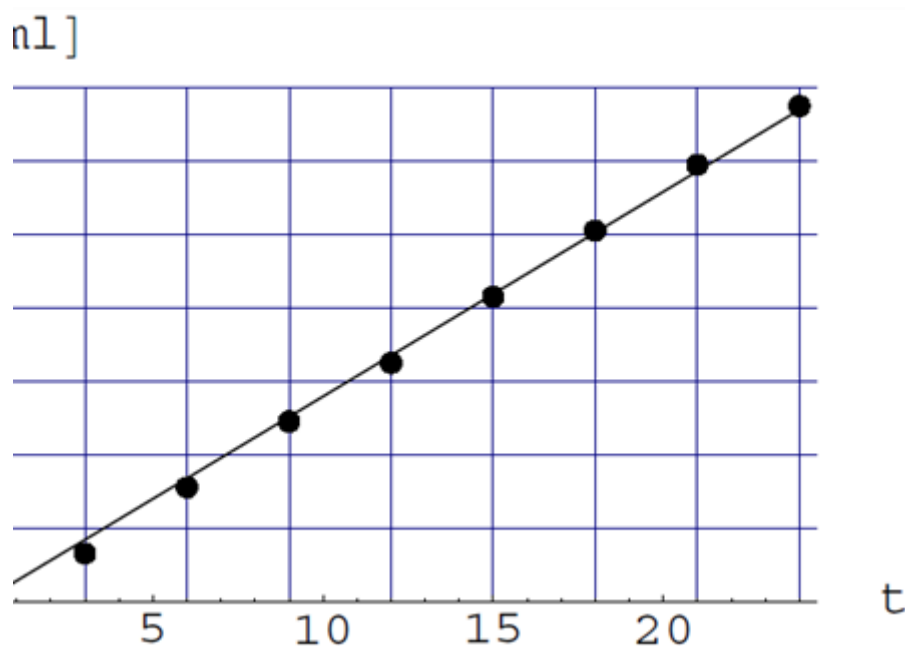
2.3. ábra. Nátrium-acetát kristályosodása kémcsőben. Jól megfigyelhető a határfelület „vándorlása” az egymást követő felvételeken. A felvételek 3 másodperces (azonos) időközökkel készültek



2.2. táblázat. A növekedő kristály térfogata az idő függvényében, $\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$ ($i = 0..7$).

t_i [sec]	0,0	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
V_i [cm ³]	0,0	1,3	3,1	4,9	6,5	8,3	10,1	11,9	13,5
ΔV_i [cm ³]	1,3	1,8	1,8	1,6	1,8	1,8	1,8	1,6	-

2.4. ábra. Nátrium-acetát kristályosodása. A kristály térfogatának változása az idő függvényében. (A 2.2. táblázat adatai és a mért adatokhoz illesztett egyenes.)



1.2. Mérés a felvételek számítógépes kiértékelésével

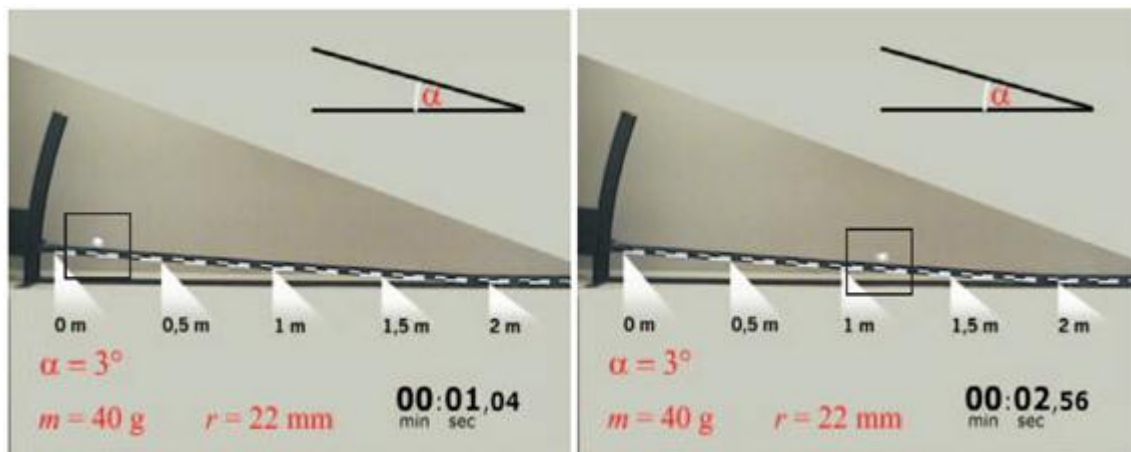
A számítógépes képfeldolgozás során az egyik első lépés a háttér hasznos információktól való elkülönítése. Esetünkben a háttér alatt olyan képpontokat értünk, amelyek nem mozdulnak el a felvétel során, tehát nem tartoznak a követni kívánt objektumhoz. A probléma jellegéből adódóan a legegyszerűbb háttérmodell alkalmazható, amikor feltételezhetjük, hogy a képpontok fényessége a mozgástól függetlenül, csak a kamera épített CCD⁴-re jellemző módon, a mérési eredményekhez hasonlóan normális eloszlásnak megfelelően változik. Ha tehát egy képpont fényessége jelentősen eltér az egymást követő néhány képkocka (frame) megfelelő képpontjait jellemző fényességértékek átlagától, akkor azt a képpontot nem tekintjük háttérpontnak, hanem azt mondjuk, hogy a mozgó objektumhoz tartozik.

A képpontok fényességének időbeli és térbeli változását ($I(x, y, t)$) az optikai áramlás (optical flow) elméletével írhatjuk le. Bár ez az eljárás a mi esetünknel lényegesen összetettebb probléma (mozgó objektum és mozgó háttér) megoldásában is eredményesen alkalmazható, ugyanakkor ebből adódóan meglehetősen nagy lehet a számításgénye is.

A képek kiértékeléséhez a felvételeknek azt a speciális tulajdonságát használjuk föl, hogy a vizsgált objektum egy lényegében változatlan háttér előtt mozog, ahogyan ez a 2.5. ábrán is megfigyelhető.

2.5. ábra. 3°-os lejtőn legördülő golyó a mozgás két különböző pillanatában (a megtett út 0,2 m és 1,2 m).

⁴Charge-coupled Device, azaz töltés-csatolt eszköz, amelyből külső áramkör segítségével kiolvasható a felületére optikailag vetített teljes kép azáltal, hogy minden, az egyes képpontoknak megfelelő kondenzátor képes átadni a töltését a szomszédjának.



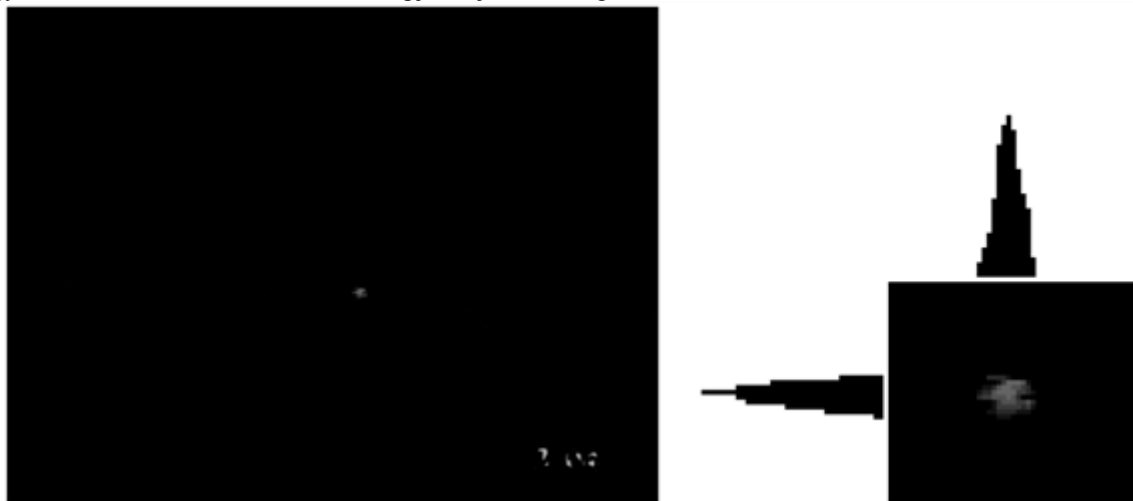
Ezt a körülményt figyelembe véve a probléma elég könnyen kezelhetővé válik. Mivel ezeknél a képeknél az egyes képpontokat a szinkódjuk alapján tároljuk a memóriában, minden képhez egy-egy mátrix rendelhető.

Ha tehát az egymást követő, feldolgozandó képek n sorból és soronként m képpontból állnak, minden képnek megfelel egy olyan $n \cdot m$ típusú mátrix, amelyben i -edik sorának j -edik eleme tárolja a megfelelő kép i -edik sorának j -edik képpontjáról a szükséges információt. A probléma szempontjából elegendő a képpontok fényességét, szürkeségi fokát tárolnunk a mátrixokban. Legyenek $\mathbf{A} = (a)_{nm}$ és $\mathbf{B} = (b)_{nm}$ a két feldolgozandó kép szürkeárnyalatos mátrixai. Most képezzük a két képnek megfelelő \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrixokból a

$$c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_{i,j} & \text{ha } b_{ij} \geq a_{i,j} \\ 0 & \text{ha } b_{ij} < a_{i,j} \end{cases}$$

szabály alapján a \mathbf{C} mátrix⁵ elemeit. \mathbf{C} -ben a változatlan háttér pontjainak megfelelő elemek nullához közeli értéket kapnak, és csak azok az elemek térnek el jelentősen nullától, ahol a két kép is jelentősen különbözik, azaz a mozgó objektumnak megfelelő részletekben (2.6. ábra).

2.6. ábra. A 2.5. ábra képeinek „pozitív különbsége”, valamint a golyó egy környezetének kinagyított részlete az intenzitásértékek alapján rajzolt hisztogramokkal.



A probléma szempontjából tehát a képpontok két csoportba sorolhatók. A háttér pontjai számunkra lényegtelenek, és ezekhez képest szeretnénk kiemelni a feladat szempontjából az információt hordozó pontokat, a mozgó objektumok pontjait. A valóságban nehéz megoldani, hogy a két kép egymásnak megfelelő pontjaihoz azonos intenzitásérték tartozzék, de különbségük lehet elegendően kicsi, ha a színeket alkalmas módon választjuk meg (sötét háttér, világos objektum). Jobban elkülönülnek a két csoport pontjai, ha a c_{ij} elemek alacsony értékű bitjeit egyszerűen elhagyjuk. Ráadásul ez a megoldás a kép későbbi kiértékelését is egyszerűbbé teheti.

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B} - \mathbf{A})_+$$

A további feladat a mozgó objektum helyének meghatározása. Ha a \mathbf{C} mátrix minden oszlopához hozzárendelnénk az oszlopbeli elemek összegét, azt tapasztalnánk, hogy azokhoz az oszlopokhoz tartozik nagyobb összeg, amelyekben több világos képpont tartozik a képen, amelyek a mozgó objektumot írják le. A sorok elemeinek összegzésével hasonló eredményre jutunk (2.6. ábra). Ez a fölismerés alkalmas lehet a golyó helyének meghatározására a képen. Legyenek tehát az elemű vektor valamint az elemű vektor elemei

$$v_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}, \quad w_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}$$

módon megadva.

Az objektum pozíciójának közelítéséhez számítsuk az oszloppozícióknak az oszlop elemeinek összegével súlyozott \bar{j} átlagát, valamint a sorpozícióknak a sor elemeinek összegével súlyozott \bar{i} átlagát:

$$\bar{j} = \frac{\sum_{j=1}^m (j \cdot w_j)}{\sum_{j=1}^m w_j}; \quad \bar{i} = \frac{\sum_{i=1}^n (i \cdot v_i)}{\sum_{i=1}^n v_i}.$$

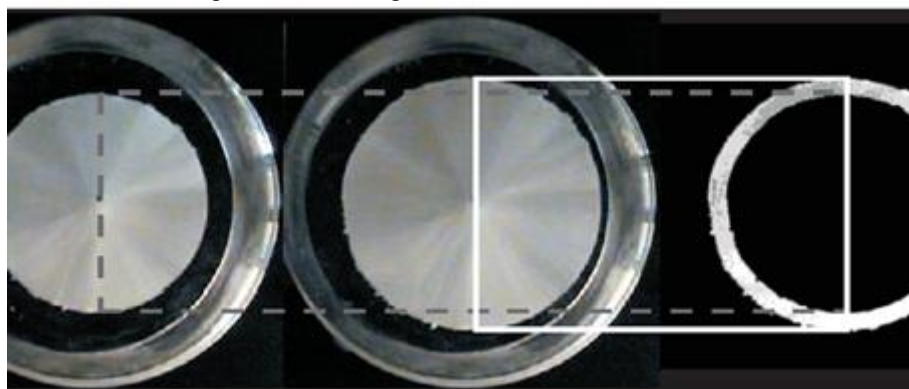
Megjegyezzük, hogy adott esetben – a kiértékeléshez szükséges idő csökkentése, és a kép esetleges zavaró részleteinek⁶ kiküszöbölése érdekében – célszerű lehet kijelölnünk a \mathbf{C} mátrixon egy olyan almátrixot, amely megfelel a kép azon részének, ahol a golyó mozgása során elhaladhat. Mindezt figyelembe véve \bar{j} és \bar{i} számítása az alábbiak szerint módosul:

$$\bar{j} = \frac{\sum_{j=g}^h \left(j \cdot \sum_{i=k}^l c_{ij} \right)}{\sum_{j=g}^h \sum_{i=k}^l c_{ij}}; \quad \bar{i} = \frac{\sum_{i=k}^l \left(i \cdot \sum_{j=g}^h c_{ij} \right)}{\sum_{i=k}^l \sum_{j=g}^h c_{ij}}$$

(ahol $1 \leq k \leq i \leq l \leq n$ valamint $1 \leq g \leq j \leq h \leq m$).

A fentebb ismertetett eljárást más kísérletek képeire alkalmazva esetleg más módot kell találnunk a szükséges információ \mathbf{C} mátrixból történő kinyeréséhez.

2.7. ábra. Nátrium-acetát kristályosodásának 6. és 7. másodpercében készült felvétel, valamint a két felvétel „pozitív különbsége”.



Nátrium-acetát-kristály síkban való növekedésének két fázisát, és a fenti eljárás alkalmazásának eredményét mutatja be a 2.7. ábra. Az így keletkezett körgyűrű jól szemlélteti az 1 másodperc alatt bekövetkezett növekedést. Ebben az esetben megadható olyan $\delta > 0$ konstans, amelynél nagyobb \mathbf{C} belső elemek száma

⁶Mivel az eljárás az egymást követő képek minden változására érzékeny, ilyen zavaró részlet a 2.5. ábra képein a jobb alsó sarokban kijelzett idő is, ami természetesen kockáról kockára változik. Ez a változás „nyomot hagyott” a 2.6. ábrán is.

hordozza a megfelelő információt. A körgyűrűt alkotó pixelek száma arányos az adott idő alatt kivált anyag mennyiségével.

2.8. ábra. Nátrium-acetát kristályosodásának 2. és 3., valamint a 6. és 7. másodpercében készült felvételek „pozitív különbségei”.



Ha azonban képezzük a \mathbf{V} és \mathbf{W} vektorokat is (a 2.8. ábra szemlélteti a vektorok elemeinek értékeit), azok feldolgozásával következtethetünk a körgyűrűk átmérőjére⁷, amiből aztán az anyagmennyiség számolható.

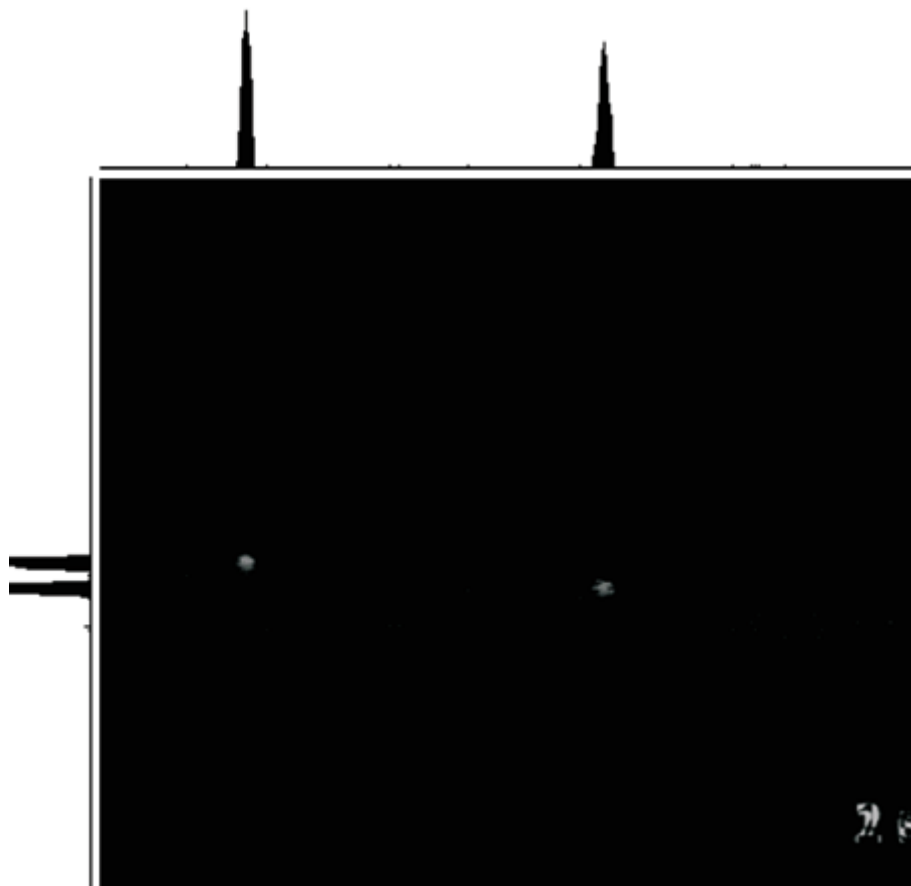
Ha most a \mathbf{C} mátrix elemeinek előállítására

$$c_{ij} = |b_{ij} - a_{ij}|$$

összefüggés alapján történik, a művelet szimmetriája miatt a mozgó objektum helye mindkét fázisban láthatóvá válik a \mathbf{C} mátrix alapján készült 2.9. ábrán. Ebből előállítva a \mathbf{V} és \mathbf{W} vektorokat, adott esetben két-két kiugró értékcsoportot találhatunk a vektorok elemei között. A pozíciók becslése csak akkor történhet a korábban ismertetett módon, ha előtte megtörténik azok elszeparálása.

2.9. ábra. A 2.5. ábra képeinek „abszolút különbsége”.

⁷ Tanulságos megfigyelni az így keletkezett körgyűrűk szélességét.



2. Jelenségtől a modellig

A differenciálegyenletek tanulmányozásával, felállításával és a differenciálegyenletes modellek vizsgálatával foglalkozó források szerzői motivációként a legkülönbözőbb példákat említnek: baktériumok szaporodása, radioaktív bomlás (exponenciális növekedés), fertőző betegségek okozta járványok lefolyása, információ terjedése (logisztikus növekedés). Ugyanakkor kevés példát láthatunk, amely alkalmas a modellalkotás kezdeti szakaszának bemutatására. Ezekben a példákban általában nem kap kellő hangsúlyt az, hogy a modellezni kívánt rendszer megismeréséhez méréseket kell végezni, hogy a törvényszerűségek alapjául, amelyek segítségével leírhatjuk a változásokat, ezek a mérések szolgálnak. Bizonyos esetekben indokolt lehet olyan jelenség választása, ami kísérleti mérésekkel könnyebben alátámasztható és még a felsoroltaknál is egyszerűbben modellezhető.

A szilárd anyagok egyik csoportját a kristályos anyagok alkotják. A fentiekén túl ennek gyakorlati jelentősége is indokolhatja a kristályosodás folyamatának vizsgálatát.

2.1. A jelenség leírása

Bizonyos tulajdonságai miatt a nátrium-acetát különösen alkalmas a folyamattal kapcsolatos mérések elvégzésére, a modellezés alapjául szolgáló összefüggések megállapítására.

Egy kémcsőbe nátrium-acetát túltelített oldatát töltjük. Az anyag egy kristályának behelyezésével elindítjuk a kristályosodás folyamatát. Az átalakulás sebessége ideális (nem túl gyors vagy kivárthatatlanul lassú) és az átalakulás jól figyelemmel kísérhető (2.3. ábra). Ugyanakkor a kísérletnek olyan csekély az eszköz- és anyagigénye, hogy akár „házi” körülmények között is elvégezhető. Ezek együttesen teszik lehetővé a szükséges pontosságú mérések egyszerű eszközökkel való végrehajtását.

2.2. A matematikai modell

Mivel a kristályosodás folyamatát kívánjuk modellezni, természetesnek tűnik, hogy a kristály (szilárd fázis) anyagmennyiségét tekintjük állapotváltozónak. A kísérleti mérések alapján feltételezzük, hogy az időegység alatt a szilárd fázisba kerülő anyagmennyiség független a már kivált anyag mennyiségétől és a időponttól:

$$X(t+1) - X(t) = \alpha \quad (t \geq 0). \quad (2.1)$$

A következő időpillanatra tehát a szilárd fázis anyagmennyisége α -val nő. Jelöljük a két állapot között eltelt időt h -val, hogy a problémát általánosabban tudjuk leírni. Ha nagyobbak választjuk az időintervallumot, akkor több anyag válik ki, ha kisebbnek, akkor kevesebb, tehát α függ h -tól: $\alpha(h)$.

Tehát a (2.1) egyenlet

$$X(t+h) - X(t) = \alpha(h) \quad (t \geq 0) \quad (2.2)$$

alakban írható fel.

A tapasztalat alapján az is nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0. \quad (2.3)$$

A 2.2. táblázat és a táblázat adatainak felhasználásával készült 2.4. ábra alapján feltételezhetjük, hogy h és a növekedés közötti összefüggés az egyenes arányosság. Ha tehát nagyobbak választjuk h -t, vele arányosan nő az ez idő alatt keletkező szilárd anyag mennyisége is. Így $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} (\lambda_1 > 0)$, hogy $\alpha(h) = \lambda_1 h$ (ahol λ_1 t -től és h -tól független, csupán a rendszerre jellemző állandó):

$$X(t+h) - X(t) = \alpha(h) = \lambda_1 h \quad (2.4)$$

A (2.4) összefüggést osszuk el h -val és h -val tartsunk 0-hoz:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \lambda_1.$$

Tehát a kísérlettel bemutatott jelenség a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_1 \quad (0 < \lambda_1) \quad (2.5)$$

2.3. A jelenség kémiai magyarázata

Fontos megjegyeznünk, hogy a kristály növekedésének sebessége (a szilárd fázis anyagmennyiségének növekedése időegység alatt) változatlan körülmények között a kristály felületének nagyságától és az oldat pillanatnyi koncentrációjától függ. A kísérlet során nátrium-acetát (NaAc) túltelített oldatát állítottuk elő. A NaAc, mint az ionkristályos anyagok, a kristályrácsukban vizet (úgynevezett kristályvizet) kötnek meg. A megkötött víz mennyisége jól jellemzi az adott ionkristályt. A NaAc trihidrát esetében 1 mól NaAc-ra 3 mól víz jut (NaAc \cdot 3H₂O). A só kristályhidrát tartalma a melegítés során távozik a rácsból és a nátrium-acetát oldott

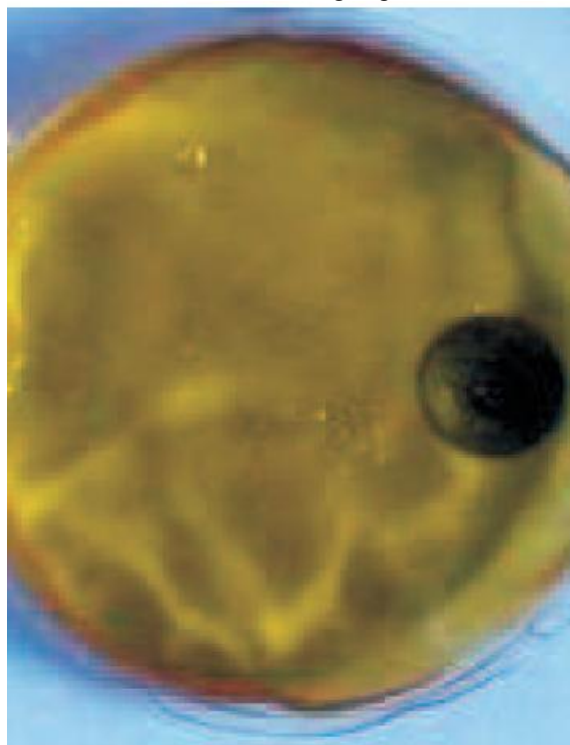
állapotban marad az edényben. Mivel a kristályok lényegében saját kristályvizükben oldódtak fel, a túltelített oldat is természetesen abban a (mól-) arányban (1:3) tartalmazza az összetevőket, mint a kristályos állapotú anyag.

A kristályosodás megindulását az oldatba helyezett kristály biztosítja. A teljes kristályosodási folyamat során, a rácsba beépülő anyagmennyiségek aránya is ugyanez lesz, tehát az oldat koncentrációja mindvégig állandó marad. A folyamat kezdeti (rövid) szakaszától eltekintve a növekedő kristálynak az oldattal érintkező felülete szintén változatlan. A fenti két körülményből az következik, hogy a határfelület időben egyenletesen halad előre.

2.4. A modell általánosítása

Kémiai szempontból valójában ugyanezek a változások mennek végbe a jól ismert melegítő párnácska (2.10. ábra) használata⁸ során is. Alkalmazásakor lényegében a melegítéskor elraktározott hőt nyerjük vissza.

2.10. ábra. Nátrium-acetát-oldatot tartalmazó melegítő párna.



Ebben az esetben, ha a párnácskát elég vékonynak képzeljük, idealizálhatjuk a jelenséget úgy, hogy a kristályok növekedése egy pontból kiindulva a sík minden irányában, körkörösen játszódik le, hiszen ahol a kristály az „edény” falával érintkezik, nem növekedhet tovább, mert a növekedés csak a kristály és az oldat határfelületén mehet végbe. Tudjuk, hogy a növekedési folyamat sebessége függ a kristály felületének nagyságától. Modellünkben ez arányos a kör

$$K(t) = 2\pi R(t) \quad (2.6)$$

kerületével.

A kísérlet tapasztalatait úgy is értékelhetjük, hogy a határfelület egyenletes sebességgel halad, melynek $R(t)$ elmozdulása egyenesen arányos az eltelt idővel. A határfelület, a tér egy adott irányába való elmozdulása:

⁸Melegítés hatására felbomlik az ionkristály, létrejön a NaAc túltelített oldata. A kristályosodás megindulását pedig az a mechanikai hatás okozza, amit a benne található rozsdamentes lapocskára „megpattintásával” hozhatunk létre.

$$R(t) = \rho t. \quad (2.7)$$

A szilárd fázisba beépülő anyagmennyiséget a kör sugara határozza meg a h időtartam alatt:

$$\alpha(h) = X(t+h) - X(t) = \beta K(t)h. \quad (2.8)$$

(A valóságban a kristály formája körhengerrel közelíthető. Palástjának területe a magasság és a $K(t)$ kerület szorzata. A magasságot a $\beta \in \mathbb{R}$ konstans alkalmas megválasztásával vehetjük figyelembe.)

A (2.6) és (2.7) összefüggések alapján látható, hogy (rögzített h esetén) $\alpha(h)$ arányos az eddig eltelt idővel minden időpillanatban:

$$\alpha(h) = X(t+h) - X(t) = \lambda_2 t h \quad (\lambda_2 = 2\beta\pi). \quad (2.9)$$

A (2.9) összefüggést elosztva h -val és h -val tartva 0-hoz:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \lambda_2 t.$$

Tehát a NaAc-kristály 2-dimenziós növekedése a

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_2 t \quad (0 < \lambda_2) \quad (2.10)$$

differenciálegyenlettel írható le.

Ha a kristály növekedésének semmiféle mechanikai akadályja nincs, és szabadon növekedhet a tér minden irányában, akkor a növekedő kristályt gömbszimmetrikusnak tekinthetjük és a növekedés sebessége a gömb

$$F(t) = 4\pi R^2(t) \quad (2.11)$$

felületével lesz arányos. Az előzőhöz hasonló gondolatmenet alapján az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

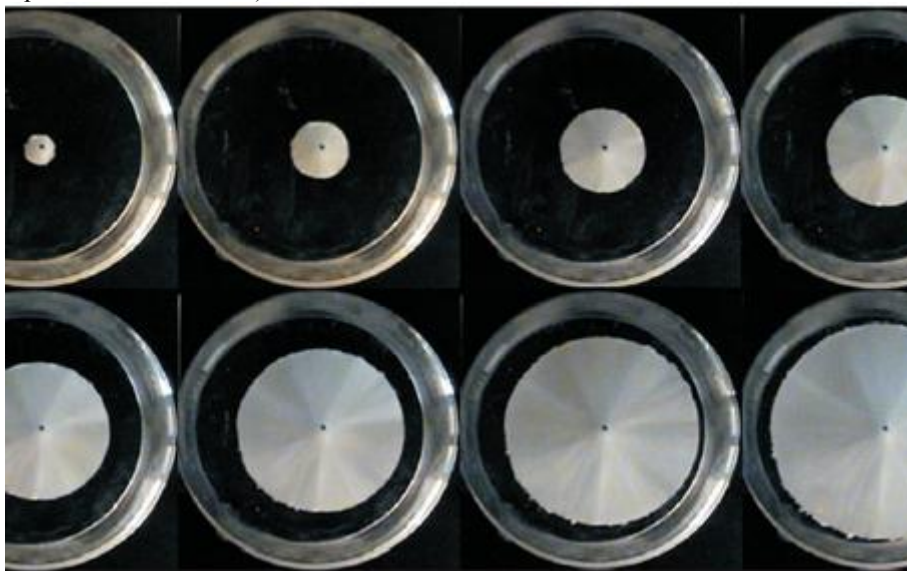
$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_3 t^2 \quad (0 < \lambda_3) \quad (2.12)$$

2.5. Az általánosított modell kísérleti igazolása

A kristályosítás körülményeinek megváltoztatásával valóban egészen más eredményre juthatunk a jelenség megfigyelése során. A kísérletet egy kristályosító tálkában elvégezve a kristály növekedése kevésbé van korlátozva. Így a határfelület az oldat felületével párhuzamosan, egy közös kiindulópontból a sík minden

irányában egyenletesen halad előre, ahogyan ez a 2.11. ábrán is megfigyelhető. Ennek megfelelően a kristály alakja – a növekedés minden pillanatában – jól közelíthető egy-egy megfelelő átmérőjű körlappal. A keletkezett szilárd anyag mennyisége tehát jól jellemezhető ezen körök átmérőjével vagy területével a kristályosodás minden pillanatában. A 2.3. táblázat ezeket az értékeket tartalmazza a folyamat első 10 másodpercében másodpercenként.

2.11. ábra. Nátrium-acetát kristályosodása a folyamat első 8 másodpercében. (A felvételek másodpercenként készültek.)



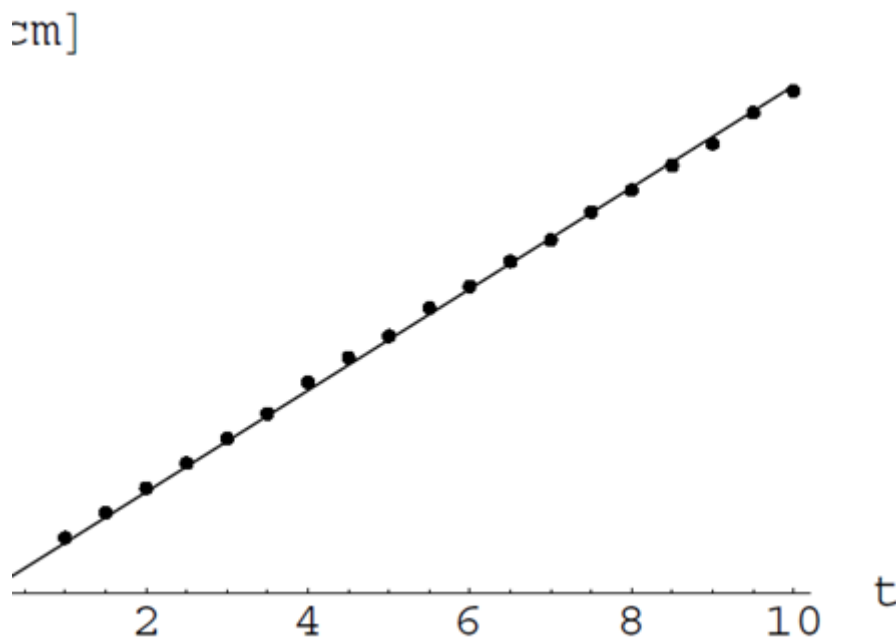
2.3. táblázat. A növekedő kristály átmérője (d) és vetületének területe (T) az idő függvényében.

t [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d [cm]	0,9	1,7	2,5	3,4	4,1	4,9	5,7	6,5	7,2	8,1
T [cm ²]	0,64	2,27	4,91	9,07	13,5	19,2	25,5	33,2	41,3	51,5

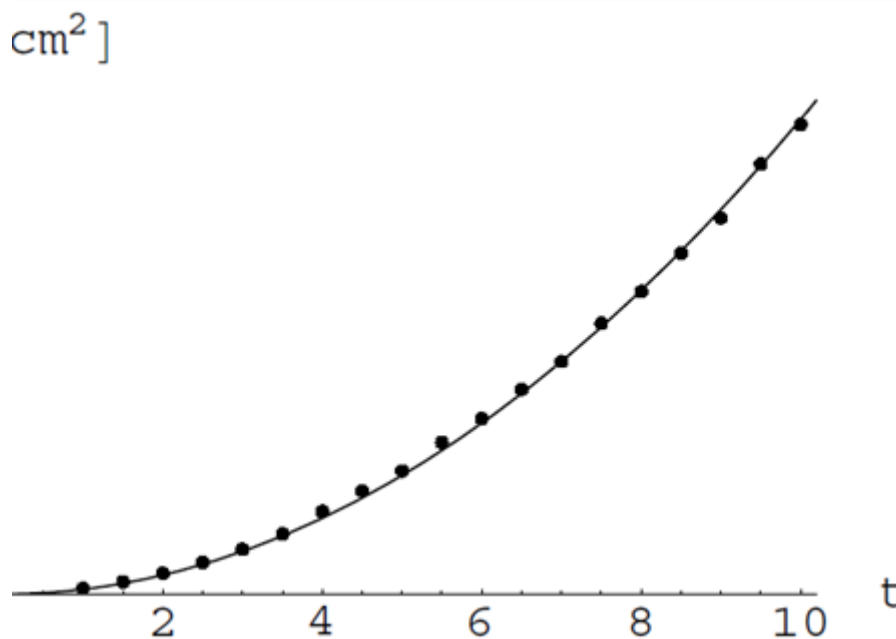
Az átmérő változása lényegében a határfelület középponttól való távolodását fejezi ki, így nem meglepő a 2.4. és a 2.12. ábrák közötti hasonlóság, hiszen mindkettő a határfelület elmozdulását írja le.

Tudjuk, hogy egy kör területe sugarának négyzetével arányos. Ha tehát a sugár az időben lineárisan változik, akkor a terület nagysága – ami arányos a kristály anyagmennyiségével – az eltelt idő négyzetével arányos. Ezt szemlélteti a 2.13. ábra.

2.12. ábra. A grafikon a növekedő kristály átmérőjének változását mutatja az idő függvényében.



2.13. ábra. A síkban növekedő kristály felületének változása az idő függvényében.



2.6. További általánosítások

A matematika történetében a XVII. század talán legnagyobb fölfedezéseit a differenciál- és integrálszámítás és a hozzá kapcsolódó eredmények jelentették. Mindezek aztán nagy lendületet adtak a többi tudományterület fejlődésének is, lehetővé téve ezzel a legkülönbözőbb jelenségek matematikai eszközökkel való leírását. Talán a kor technikai színvonalának köszönhetően elsők között a fizika volt, ahol eredményesen alkalmazták ezeket a hatékony matematikai eszközöket. A differenciálhányados ismerete tette lehetővé jónéhány alapvető, napjainkra közkeletűvé vált fogalom definiálását is.

A mechanika a fizikának az a területe, melynek alapvető feladata az anyagi pontok és a merev testek mozgására vonatkozó törvények, összefüggések megfogalmazása. Alkalmos koordináta-rendszerben vektorok segítségével tudjuk magadni egy anyagi pont helyzetét az idő függvényében:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Az $\mathbf{r}(t)$ tehát matematikai értelemben nem más, mint egy a valós számok halmazán értelmezett, vektor értékű függvény, amely által leírt helyvektor végpontja „megrajzolja” a mozgó pont pályáját. A pont helyét a időpontban a

$$r_x(t), r_y(t) \text{ és } r_z(t)$$

koordinátákkal adhatjuk meg.

Önmagában már az is jelentős eredmény, hogy így meg tudunk adni néhány, a pont elmozdulását leíró mennyiséget, de fontos lenne ismerni további, a pálya szempontjából pontbeli jellemzőket is. Mivel az adott időpillanat meghatározza a pont helyzetét a pályán, ezek a jellemzők azzal is megadhatók, hogy a mozgás mely időpillanatát vizsgáljuk. A mozgó pont pillanatnyi sebessége a mozgásállapot megváltozását fejezi ki, és a helyvektor idő szerinti differenciálhányadosaként definiálható:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (2.13)$$

A mennyiség vektorjellege miatt

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}; \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}; \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

alakban is megadhatjuk azt⁹, ahol $v_x(t)$, $v_y(t)$ és $v_z(t)$ a $\mathbf{v}(t)$ vektor x -, y - és z -tengelyekkel párhuzamos összetevőit jelöli. Ha vizsgálatainkat korlátozzuk az egyenes vonalú mozgások körére, a koordináta-rendszer megfelelő megválasztása után az írásmód leegyszerűsíthető:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetében tehát $v(t)$ értéke állandó, ami

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_1 \quad (2.14)$$

alakban írható.

A mozgás egy másik fontos jellemzőjeként a gyorsulás fogalmának definícióját adjuk meg. Mivel a gyorsulás olyan vektormennyiség, amely a sebesség megváltozását fejezi ki, azt egyenes vonalú mozgások esetében

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

alakban írhatjuk le. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásról akkor beszélhetünk, ha

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \mu_2.$$

(Ahol μ_2 a mozgásra jellemző valós konstans.) Ebből azonban

⁹Egy anyagi pont legáltalánosabb térbeli mozgása előállítható három egyenes vonalú mozgás összetételével, és a továbbiakban $v(t)$ alatt a sebesség x -irányú összetevőjét, $v_x(t)$ -t értjük.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_2 t \quad (2.15)$$

teljesülése is következik, ha a mozgó pont kezdetben nyugalomban volt. A (2.15) összefüggés kifejezi, hogy a sebesség értéke egyenesen arányos az eltelt idővel.

Folytatva a korábbi gondolatmenetet, amelyben az út-függvény első, majd második deriváltjainak adtunk fizikai jelentést, jogosan merülhet föl a kérdés, hogy vajon létezik-e olyan mozgásforma, amelyre a

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{d^3x(t)}{dt^3} = \mu_3 \quad (2.16)$$

összefüggés teljesül? (Ahol μ_3 valós konstans.) Ez ugyanis azt fejezi ki, hogy a gyorsulás értéke egyenletesen változik az idővel a mozgás során. Ugyanakkor, ha a mozgás nyugalmi helyzetből indul, akkor a sebességét az alábbiak szerint írhatnánk le:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_3 t^2 \quad (2.17)$$

Ilyen mozgás valósulna meg például egy függőlegesen fölfelé indított rakéta esetében, ha a hajtóanyag csökkenéséből és az indítás helyétől való távolodásból adódó gravitációs erő csökkenés figyelembe vételével adagolnánk az üzemanyagot úgy, hogy a gyorsító erő egyenletesen növekedjen.

Másik lehetőség az egyenes vonalú, egyenletesen változó gyorsulú mozgás megvalósítására, ha egy test olyan α hajlásszögű lejtőn csúszik le, ahol a súrlódási együttható a megtett úttal lineárisan csökken. A lejtőn való mozgás esetében ugyanis a gyorsító erő a súrlódási erő és a gravitációs erő lejtővel párhuzamos összetevőjének eredőjeként áll elő.

Összevetve a fenti (2.14), (2.15), (2.17) egyenleteket a korábbi (2.5), (2.10) és (2.12) egyenletekkel. Szembeötlő az egyezés annak ellenére, hogy merőben más jelenségeket írhatunk le velük.

3. fejezet - Matematikai háttér

„A matematika hozzászoktatja a szemünket ahhoz, hogy tisztán és világosan lássa az igazságot”

René Descartes

Számtalan kiváló szakirodalom foglalkozik a különféle differenciálegyenletek csoportosításával és matematikai megoldásaival. Itt csupán a téma pontosabb behatárolása céljából érintünk néhány fontos kapcsolódó fogalmat.

Lényegében differenciálegyenleteket adtunk meg az előző fejezetben is (kristályosodás és különböző egyenes vonalú mozgások leírása során), mikor arra kerestünk választ, hogyan növekszik a szilárd anyag mennyisége az idő előre haladtával, vagy hogyan változik egy mozgást végző test által megtett út az idő függvényében. Már ott fölmerült annak szükségessége, hogy az állapotváltozó értékét előállító függvény (a szilárd anyag mennyisége, a megtett út) különböző deriváltjaira hivatkozzunk. Említettük már, hogy a differenciálegyenletek megoldásait ilyen függvények jelentik. Szolgáljon alapjául most ez néhány alapvető fogalom bevezetéséhez.

A jelenségek természeténél fogva gyakran azok időbeli változását vizsgáljuk. Ezért és történeti szempontból is fontos az időbeli változások leírása. Időben lejátszódó folyamatok például egy baktériumtenyésztés növekedése, valamely termék keletkezése adott kémiai reakcióban, vagy akár a mobiltelefon használók számának változása az országban¹.

Ha azonban csak az időbeli változásokra szorítkozunk, vagy a tér egy kitüntetett irányában haladva vizsgáljuk a változásokat², vagy még általánosabban; valamely változó mennyiség – például a hőmérséklet – hogyan befolyásolja a rendszer állapotváltozójának – például a vízben oldott oxigén koncentrációját – értékét, (vagy a nyomás változtatása a reakcióterben milyen hatással van az átalakulás sebességére), akkor az ilyen differenciálegyenletek megoldásai mindig a valós számok halmazán értelmezett függvények lesznek. Ilyen esetekben *közönséges* differenciálegyenletekről vagy egyenletrendszerekről beszélünk.

Azokat az egyenleteket, amelyeknek többváltozós függvények a megoldásai, és ezeknek függvényeknek különböző változóik szerinti parciális deriváltjai is szerepelnek az egyenletekben, *parciális* differenciálegyenleteknek nevezzük. Nagyon fontos jelenségek (hővezetés, hullámok terjedése, rezgő húr illetve membrán viselkedése) matematikai leírásában fontos szerepet játszanak.

1. Néhány differenciálegyenlettel kapcsolatos fogalom

Jelölje y azt a függvényt, amelynek a helyettesítési értéke az x helyen $y(x)$. Ez azt jelenti, hogy egy $P(x, y)$ pont esetében, csak az y függvény pontos ismeretében tudjuk megmondani, hogy a síkon hol is van valójában a P .

Legyen például $y(x) = x^2$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

Most már tudjuk, hogy az összes ilyen pontok halmaza egy az origón áthaladó parabolát ír le. Az $y(x)$ teljes értelmezési tartományán igaz, hogy

$$y'(x) = 2x. \tag{3.1}$$

Formálisan valójában egy differenciálegyenletet kaptunk. Az ismert deriválási szabályok alapján azonban azt is tudjuk, nem csak a fent bevezetett $y(x) = x^2$ megoldása ennek az egyenletnek, hanem az összes

¹Természetesen más összefüggésben lehet értelme ezek térbeli alakulását is vizsgálni.

²Ahogy a neutrális szál alakját írja le a (8.7) egyenlet.

$$\hat{y}(x) = x^2 + c$$

alakú függvény is ($\forall c \in \mathbb{R}$). Ezek alapján azt is mondhatjuk, hogy végtelen sok megoldást találtunk, és ezeknek a képei az y -tengely mentén való alkalmas eltolásokkal átvihetők egymásba. Tehát az egyes parabolák a c értékével jellemezhetők, azaz c rögzítésével kiválaszthatunk egy parabolát. Ugyanakkor azt is könnyű látni, mivel c tetszőleges valós szám lehet, a sík minden P pontjához található parabola, amely áthalad azon. Az ehhez tartozó függvény esetében képezve az $\hat{y}'(x) = (x^2 + c)'$ differenciálhányadost, geometriai értelemben a sík minden pontjához hozzárendeltük a ponton áthaladó görbe érintőjének meredekségét.

A differenciálegyenleteknek ezt a tulajdonságát szemléletesebbé tehetjük, ha az $y(x)$ értelmezési tartományából elhagyjuk az $x = 0$ helyet, és (3.1)-et az alábbiak szerint alakítjuk át:

$$y'(x) = 2\frac{x^2}{x}, \quad \text{azaz} \quad y'(x) = 2\frac{y(x)}{x}. \quad (3.2)$$

Bár így egy másik differenciálegyenletet nyertünk, és az eredeti függvény ennek is csak egy megoldása lesz, fentiek mégis alapjául szolgálhatnak a következő általánosításnak.

Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, ekkor az

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (3.3)$$

egyenlet a (2.5), (2.10), (2.12), (2.14), (2.15), (2.17), (3.1) és a (3.2) egyenletek általánosításaként tekinthető³.

A (3.3) egyenlethez hasonló egyenleteket elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenleteknek nevezzük.

További általánosítás eredményeként nyert

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (3.4)$$

egyenletet n -edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek⁴ nevezzük

(ahol $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$), ugyanis (3.4)-ből $n = 1$ esetén (3.3)-at kapjuk.

Az $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervallum) függvény akkor megoldása (3.4)-nek, ha

1.

y n -szer differenciálható,

2.

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in T,$$

3.

³A későbbi fejezetek (4.2), (4.4), (8.1) és (8.2) egyenletei is ilyen alakúak.

⁴Néhány további másodrendű egyenlet: (4.16), (8.3), (8.7), (8.9), (8.14), (8.16) és (8.18).

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

teljesül ($\forall x \in I$).

Most legyen $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ ($i = 1, \dots, n$) vektorfüggvény. Ekkor az

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.5)$$

egyenletekből álló elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet-rendszerhez⁵ jutunk (ahol $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és $f_i : T \rightarrow \mathbb{R}$), ugyanis (3.5)-ből $n = 1$ esetén (3.3)-at kapjuk.

Az $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$) függvény akkor megoldása (3.5)-nek, ha

1.

\mathbf{y} n -szer differenciálható,

2.

$$(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \in T,$$

3.

$$y_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

teljesül ($\forall x \in I$).

A korábbiakban már láttuk, hogy egy differenciálegyenlet megadása bizonyos értelemben ekvivalens egy görbesereg megadásával.

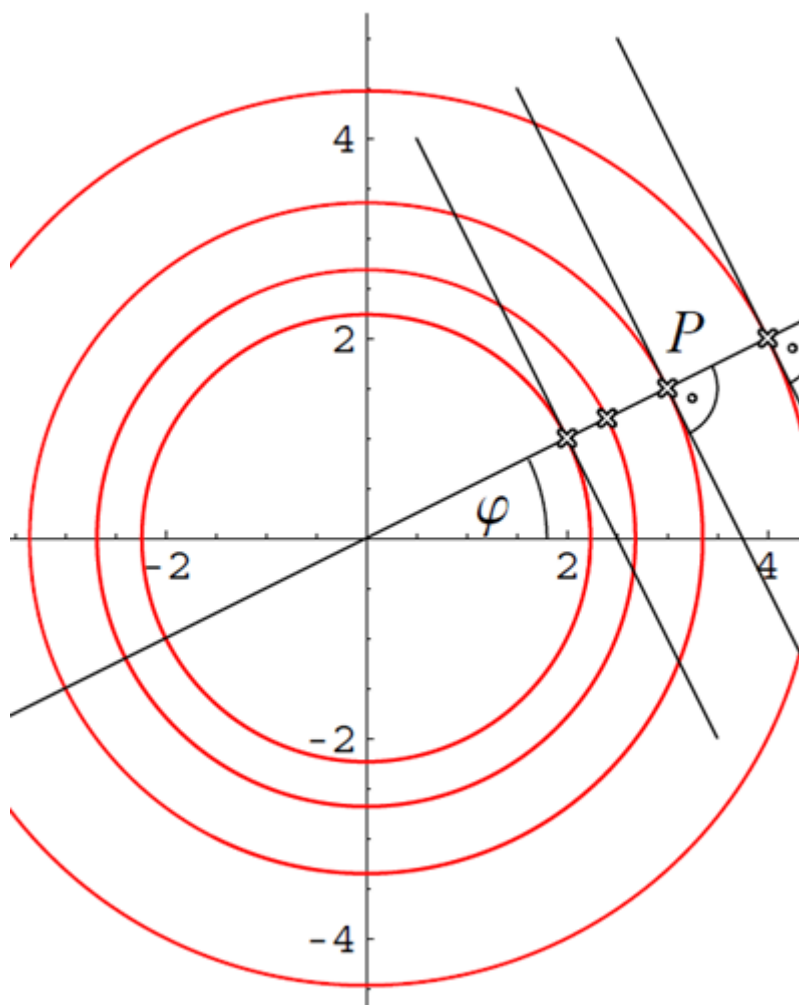
Most járjunk el fordítva: definiáljuk a görbéket, és keressük meg hozzájuk azt a differenciálegyenletet, amelynek megoldásait az adott görbéket leíró függvények jelentik.

Adjuk meg az origó középpontú köröket leíró differenciálegyenletet. Az ilyen koncentrikus körök esetében teljesül, hogy a közös középponton áthaladó – az x -tengellyel φ szöveget bezáró – e egyenesre illeszkedő $P(x, y)$ pontjaik esetében

$$\frac{y}{x} = c \quad (x \neq 0).$$

3.1. ábra. Origó középpontú koncentrikus körök.

⁵Néhány elsőrendű egyenletrendszer: (4.1), (4.7), (4.11), (4.12), (4.14), (8.20) és (8.21).



Tehát c értéke független a sugártól, csupán a φ megválasztásától függ, és rögzített φ esetén e minden pontjában⁶ teljesül (ld. a 3.1. ábrát). Ez a hányados – a φ tangense – alkalmas az e egyenes irányának jellemzésére. Tudjuk, hogy a P -n áthaladó kör érintője merőleges az e egyenesre P -ben, hiszen e áthalad a kör középpontján. Az érintők iránya $-c^{-1}$ értékével adható meg a merőlegesség miatt. Ha tehát egy körvonal valamely P pontjának második koordinátáját $y(x)$ függvény segítségével adhatjuk meg, akkor az $y'(x)$ alkalmas a kör érintőjét jellemző irány megadására a P -ben. Az

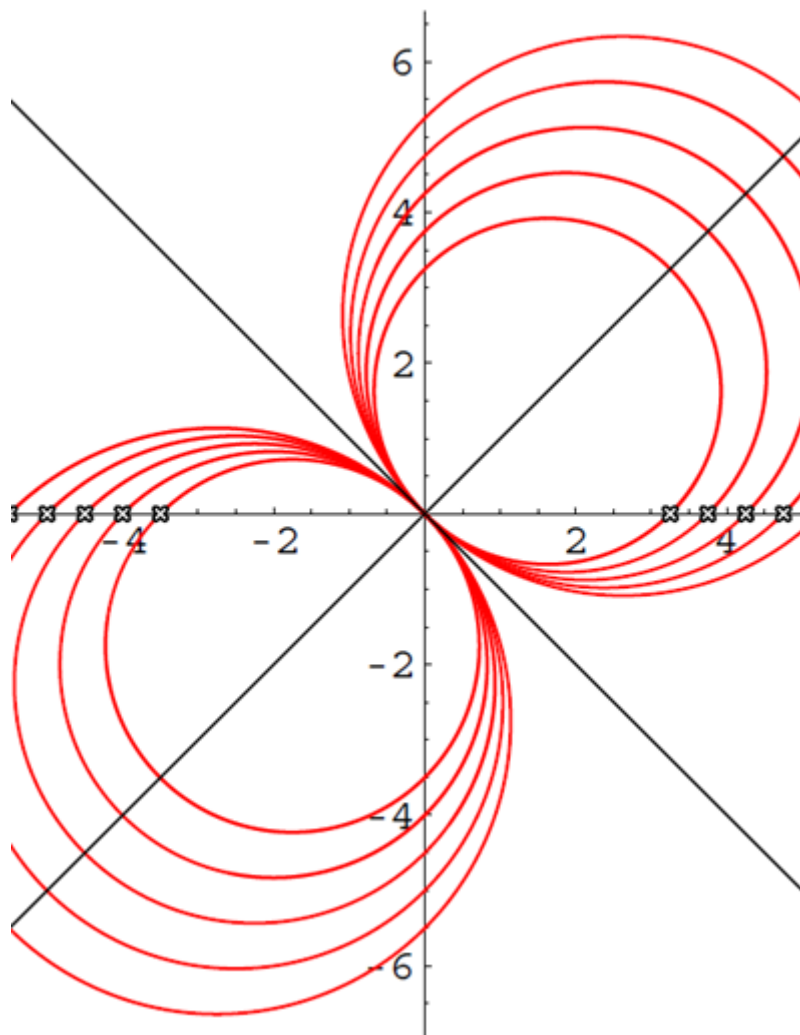
$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

differenciálegyenlet pedig pontosan ezeket a köröket írja le a differenciálhányados geometriai jelentése alapján.

Most adjuk meg azoknak a köröknek a differenciálegyenletét, amelyek egymást és az $y = -x$ egyenest az origóban érintik. Geometriai ismereteink alapján az ilyen körök középpontjai a koordináta-rendszer I. és III. negyedébe esnek és illeszkednek az $y = x$ egyenesre, ahogyan ez a 3.2. ábrán is látható.

3.2. ábra. Az $y = -x$ egyenest origóban érintő, az x -tengely adott pontjain áthaladó körök.

⁶Természetesen az origót kivéve, de ezt az $(x \neq 0)$ feltétel is kizárja.



Jelölje $O(u, u)$ tehát egy ilyen kör középpontját. Ekkor a kör egyenlete

$$(x - u)^2 + (y - u)^2 = 2u^2$$

alakban írható. A hatványozás és egyszerűbb átalakítások után

$$x^2 + y^2 - 2u(x + y) = 0$$

formában kapjuk meg a kör egyenletét. Ezt x szerint deriválva az egyenlőségből kifejezhető az u :

$$u = \frac{x + yy'}{1 + y'}$$

Az u -ra így kapott kifejezést a kör egyenletébe visszahelyettesítve az a következő alakra hozható:

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{x^2 + xyy' + xy + y^2y'}{1 + y'} = 0 \quad (3.6)$$

Látható módon (3.6) csupán azonos átalakításokkal nem hozható (3.3) alakúra. Ez csak azt jelenti, hogy az egyenletnek ebben a formájában nem tudunk geometriai jelentést tulajdonítani, és az egyszerűbb írásmód érdekében célszerű bevezetni az

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (3.7)$$

általános alakban írható n -edrendű közönséges implicit differenciálegyenlet fogalmát. Ahol $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ adott folytonos függvény.

Az $y : I \rightarrow \mathbb{R} (I \subset \mathbb{R})$ függvény akkor megoldása (3.7) differenciálegyenletnek, ha

1.

y n -szer differenciálható,

2.

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \in D,$$

3.

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0$$

teljesül ($\forall x \in I$).

(A (3.7) alakú egyenletek általában több explicit egyenlet megadása mellett oldhatók meg.)

2. Kezdetiérték-probléma

Ahogy az már a korábbiakban láthattuk, gyakran a differenciálegyenletekkel bizonyos jellemzők időbeli változásait kívánjuk leírni. Ilyen esetekben célszerűnek látszik a függvények idő szerinti deriváltjának ismert jelölését alkalmaznunk. Ennek megfelelően például a sebesség definíciójakor megadott (2.13) összefüggést

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

alakban is írhatnánk.

Az algebrai egyenletekhez hasonlóan egy differenciálegyenlettel kapcsolatban is fölmerülnek a kérdések: Létezik-e megoldása? Hány megoldása van?

Differenciálegyenletes modellek esetében gyakran adódik olyan körülmény, amikor keressük az

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) \quad (3.8)$$

egyenlet olyan megoldását, ahol

$$X(t_0) = X_0 \quad (3.9)$$

teljesül, azaz a megoldásgörbe áthalad a $P_0(t_0, X_0)$ adott ponton. Az ilyen problémákat kezdetiérték (Cauchy-féle) feladatoknak nevezzük.

Ha például időbeli változásokat vizsgálunk, ez azt jelenti, hogy ismerjük a rendszer állapotát egy adott időpillanatban, és annak fejlődéséről szeretnénk többet megtudni. Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy ilyen esetekben nincs szükségünk a (3.8) egyenlet összes megoldására. Ha tehát egy rendszert vagy jelenséget differenciálegyenlettel írunk le, és a „működését” szeretnénk vizsgálni annak egy adott állapotából kiindulva, akkor lényegében csak az adott feltételeknek megfelelő megoldás ismerete szükséges számunkra. Ilyenkor a modellek alkalmazása során lényegében kezdetiérték feladatot kell megoldanunk. Geometriai értelemben pedig a sok görbe közül csak azt kell meghatároznunk, amely áthalad (x_0, y_0) ponton. A helyzet még ennél is kedvezőbb, hiszen a gyakorlat szempontjából a legtöbb esetben elegendő, ha a megoldásokat „csak” tetszőleges pontossággal⁷ tudjuk előállítani. Ez a gondolat elvezet minket a konvergencia fogalmának fölhasználásához ezekben a megoldási módszerekben.

A fentiek általános formában való leírásához legyen adott $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és a rögzített $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in T$.

Az

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \\ y^{(i)}(x_0) &= y_{0i+1}, \quad (i = 0, \dots, n-1) \end{aligned} \tag{3.10}$$

feladatot egy n -edrendű közönséges explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának nevezzük (ami $n = 1$ esetén (3.8)-nak megfelelően $y' = f(x, y)$ alakban írható.)

Ahol az

$$y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}, \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.

Az $y : I \rightarrow \mathbb{R} (I \subset \mathbb{R})$ függvény akkor megoldása (3.10)-nek, ha

1.

y n -szer differenciálható,

2.

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in T,$$

3.

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

4.

$$y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

teljesül ($\forall x \in I$).

Vélhető módon az n -ed rendű differenciálegyenletek esetében a kezdeti feltételek megadása szűkíti a lehetséges megoldások körét. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy csak olyan megoldást fogadunk el, amely „áthalad” a T tartomány

⁷Ez azt jelenti, hogy nagyobb idő, munka, energia vagy más erőforrás igénybevételével a pontosság tovább növelhető, ha arra van szükség. Ahhoz hasonlóan, ahogyan a műszaki számítások szempontjából nélkülözhetetlen π – ami köztudottan végtelen tizedestört – értékét is csak a szükséges pontossággal vesszük figyelembe.

$(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n})$

pontján.

Most tekintsünk egy olyan rendszert, amelynek állapotát több változóival jellemezzük például az idő függvényében. Az ilyen rendszerek modellje egy alkalmas differenciálegyenlet-rendszer lehet. Például egy kémiai egyensúlyi rendszerben más-más változások történnek attól függően, hogy a rendszer állapotát jellemző, egymással reagáló anyagok milyen arányban vannak jelen. Ilyen reakciót ír le a (8.21) egyenlet is.

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy differenciálegyenlet-rendszerek esetében is van értelme a megoldást bizonyos kezdeti feltételek mellett keresni.

Most legyen

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

vektorfüggvény és az $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ differenciálegyenlet-rendszer, ahol

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : T \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Keressük a megoldását a

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (\text{rögzített}) \quad (3.11)$$

feladatnak.

Ezt a problémát differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladatnak⁸ nevezzük.

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény megoldása a (3.11) kezdetiérték feladatnak, ha

1.

\mathbf{y} n -szer differenciálható,

2.

$$(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \in T,$$

3.

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

4.

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

teljesül ($\forall x \in I$).

Az utóbbi két fogalom (n -edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre és n egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladat) között teremt kapcsolatot a következő állítás, az átviteli-elv⁹.

⁸Cauchy-feladat

⁹Az átviteli-elv alkalmazása lehetővé teszi, hogy az n -edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémák vizsgálatát differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladatok megoldására vezessük vissza.

Legyen $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény,

$(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) = (x_0, \mathbf{y}_0) \in T$ (rögzített).

Az $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása (3.10)-nek I -n, ha az (y, y', \dots, y^{n-1}) függvény n -es megoldása a

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

diffenciálegyenlet-rendszerre vonatkoztatott kezdetiérték feladatnak az I intervallumon.

4. fejezet - Egy modell gyakorlati alkalmazási lehetőségei

„Ez mindig megdöbbentő élmény. Az embert meglepi, hogy elmeszüleménye csakugyan megvalósulhat odakint, a tényleges világban. Nagy megrázkódtatás és nagy-nagy öröm.”

Leo Kadanoff

Az előzőekben tárgyalt valamennyi jelenség esetében csupán egy jellemzőjüket figyelembe véve írtuk le az állapotuk változását. Bonyolultabb rendszerek megfelelő leírásához általában több mindent kell számításba venni. Legyenek

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$$

azok a változó értékek, amelyekkel az adott rendszer állapotát jellemezni tudjuk a t időpontban. Az $X_i(t)$ -k tekinthetők az $\mathbf{X}(t)$, a valós számok halmazán értelmezett vektor értékű függvény komponenseiként is. A rendszer változását kifejező differenciálegyenlet tehát az $\mathbf{X}(t)$ függvény változását írja le a következő általános formában:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t)).$$

A további vizsgálódás céljából tekintsük a

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= (b_1 + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t))X_1(t) + c_1X_2(t) + e_1 \\ \dot{X}_2(t) &= (b_2 + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t))X_2(t) + c_2X_1(t) + e_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

differenciálegyenleteket (ahol $a_{11}, a_{12}, b_1, c_1, e_1, a_{21}, a_{22}, b_2, c_2, e_2$ valós konstansok, $X_1(t), X_2(t)$ pedig a valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvények). Nem titkolt célunk, hogy a (4.1) egyenletekkel valamely rendszer két jellemzőjének változását írjuk le. Nyilvánvaló, hogy

$$a_{12} = 0, \quad c_1 = 0, \quad a_{21} = 0, \quad c_2 = 0$$

esetén az $X_1(t)$ állapotváltozó értéke nincs hatással $X_2(t)$ változására és fordítva, $X_1(t)$ sem függ $X_2(t)$ értékétől. Ebben az esetben két független rendszerként is tekinthetjük azokat. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a (4.1) egyenletek milyen feltételek mellett felelnek meg valamely jól ismert modellnek.

1. Exponenciális növekedés (Malthus-modell)

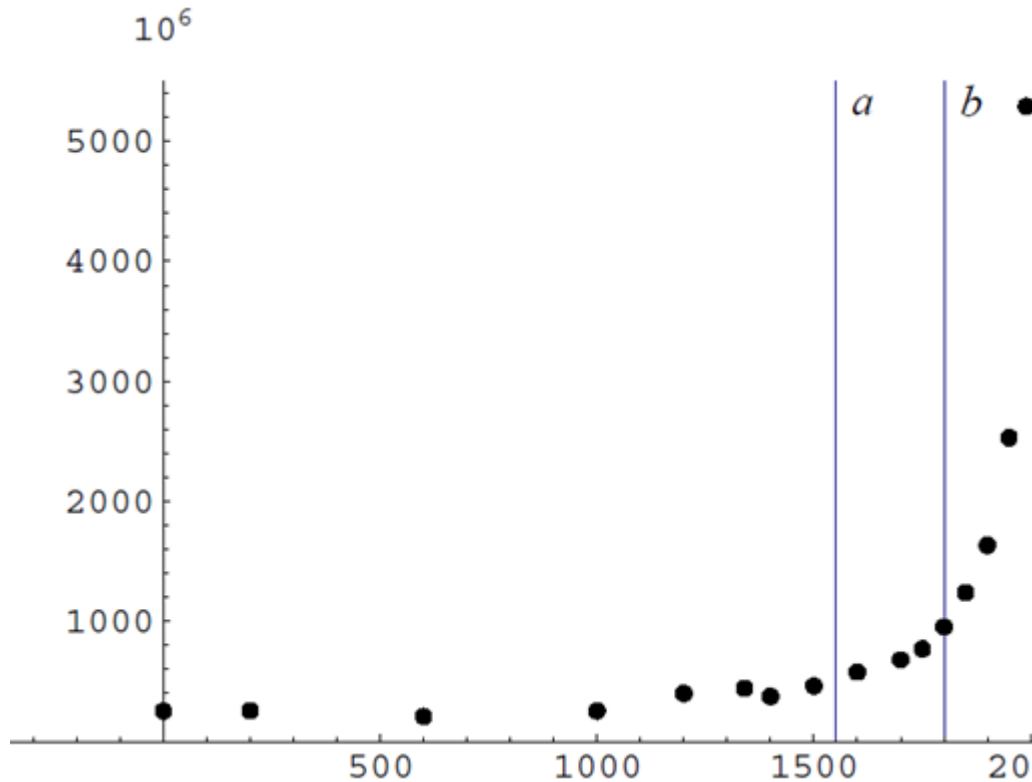
Az angol nemesi családból származó *Thomas Robert Malthus (1766–1834)* az elsők között foglalkozott a populációdinamika kérdéseivel. Modelljét arra az egyszerű felismerésre alapozta, hogy a tapasztalatok alapján nagyobb létszámú „közösségekben” több utód születik. *An Essay on the Principle of Population (1798)* című munkájában egy az

$$\dot{N}(t) = kN(t)\tag{4.2}$$

egyenlethez hasonló egyenletet javasolt a populáció változásának leírására. (Ahol $N(t)$ jelenti a populáció nagyságát a t időpontban, és a $k \in \mathbb{R}$ növekedési ráta határozza meg a változás ütemét és irányát.)

Malthus elképzelésének megfelelően az egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy a populáció nagyságának megváltozása arányos annak pillanatnyi nagyságával.

4.1. ábra. A Föld népességének alakulása ie. 400-tól 2000-ig.



A XVI. századot megelőző időre vonatkozólag csupán következtetés és becslés útján előállított adatok állnak rendelkezésre, ezért Malthus csak az a -val és b -vel jelzett időpontok közötti időszakhoz tartozó adatokra alapozhatta elméletét.

¹ Modellje segítségével egy akkoriban meglepő, váratlan megállapítást tett. Abból a tapasztalatból, hogy míg a létfenntartáshoz szükséges javak, mint például az élelmiszer előállításának növekedése lineáris, addig (modellje szerint) a népesség (4.1. ábra) exponenciálisan növekszik², arra a következtetésre jutott, hogy a Föld eltartó képessége korántsem végtelen. Figyelemre méltó, hogy már több mint két évszázaddal korábban, a XVIII. század végén felismerte valaki, ezt a napjainkra igencsak aktuálissá váló problémát. Népesedési elmélete a demográfia, a politika és a közgazdaságtan fejlődésén túl jelentős hatással volt *Charles Darwin*ra is evolúciós elméletének megalkotásában.

4.2. ábra. Az exponenciális változás jellegzetes görbéi.

$$a: \dot{b}_1 = +0,3 X_1(0) = 10000 \quad X_2(0) = 0$$

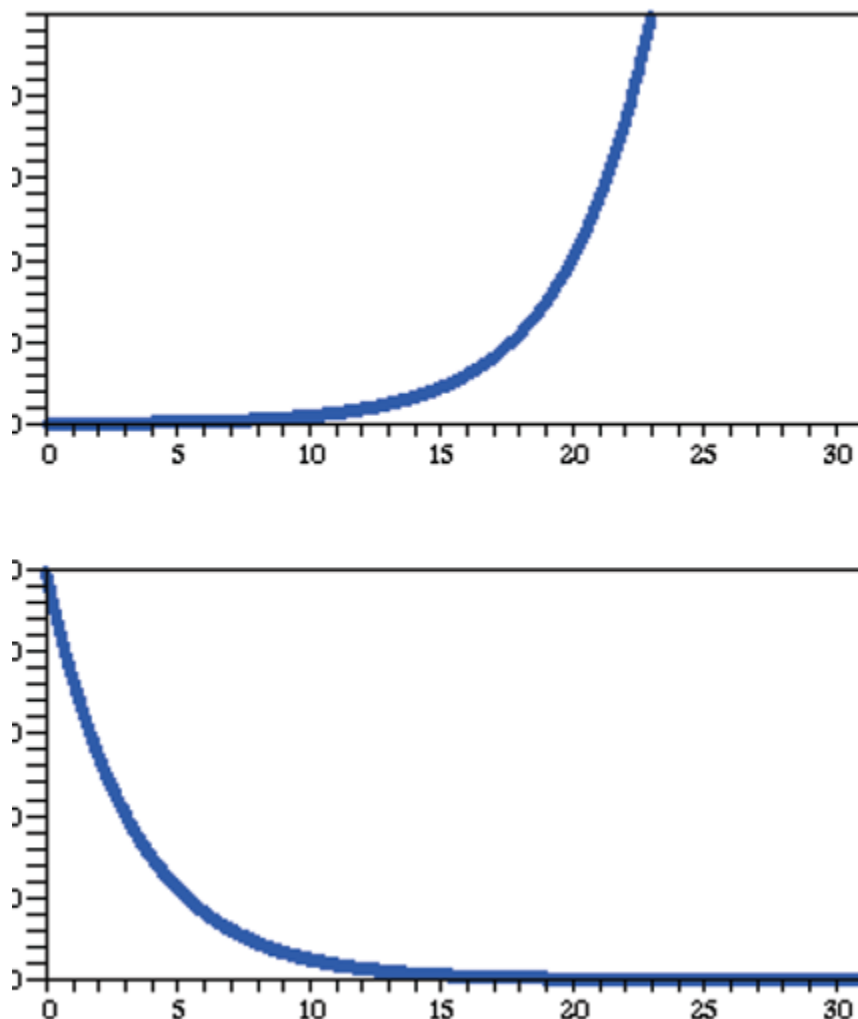
$$b: \dot{b}_1 = -0,3 X_1(0) = 10000 \quad X_2(0) = 0$$

¹ Forrás:

Biraben, N.J., *Essai sur l'évolution du nombre des hommes*, Population (1979)

Livi Bacci, M., *A Concise History of World Population: An Introduction to Population Processes*, Blackwell Publishing (2001)

² „Az állat- és növényvilágban a természet bőkezűen szórja az élet magvait, de annál szűkmarkúbban a táplálékot és a teret, melyen ez az élet tenyészhet. Ha a földi élet csírái adakálytalanul fejlődhetnének, pár ezer év alatt a világok millióit népesíthetnék be.”



Megfelelő együtthatókat helyettesítve a (4.1) egyenletekbe és alkalmas kezdő értékeket választva

$$\dot{X}_1(t) = b_1 X_1(t) \quad (4.3)$$

alakban, a Malthus-féle egyenlethez hasonló formára hozhatók, ahol

$$\begin{aligned} b_1 &> 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 0, & e_1 &= 0 \\ b_2 &\in \mathbb{R}, & a_{21} &\in \mathbb{R}, & a_{22} &\in \mathbb{R}, & c_2 &= 0, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$

és $X_1(0) > 0$, $X_2(0) = 0$. A 4.2. ábra grafikonjai ezek figyelembe vételével készültek. A Malthus-féle modell alkalmas a populáció növekvő és csökkenő változásának leírására egyaránt, különösen a növekedés kezdeti szakaszában, ugyanakkor pontosan az általa fölvetett növekedési korlátokat nem képes kezelni.

2. Logisztikus növekedés (Verhulst-féle modell)

Pierre-François Verhulst (1804–1849) belga matematikus 1838-ban tovább fejlesztette Malthus modelljét, amely lehetővé teszi, hogy figyelembe vegyünk a populáció egyedei közötti erőforrásokért folytatott belső versenyt. A növekedés zárt környezetben, korlátozott erőforrások mellett folyik, amely visszahat a növekedésre és akadályozza azt. Az adott rendszer tehát jól jellemezhető a környezet eltartóképességével:

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \quad (4.4)$$

Ahol r a növekedési ráta (Maltus-féle paraméter), K a környezet eltartóképessége, $N(t) > 0$ pedig jelenti a populáció méretét a t időpontba ($r, K \in \mathbb{R}^+$).

Az együtthatók alkalmas megválasztásával a (4.1) egyenlet (4.4)-hez hasonló formára hozható:

$$\dot{X}_1(t) = (b_1 + a_{11}X_1(t))X_1(t), \quad (4.5)$$

ahol

$$\begin{aligned} b_1 &> 0, & a_{11} &< 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 0, & e_1 &= 0 \\ b_2 &\in \mathbb{R}, & a_{21} &\in \mathbb{R}, & a_{22} &\in \mathbb{R}, & c_2 &= 0, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{és } X_1(0) > 0, \quad X_2(0) = 0.$$

A (4.5)-ös egyenletben elvégezve a

$$b_1 = r, \quad a_{11} = -\frac{r}{K} \quad \text{és} \quad X_1(t) = N(t)$$

helyettesítéseket ez könnyen látható.

Verhulst elgondolása szerint, a populáció méretének növekedésével csökkennie kell a növekedési rátának. Lényegében a Malthus-féle modellt – amelyben a növekedést a növekedési ráta és a populáció méretének szorzata határozza meg – kiegészítette egy olyan szorzótényezővel, melynek értéke 0-hoz tart, ha $t \rightarrow \infty$.

Ha az eltartóképességnél kisebbnek választjuk a populáció kezdeti $N(t_0)$ méretét, akkor

$$0 < \frac{N(t_0)}{K} < 1$$

teljesül, azaz az

$$1 > 1 - \frac{N(t_0)}{K} > 0,$$

ami nem változtatja meg (4.4) jobboldalának előjelét, ugyanakkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = 0.$$

Ellenkező esetben, ha a $N(t_0) > K$, akkor

$$\frac{N(t_0)}{K} > 1,$$

tehát

$$1 - \frac{N(t_0)}{K} < 0,$$

és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = 0$$

szintén teljesül. Ahogyan $N(t)$ értéke megközelíti az eltartóképességet, az

$$\frac{N(t)}{K}$$

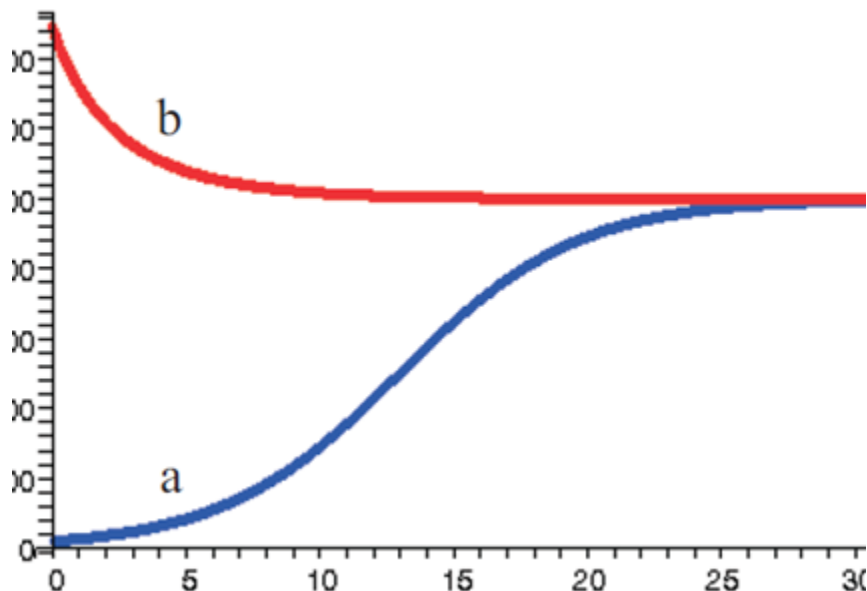
tört értéke 1-hez közeli érték lesz. Ezt a korlátozó szerepet szemlélteti a 4.3. ábra:

- a: $N(t_0) < K$,
- b: $N(t_0) > K$.

4.3. ábra. Logisztikus növekedés.

$$\text{a: } b_1 = 0,3 a_{11} = -3 \cdot 10^{-6} X_1(0) = 2,0 \cdot 10^3 X_2(0) = 0$$

$$\text{b: } b_1 = 0,3 a_{11} = -3 \cdot 10^{-6} X_1(0) = 1,5 \cdot 10^5 X_2(0) = 0$$



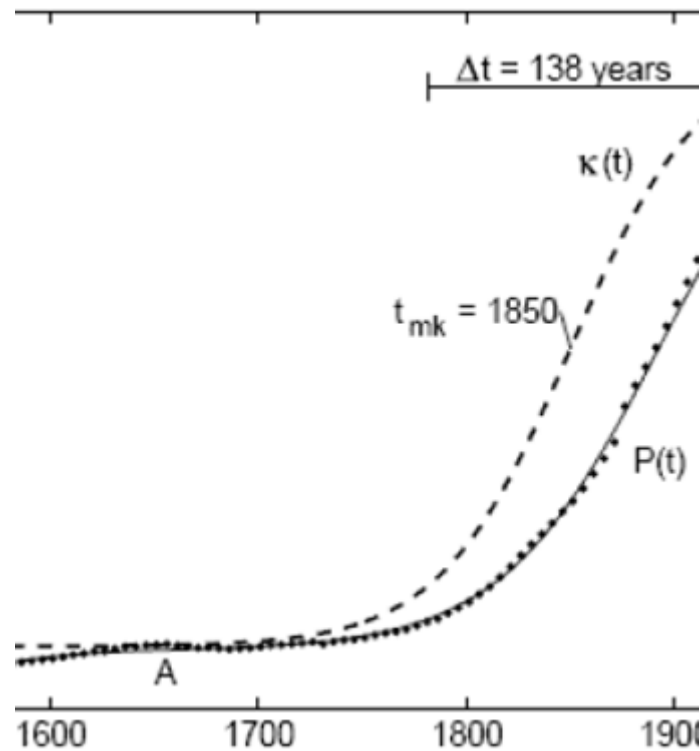
A (4.5) egyenlet a logisztikus növekedés jellegzetes, a 4.3/a. ábra szigmoid görbét eredményezi, ha $b_1 + a_{11} X_1(0) > 0$ teljesül. Kezdeti szakaszában lassú növekedés jellemzi, ami később felgyorsul, de ahogyan $X_1(t)$ értéke egyre jobban megközelíti

$$-\frac{b_1}{a_{11}}$$

értékét, a növekedés ismét egyre lassúbbá válik.

Ezzel a modellel jobban közelíthetők a valódi rendszerek változásai, függetlenül azok jellegétől. A tapasztalatok alapján alkalmas számos természeti, társadalmi vagy akár gazdasági változás leírására is. Ezt alátámaszthatjuk valós statisztikai illetve kísérleti adatokkal is.

4.4. ábra. Anglia népességének változása 1500-tól 2000-ig.



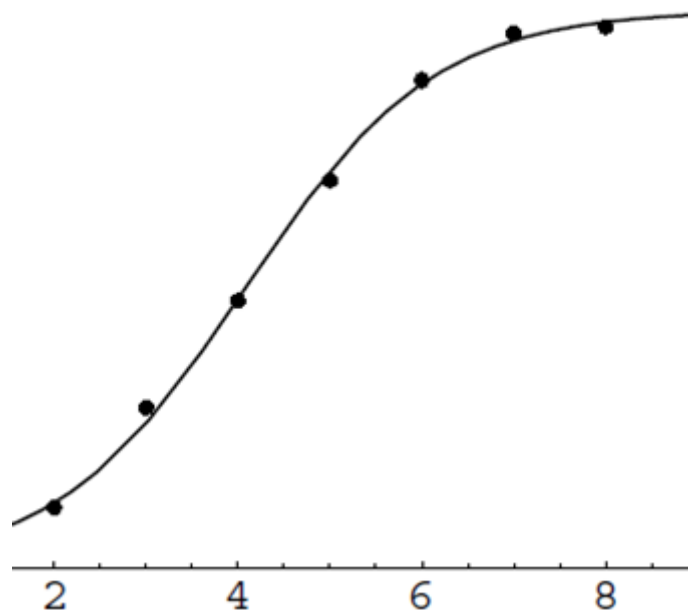
Forrás: Meyer P.S., Ausubel J.H., *Carrying Capacity: A Model with Logistically Varying Limits*, Technological Forecasting and Social Change, (1999)

A 4.4. ábra tanúsága szerint az 1990-es évek második felére jól láthatóvá vált a népesség növekedési ütemének lassulása, ami a (4.4) modell szerint az ország korlátozott lehetőségeivel is magyarázható volna.

Továbbá az ábrán az is megfigyelhető, hogy a XVII–XVIII. század fordulóján szintén előfordult egy enyhébb növekedést követő telítési szakasz. Ekkor feltehetően a népesség szintén elérhette a környezet eltartóképességét. Ezt követően valószínűleg az ipari forradalom (1769–1850) biztosította lehetőségeknek is köszönhetően ismét megindulhatott a népesség növekedése.

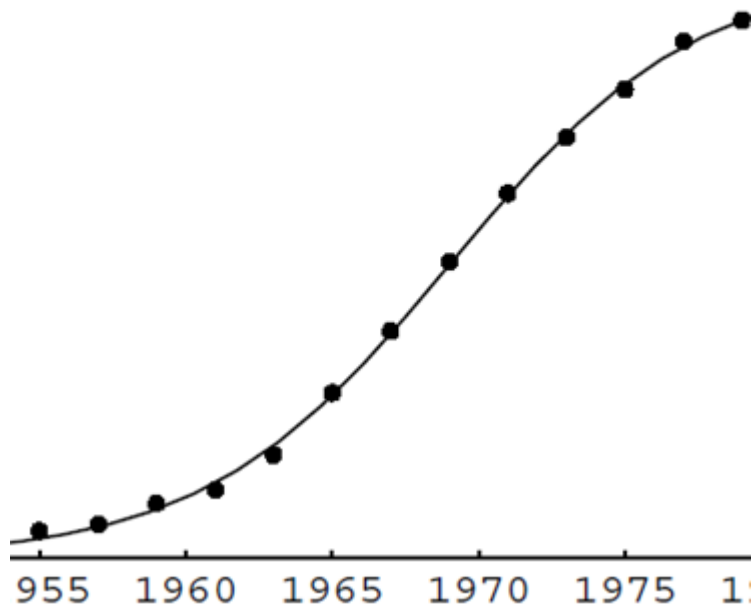
A különféle növények mérete fajra jellemző tulajdonság. Az ettől való lényeges eltérés általában ritkán fordul elő. A 4.5. ábra a bab példáján mutatja be, milyen növekedési folyamat eredményeként éri el egy növény a végleges méretét.

4.5. ábra. Babszár hosszának változása 8 napon át. A mért értékek és az azokhoz illesztett logisztikus görbe. ($N_0 = 1,53008$ $r = 0,977361$ $K = 83,4772$)



A kereskedelemben a piac telítődése felel meg a populációs modellekben előforduló eltartó képesség fogalmának. Ezt szemlélteti a 4.6. ábra.

4.6. ábra. Autók száma Olaszországban. Statisztikai adatok és az azokhoz illeszkedő logisztikus görbe. ($N_0 = 0,194123 \cdot 10^6$ $r = 0,239318$ $K = 18,516 \cdot 10^6$)



3. Populációk közötti interakció

A legtöbb rendszer esetében, például egy ökoszisztémában, nem hanyagolhatjuk el az ott élő fajok kölcsönös kapcsolatát, ha törekszünk a változások pontosabb leírására. Nagyban meghatározza az exponenciális és a logisztikus növekedési modell alkalmazhatóságát ez a körülmény. A Verhulst modellje ugyan számol a vizsgált

populáció egyedei közötti versengéssel, de alkalmatlan az interspecifikus kölcsönhatások figyelembevételére. Tehát az egy faj populációnövekedését leíró modellekben más fajok egyedeit csupán a külvilág részeként, a többi befolyásoló tényezőtől megkülönböztethetetlenül vehetjük csak figyelembe.

Legyenek n különböző faj P_1, P_2, \dots, P_n populációinak $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ egyedszámai³ a t időpillanatban. Az általános formában megadott

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= f_1(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)) \\ \dot{N}_2(t) &= f_2(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{N}_n(t) &= f_n(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))\end{aligned}\tag{4.6}$$

egyenletrendszer kifejezi az egyes populációk változását, amelyre a többi faj is hatással van.

A Lotka–Volterra-egyenletek⁴ jelentik a nem lineáris differenciál-egyenletek egyik történeti szempontból is érdekes alkalmazását.

Vito Volterra korának ismert római professzora volt. Ökológiai jelenségek matematikai leírásával veje, a biológus Umberto D'Ancona megfigyelései kapcsán kezdett foglalkozni. A fiatal biológus az Adriai-tenger halászati adatainak elemzése során arra a megállapításra jutott, hogy az I. világháború idején, amikor a hadi események és körülmények erősen korlátozták a halászatot, a korábbiakhoz képest jelentősen megváltozott a lehalászott halfajok aránya. Bizonyos ragadozó halak gyakrabban kerültek a halászok hálóiba, ugyanakkor a táplálékukat képező fajok aránya lecsökkent. Felfigyelt arra is, hogy a kifogott ragadozó és a zsákmány halak száma és aránya ciklikusan változik. Ebből a halpopulációk nagyságának periódikus változására következtetett. Volterra a megfigyelt változások leírására az

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= \beta_1 N_1(t) - \alpha_1 N_1(t) N_2(t) \\ \dot{N}_2(t) &= -\beta_2 N_2(t) + \alpha_2 N_1(t) N_2(t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

egyenletrendszerhez hasonló kétváltozós közönséges differenciálegyenlet-rendszert javasolt, ahol $N_1(t)$ a zsákmány, $N_2(t)$ pedig a ragadozó populáció nagysága a t időpontban, α_i és β_i ($i = 1, 2$) pedig a rendszerre jellemző pozitív valós konstansok.

A (4.7) egyenlet alapján a zsákmány populáció nagyságának változását ($\dot{N}_1(t)$) két dolog határozza meg. A populáció szaporulata csak a populáció pillanatnyi nagyságától függ míg az populáció egyedeinek pusztulása a populáció nagyságán túl függ még a ragadozók számától is. Hasonló összefüggés figyelhető meg a ragadozó populáció változásának ($\dot{N}_2(t)$) vonatkozásában is.

Ha tehát tekintünk egy olyan rendszert, amelyben P_2 populáció egyedeinek kizárólagos táplálékát a P_1 populáció egyedei jelentik, nyilvánvaló, hogy a két faj egyedszámának változása azon túl, hogy függ az egyes populációk nagyságától, nem lehet független egymástól sem. Eredményeit 1926-ban publikálta olasz nyelven. Szinte ezzel egyidőben, Voltterrától függetlenül az amerikai Alfred J. Lotka az *Elements of Physical Biology*

³Természetesen az egyedszámot nem tekinthetjük folytonos mennyiségnek, de ha az egyedszám elegendően nagy, nem követünk el túlságosan nagy hibát, ha az adott populáció által képviselt biomassa nagyságát az egyedszámmal jellemezzük.

⁴Bár eredetileg két populáció (zsákmány-ragadozó) kölcsönhatásait, és a kölcsönhatásoknak a populációk méretére gyakorolt hatását modellezték vele, később sikeresen alkalmazták más területeken is, például az oszcilláló kémiai reakciók esetében egy lehetséges modellként tartják számon. Bár konkrét autokatalitikus reakciót még nem ismerünk, melynek mechanizmusát le tudnánk írni vele, ugyanakkor alapjául szolgált más modellek létrehozásához. Ez a tény arra enged következtetni, hogy talán a populáció fogalmát értelmezhetjük a szokásostól általánosabban is. Ennek megfelelően a későbbiekben populáció alatt nem feltétlen valamely biológiai sokaságot fogunk érteni.

című könyvében hasonló eredményekről számolt be. Bár egyikük egy a gyakorlatban fölmerülő probléma révén jutott el az általánosabb elméleti kérdések matematikai megfogalmazásáig, másikuk alapvetően azzal a szándékkal fordult ökológiai problémák felé, hogy matematikai modellt találjon bizonyos jelenségek leírásához, eredményeik túl mutattak az ökológia tudományán, hiszen a későbbiekben más tudományterületekhez köthető problémákkal kapcsolatban is sikeresen alkalmazták azokat.

A (4.7) egyenletekben a két faj kölcsönhatásának az adott i -edik populációra gyakorolt hatását az $\alpha_i N_1(t)N_2(t)$ szorzatokkal vehetjük figyelembe. A hatás nagysága a szorzótényezők abszolútértékétől függ, és aszerint *kedvező*, *kedvezőtlen* illetve *közömbös*, hogy

$$\alpha_i > 0, \quad \alpha_i < 0 \quad \text{illetve} \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1,2).$$

A szorzat előjelét tehát α_i előjele határozza meg, ugyanis a probléma szempontjából $N_i(t) \leq 0$ értékek⁵ értelmetlenek volnának. Ha most a (4.1) modellben az $X_i(t)$ -knek tulajdonítjuk azt a jelentést, mint (4.7)-ben az $N_i(t)$ -knek, akkor az α_1 -nek a_{12} , α_2 -nek pedig a_{21} felel meg.

A fenti megállapítás alapján kézenfekvő az a gondolat, hogyha az a_{ij} együtthatókat ($i \neq j$) előjelüket tekintve az összes lehetséges módon megválasztjuk, akkor ezzel a Lotka–Volterra-modell olyan általánosítását kapjuk, amellyel (a modell adta korlátok mellett) a két populáció között működő kölcsönhatás minden lehetséges típusát le tudjuk írni. Az ilyen módon leírható eseteket a 4.1. táblázat foglalja össze.

4.1. táblázat. Két faj lehetséges kölcsönhatása a_{12} , a_{21} együtthatók értékeivel kifejezve.

a_{21}	Interrakció típusa
+	szimbiózis
−	zsákmányszerzés *
0	asztalközösség
−	fajok közötti versengés
0	amenzalizmus, antibiózis
0	neutrális kölcsönhatás

* Elméletalkotások céljából az ökológusok a zsákmányszerzés fogalmát a lehető legáltalánosabban adták meg: élő szervezetek elfogyasztása függetlenül attól, hogy milyen szervezetről van szó. Tehát ebbe a fogalomkörbe tartozik a növényevés, a húsevés, a parazitizmus és a parazita életmód is.

Amint láttuk, a (4.4) logisztikus modell lényegében kifejezi az adott populáció egyedei közötti versengést is. Természetesen hasonló tényezővel abban az esetben is számolni kell, ha két különböző populáció egyedei azonos erőforrásokért küzdenek. Ez jelenthet egy másik lehetőséget a két különböző populáció egyedeinek interakciójára. Ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy a fajok kölcsönhatása mindkét fél számára kedvező, vagy kedvezőtlen, esetleg az egyik számára közömbös. A 4.1. táblázat tanúsága szerint az említett lehetséges kölcsönhatásoknak ökológiai rendszerekben léteznek valódi megfelelői.

⁵A populáció mérete nem írható le negatív számmal, ugyanakkor $N_i(t) = 0$ pedig a kölcsönhatás szempontjából volna értelmetlen.

Mivel nem lehet cél ezek részletes tárgyalása, a lehetséges kölcsönhatások sorából csak kettőt kiemelve mutatjuk be, hogy a (4.1) rendszer alkalmas az adott interakció modellezésére.

3.1. Zsákmány-ragadozó modell

A modell részletesebb vizsgálatát történeti jelentőségén túl ismertsége is indokolja. Ugyanakkor elengethetetlenül szükséges olyan fontos ökológiai fogalmak szemléltetéséhez, mint például a tápláléklánc.

Megfelelő kezdeti feltétel ($X_1(0) \gg 1, X_2(0) \gg 1$) és a paraméterek alkalmas

$$\begin{aligned} b_1 > 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0, \\ b_2 < 0, \quad a_{21} > 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0 \end{aligned}$$

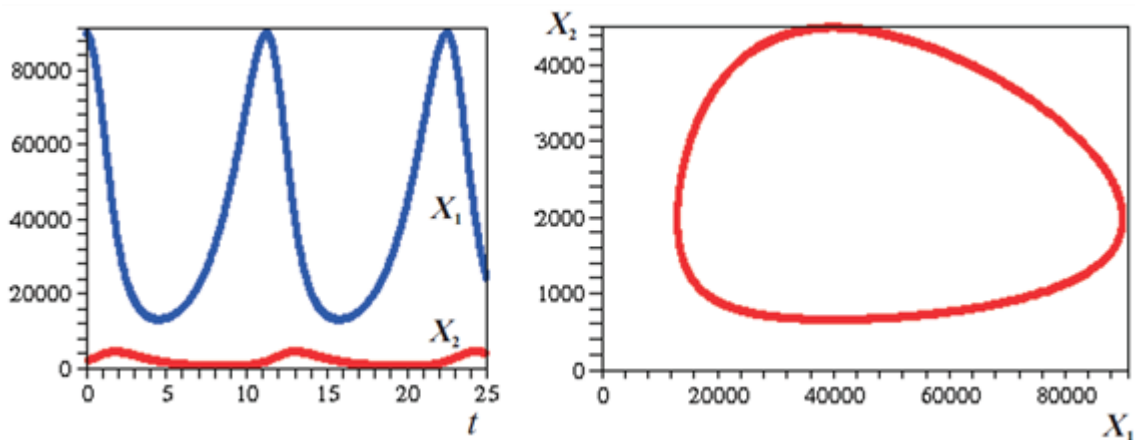
megválasztása esetén a (4.1) egyenletek a Volterra által javasolt

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= (b_1 + a_{12}X_2(t))X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= (b_2 + a_{21}X_1(t))X_2(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

alakra hozhatók.

4.7. ábra. Zsákmány-ragadozó modell. (A két populáció mérete az idő függvényében és a rendszer trajektóriája.)

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 90000 & b_1 &= +0,6 & a_{12} &= -0,3 \cdot 10^{-4} \\ X_2(0) &= 2000 & b_2 &= -0,6 & a_{21} &= +1,5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$



A 4.7. ábra a (4.8) egyenletek egy konkrét paraméterezésével készült. A rendszer trajektóriája egy egyensúlyi állapot körül rajzolható meg.

A tapasztalat alapján nem hagyható figyelmen kívül a populációk önszabályozása sem, amely annál jobban érvényesül, minél nagyobb a populáció mérete, és annak további növekedése ellen hat.

Válasszuk meg most (4.1) egyenletek paramétereit úgy, hogy eleget tegyenek az alábbi feltételeknek:

$$\begin{aligned} b_1 > 0, \quad a_{11} \leq 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0, \\ b_2 < 0, \quad a_{21} > 0, \quad a_{22} \leq 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0 \end{aligned}$$

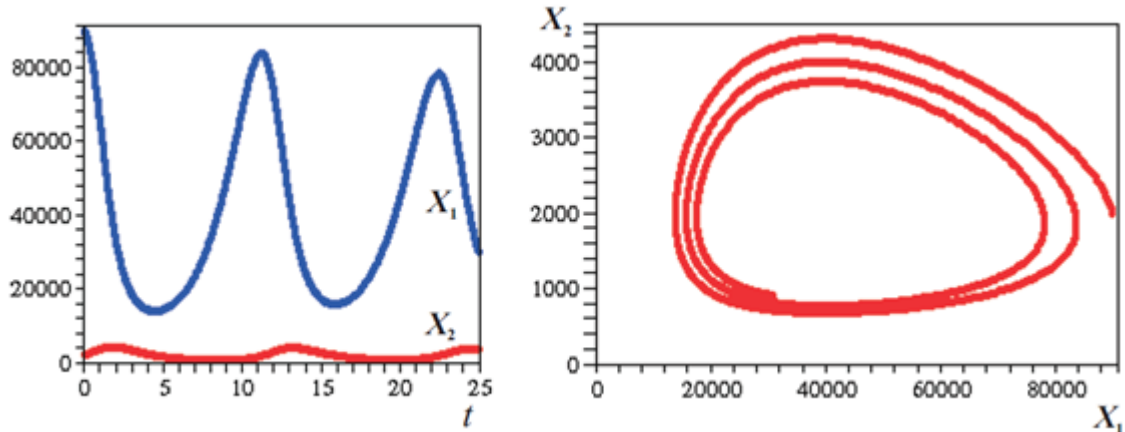
Az így nyert

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= (b_1 + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t))X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= (b_2 + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t))X_2(t)\end{aligned}\tag{4.9}$$

egyenletek a_{ii} ($i = 1,2$) paramétereik révén alkalmasak az egyes populációkon belüli versengés leírására is. Ahogyan ez a 4.8. ábrán is látható ennek a rendszer szempontjából stabilizáló szerepe van.

4.8. ábra. Zsákmány-ragadozó modell interspecifikus versengés figyelembe vételével.

$$\begin{aligned}X_1(0) &= 90000 & b_1 &= +0,6 & a_{11} &= -0,5 \cdot 10^{-7} & a_{12} &= -0,3 \cdot 10^{-4} \\ X_2(0) &= 2000 & b_2 &= -0,6 & a_{21} &= +1,5 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$



3.2. Két faj versengése

A versengés fogalma, azaz a közös, létfontosságú erőforrások megszerzésére irányuló tevékenység fogalma már a (4.9) modell kapcsán is fölvetődött. Az ott leírt fajon belüli versengés azonban „mellékes” szerepet játszott a két populáció zsákmány-ragadozó kölcsönhatáshoz képest. A

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= r_1 N_1(t) \frac{K_1 - N_1(t) - \kappa_2 N_2(t)}{K_1} \\ \dot{N}_2(t) &= r_2 N_2(t) \frac{K_2 - N_2(t) - \kappa_1 N_1(t)}{K_2}\end{aligned}\tag{4.10}$$

egyenletekkel leírható modell azonban két különböző faj egyedei által alkotott populációk hasonló kölcsönhatásának leírására alkalmas, ahol

K_i :	a környezet eltartóképessége az i -edik fajra vonatkozóan,
r_i :	az i -edik faj növekedési rátája,
κ_i :	kompetíciós koefficiens azt fejezi ki, hogy az i -edik faj, milyen mértékben csökkenti a másik faj lehetőségeit ($i = 1, 2$)

A (4.10) egyenletek gyakorlati jelentőségét növeli az a sok-sok szomorú tapasztalat, hogy adott ökoszisztémába betelepített, behurcolt fajok sokszor olyan durva beavatkozást jelenthetnek, hogy az őshonos fajok teljes

eltűnését is eredményezhetik. Hasonló esetekben, a várható következmények megítélése szempontjából fontos a rendszer lehetséges egyensúlyi állapotainak vizsgálata.

A rendszer akkor van egyensúlyban, ha N_1 és N_2 állandó, azaz

$$\dot{N}_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2).$$

(4.10) alapján látható, hogy attól a triviális esettől eltekintve, hogy

$$r_i N_i(t) = 0,$$

ez csak akkor teljesülhet, ha

$$K_1 - N_1(t) - \kappa_2 N_2(t) = 0$$

és

$$K_2 - N_2(t) - \kappa_1 N_1(t) = 0.$$

A fázistérben ezek az egyenletek két egyenest határoznak meg. Ezek kölcsönös helyzete és a kezdeti feltétel ezekhez képest történő megválasztása alapján megadható a várható egyensúlyi állapot jellege.

Válasszuk most (4.1) egyenletek paramétereit úgy, hogy eleget tegyenek az alábbi feltételeknek

$$b_1 > 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0, \\ b_2 > 0, \quad a_{21} < 0, \quad a_{22} < 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0$$

és abban a

$$b_1 = r_1, \quad a_{11} = -\frac{r_1}{K_1}, \quad a_{12} = -\frac{r_1 \kappa_2}{K_1},$$

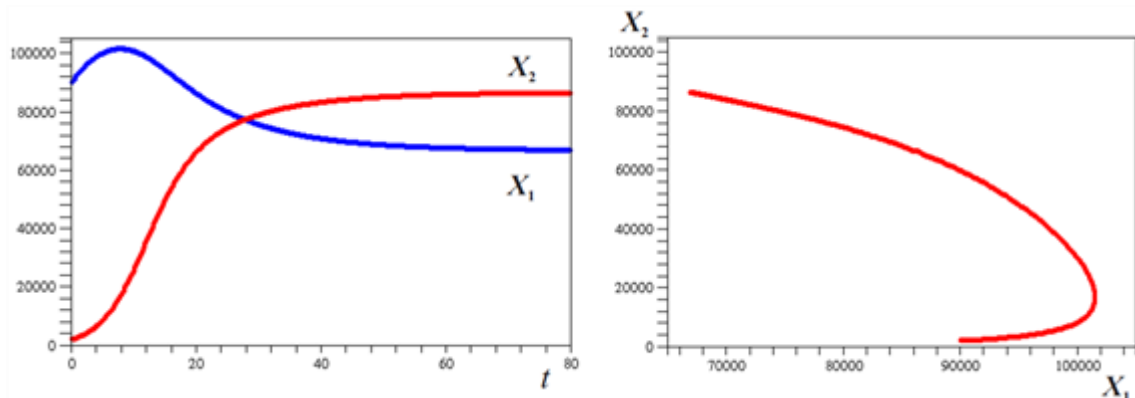
$$b_2 = r_2, \quad a_{21} = -\frac{r_2 \kappa_1}{K_2}, \quad a_{22} = -\frac{r_2}{K_2}$$

helyettesítéseket alkalmazva, a (4.1) egyenletekből a (4.10) egyenleteket kapjuk.

A 4.9. ábra egy olyan kivételes esetet szemléltet, amelyben a jóval kisebb kezdeti nagysággal rendelkező P_2 populáció egyedeinek jobban kedveztek a feltételek, de ennek ellenére olyan egyensúly alakulhatott ki, amely nem eredményezte egyik populáció eltűnését sem.

4.9. ábra. Két faj versengése. (A két populáció mérete az idő függvényében és a rendszer trajektóriája.)

$$X_1(0) = 90000; \quad b_1 = 0,2; \quad a_{11} = -1,82 \cdot 10^{-6}; \quad a_{12} = -9,09 \cdot 10^{-7} \\ X_2(0) = 2000; \quad b_2 = 0,6; \quad a_{21} = -3,00 \cdot 10^{-6}; \quad a_{22} = -4,62 \cdot 10^{-6}$$



A Lotka–Volterra-modell általánosításának másik lehetősége lehetne, hogy tegyük alkalmassá kettőnél több faj kölcsönhatásának leírására. Mivel a rendszer állapotváltozóit az egyes populációk mérete jelenti, ezért az

egyenletrendszer újabb egyenletekkel való bővítése szükséges, amelyek alkalmasak egy-egy populáció egyedszámváltozásainak leírására. Ugyanakkor az egyes egyenleteket alkalmassá kell tenni bármely két faj egyedei közötti kölcsönhatás leírására is. Az ilyen egyenletrendszerek (4.6)-hoz hasonló alakban írhatók le. Három faj kölcsönhatásait figyelembe véve erre ad példát a *R.M. May* és *W.J. Leonard* által vizsgált

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (1 - x_1(t) - \alpha_1 x_2(t) - \beta_1 x_3(t))x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (1 - \beta_2 x_1(t) - x_2(t) - \alpha_2 x_3(t))x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= (1 - \alpha_3 x_1(t) - \beta_3 x_2(t) - x_3(t))x_3(t)\end{aligned}\quad (4.11)$$

háromdimenziós ragadozó-zsákmány rendszer, ahol α_i és β_i ($i = 1 \dots 3$) a rendszerre jellemző valós konstansok. A modell leírja a három populáció méretével jellemezhető rendszer változását. A korábbiak általánosítását⁶ jelenti a

$$\dot{X}_i(t) = r_i \cdot X_i(t) \left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j(t) \right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.12)$$

alakú egyenletrendszer. Segítségével leírhatjuk az n faj populációból álló rendszereket, ahol r_i az i -edik faj növekedési rátáját jelenti, α_{ij} pedig kifejezi, hogy j -edik faj milyen hatással van az i -edik növekedésére.

Ez azt jelenti, hogy szemléltethetjük a rendszert egy olyan n csomópontból álló gráffal, amelyben a csomópontok az egyes populációknak felelnek meg, míg az élek a populációk közötti viszonyt jelenítik meg. A (4.12) egyenlet α_{ij} együtthatóit egy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixba rendezhetjük. Ha tehát

$$\alpha_{ij} = 0,$$

az azt fejezi ki, hogy i -edik fajjal a j -edik nincs semmiféle interakcióban.

4. Harci modellek

A differenciálegyenletek alkalmazásának lehetősége fölmerült a háborúban szemben álló felek analízise során is (jelölje $X_1(t)$ és $X_2(t)$ a két haderő (I és II) harcosainak a számát a t időpillanatban). Ezen a területen való alkalmazás *Frederick W. Lanchester* nevéhez fűződik, aki az első világháború idején harci modellt alkalmazott a háborús események kimenetelének előre jelzésében.

⁶Könnyen belátható, hogy (4.12)

$n = 1$ esetén a logisztikus növekedési modellt,

$n = 2$ esetén a Lotka–Volterra-modellt, míg

$n = 3$ esetén a May–Leonard-modellt eredményezi.

A modellben $\dot{X}_1(t)$ és $\dot{X}_2(t)$ jelöli a felek haderejének változását. A probléma szempontjából meg kell különböztetnünk az ellenség által közvetlenül okozott úgynevezett harci veszteséget, és a betegségek, balesetek (harci cselekményekhez nem köthető események) miatt bekövetkező működési veszteségeket. Bár a valóságban utánpótlás és csapatkivonás is történhet, amit a (4.1) modellben b_i -k értékével vehetünk figyelembe (b_i : utánpótlás; c_j : csapatkivonás), a későbbiek folyamán a modellnek ezt a lehetőségét nem fogjuk kihasználni. A továbbiakban a szemben álló felek stratégiáitól függő három modellt vizsgálunk meg.

A (4.1) egyenletben a b_i paraméterek megválasztásával az i -edik haderő működési veszteségét, míg az a_{ij} ($i \neq j$) és a c_j értékekkel a harci veszteség mértékét befolyásolhatjuk. Kezdeti feltételként

$$X_1(0) > 0 \text{ és } X_2(0) > 0$$

értékek adhatók meg.

4.1. Hagyományos harc

Ez a modell akkor alkalmazható, ha a szemben álló felek hagyományos módon küzdenek egymás ellen, azaz a két haderő harcosai láthatók egymás számára.

A (4.1) egyenletrendszer esetében a

$$\begin{aligned} b_1 < 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad c_1 < 0, \quad e_1 = 0, \\ b_2 < 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 < 0, \quad e_2 = 0 \end{aligned}$$

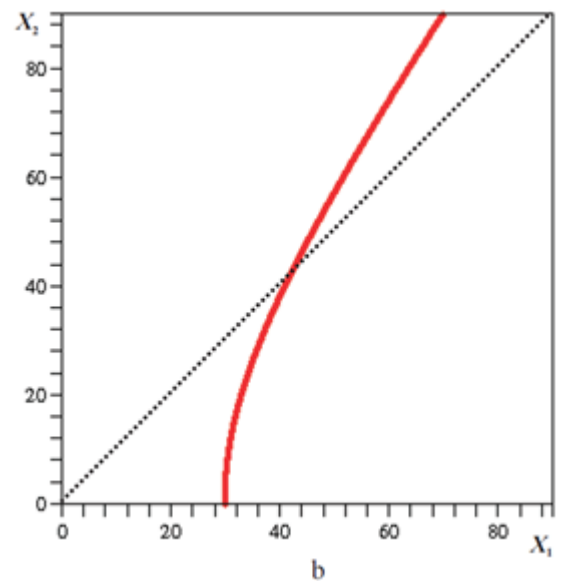
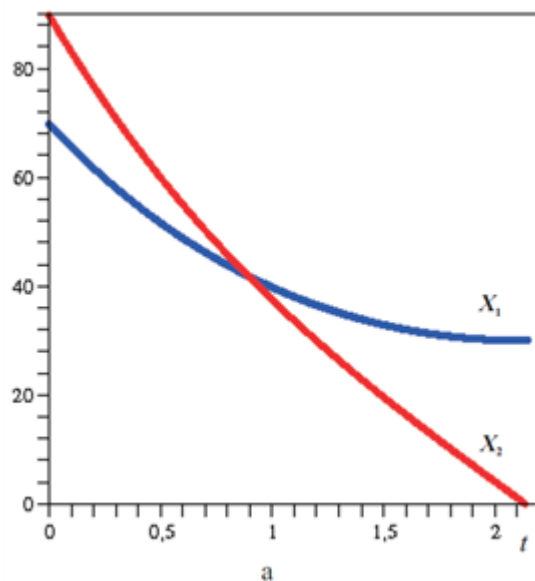
paramétereket alkalmazva az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= b_1 X_1(t) + c_1 X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

rendszer áll elő, amely kifejezi, hogy az adott tábor vesztesége csak az ellenfél kiképzettségétől és létszámától függ. A 4.10. ábra megfelelő kezdeti feltételek és paraméterek megadása után készült a (4.13) egyenlet alapján.

4.10. ábra. Hagyományos harc.

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 70 & b_1 &= -0,01 & c_1 &= -0,5 \\ X_2(0) &= 90 & b_2 &= -0,007 & c_2 &= -1 \end{aligned}$$



4.2. Gerilla-harc

Ebben az esetben mindkét haderő harcosai igyekeznek rejtve maradni az ellenfél harcosai számára. Az ilyen harc alakulásának egy lehetséges leírására az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= b_1 X_1(t) + a_{12} X_1(t) X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + a_{21} X_2(t) X_1(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

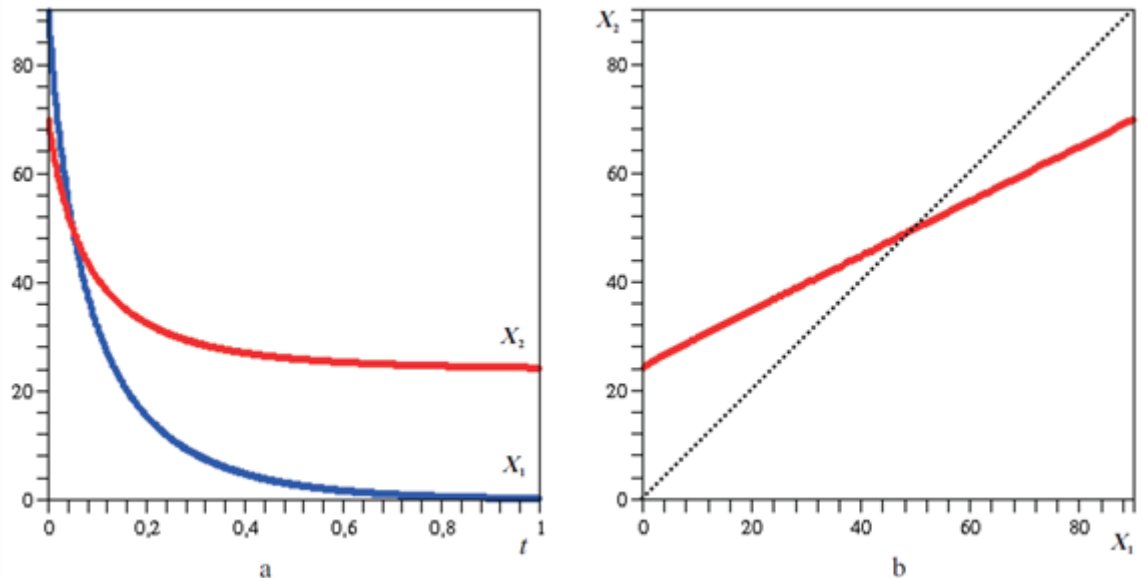
rendszer alkalmas, amely a (4.1) egyenletekből az alábbi paraméterezéssel nyerhető:

$$\begin{aligned} b_1 < 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0, \\ b_2 < 0, \quad a_{21} < 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0 \end{aligned}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a (4.14) egyenletrendszer formailag megegyezik a Volterra által javasolt (4.7) és a (4.1)-ből származtatott (4.8) egyenletekkel, csupán a paraméterekben van eltérés. A 4.11. ábrán a (4.14) egyenletek egy alkalmazása látható az ott megadott paraméterekkel.

4.11. ábra. Gerilla-harc.

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 90 & b_1 &= -0,01 & a_{12} &= -0,2 \\ X_2(0) &= 70 & b_2 &= -0,003 & a_{21} &= -0,1 \end{aligned}$$



4.3. Vegyes (gerilla-hagyományos) harc

Tegyük fel, hogy az I-es csapatok gerilla harcot folytatnak. Ez azt jelenti, számukra II-es harcosok jó célpontot nyújtanak, például mert I-es leszből támad vagy mert csapataik elsáncolták magukat. Ugyanakkor a II-es csapatok hagyományos harcot kénytelenek folytatni. Az ilyen küzdelem modellezését az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= b_1 X_1(t) + a_{12} X_1(t) X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

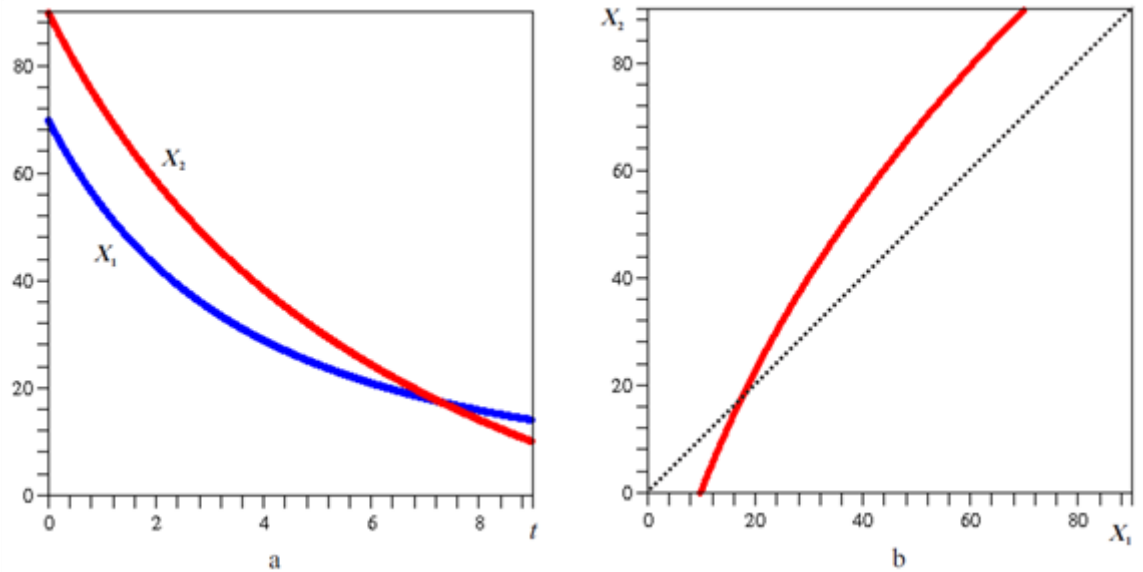
rendszer

$$\begin{aligned} b_1 < 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0, \\ b_2 < 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 < 0, \quad e_2 = 0 \end{aligned}$$

paraméterek megadása mellett teszi lehetővé.

4.12. ábra. Vegyes harc.

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 70 & b_1 &= -0,1 & a_{12} &= -0,002 \\ X_2(0) &= 90 & b_2 &= -0,02 & c_2 &= -0,26 \end{aligned}$$



A 4.12. ábrán jól látható, hogy a megadott feltételek és paraméterek mellett a gerilla csapatok győztek. Történt ez olyan extrém paraméterezés ellenére, amellyel egyáltalán nem kedveltünk az I-es haderőnek. A működési veszteségeket leíró paraméterek

$$\frac{b_1}{b_2} = 5$$

hányadosa igen nagy. Ez azt fejezi ki, hogy a gerillák között ötszörte gyakrabban válnak harcképtelenné az emberek például betegség következtében, mint az ellenség táborában. Mindemellett a küzdelem kezdetekor a hagyományos haderő létszámbeli fölényrel rendelkezik.

A győzelem ennél is látványosabb lett volna, ha a harci veszteségeket jellemző paraméterek értékét realisan választottuk volna meg. Azonos tüzerőt és találati pontosságot feltételezve a

$$\frac{c_2}{a_{12}}$$

hányados értéke jóval meghaladhatná a 10^2 nagyságrendet is.

Úgy tűnik, hogy ez a stratégia a hagyományos harcot folytató haderő szempontjából igen nagy veszteségekkel, ugyanakkor kevés eredménnyel jár. Ilyen háborút folytatott az USA Vietnámban, amit el is veszített 1968-ban⁷.

5. Rezgőmozgás

A mechanikai rezgés jelensége és annak különböző fajtái igen korán ismertté váltak az alkotó ember számára. Mielőtt megismerte volna a jelenség lényegét, nem beszélve annak matematikai modelljéről, különféle módokon húzott hasznát tudása alkalmazásával. Például hangszereket őseink már jóval az előtt készítették, hogy a különféle jelenségeket tudományos igényvel kezdték volna vizsgálni. Ugyanakkor nem egyszer szenvedtünk hátrányt a jelenségek felületes ismerete miatt.

Például 1831-ben az öntöttvasból készült Broughton-híd pusztulását hatvan menetelő katona okozta. Egy másik, gyakran említett példa a Washington állambeli Takoma híd katasztrófája, amelyet a híd fizikai paramétereinek és a vidékre jellemző erős széllelkések szerencsétlen együttese okozott⁸.

⁷Ebben a háborúban a gerillák létszáma $2,8 \cdot 10^5$, míg a szemben álló amerikai és szövetséges haderők létszáma $1,68 \cdot 10^6$ volt. Ez hatszoros túlerőt jelentett, mégsem volt elegendő a győzelemhez.

⁸Bár a fent említett esetek a külső erő hatására bekövetkező kényszerrezgés jelenségével magyarázhatók, és ennek szimulációja a (4.1) modell segítségével nem lehetséges, általában a rezgés jelenségének fontossága miatt szükséges említést tenni ezekről.

Az egyik végén függőlegesen felfüggesztett rugó, és a rugó másik végén rögzített m tömegű test alkotják talán a legegyszerűbb rendszert, amely alkalmas a mechanikai rezgések megfigyelésére. Tekintsük a testet pontszerűnek. A rendszer nyugalmi helyzetében a tömegpontra ható súlyerő és a rugó megnyúlásából származó visszatérítő erő van egyensúlyban.

Nyugalmi helyzetéből (függőleges irányban) kimozdítva a testet, majd magára hagyva, a tömegpont mozgása a

$$\ddot{X}(t) = -\frac{c}{m}\dot{X}(t) - \omega_0^2 X(t) \quad (4.16)$$

másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenlettel írható le, amelyben $X(t)$ egy m tömegpont egyensúlyi helyzetétől való pillanatnyi eltérését jelenti. Továbbá a (4.16) egyenletben a $c \geq 0$ súrlódási együtthatóval jellemezhetjük a rendszer csillapítását, az $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pedig a rugó paramétereitől és a mozgó test tömegétől függő állandót, a szögsebességet jelenti.

A rendszer idealizációját jelenti a $c = 0$ választás. Ekkor azt feltételezzük, hogy a mozgó testre semmiféle külső erő nem hat, azaz eltekintünk a valós rendszerekben mindig fellépő súrlódásból származó csillapítástól. Bizonyos esetekben, a rendszer kellően rövid ideig történő leírására alkalmas ez a modell.

Az átviteli elvnek megfelelően a (4.16) egyenlet az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= -\frac{c}{m}X_2(t) - \omega_0^2 X_1(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

differenciálegyenlet-rendszerre alakítható. A (4.17) egyenletrendszerben $X_1(t)$ a tömegpont egyensúlyi helyzetétől való előjeles kitérését jelenti, amely függ az időtől, $X_2(t)$ pedig a sebességét jelenti (szintén előjelesen) a t időpillanatban. A (4.17) egyenletrendszerből továbbá az is nyilvánvaló, hogy a tömegpont pillanatnyi gyorsulása ($\dot{X}_2(t)$) a kitérésétől és a pillanatnyi sebességtől függ.

5.1. Harmonikus rezgőmozgás

A (4.1) egyenletrendszer paramétereit

$$\begin{aligned} b_1 &= 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 1, & e_1 &= 0, \\ b_2 &= 0, & a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & c_2 &= -\omega_0^2, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$

módon megválasztva a harmonikus rezgőmozgás leírására alkalmas

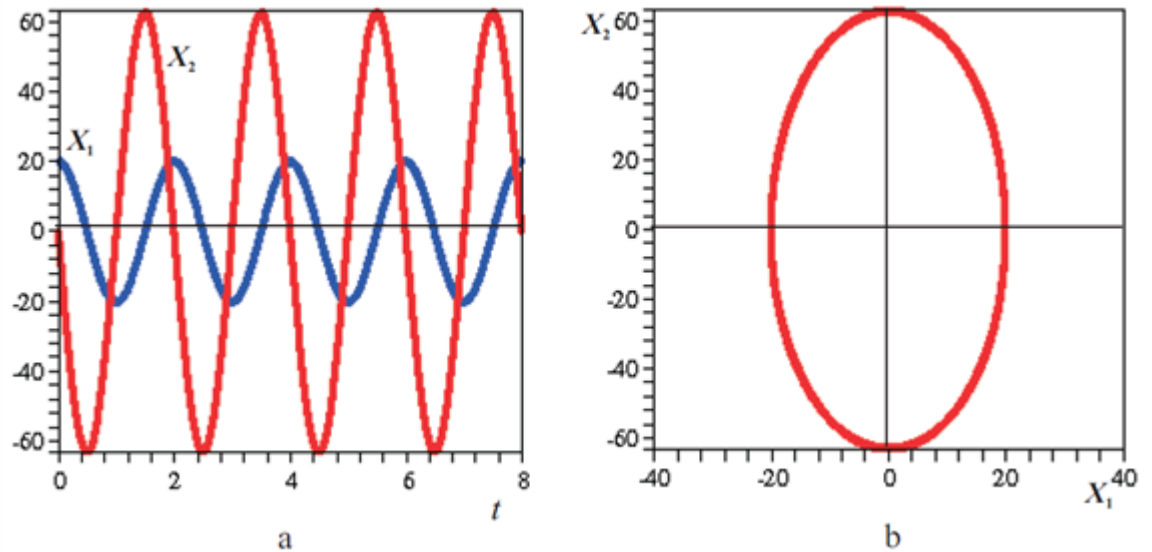
$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= c_1 X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= c_2 X_1(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

egyenletrendszert kapjuk.

A kezdeti feltétel megadásakor figyelembe kell venni, hogy az $X_1(0)$ és $X_2(0)$ egyszerre nem lehet 0, mivel az pontosan a rendszer nyugalmi állapotát jellemzi.

4.13. ábra. Harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont.

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 20 & c_1 &= 1 \\ X_2(0) &= 0 & c_2 &= -\pi^2 \end{aligned}$$



A fenti értelmezésnek megfelelően a 4.13. ábra azt mutatja be, ahogy a nyugalomban lévő tömegpontot nyugalmi helyzetéhez képest 20 egységgel kimozdítottuk és magára hagytuk. A mozgást úgy is elindíthattuk volna, hogy a pontot nyugalmi helyzetéből $X_2(0) \neq 0$ kezdősebességgel indítjuk.

5.2. Csillapított rezgés (szabad rezgés)

A gyakorlatban egy test mozgását a súrlódás vagy a közegellenállás következtében fellépő külső erő mindig gátolja. A

$$\begin{aligned} b_1 &= 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 1, & e_1 &= 0, \\ b_2 &= -\frac{c}{m}, & a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & c_2 &= -\omega_0^2, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$

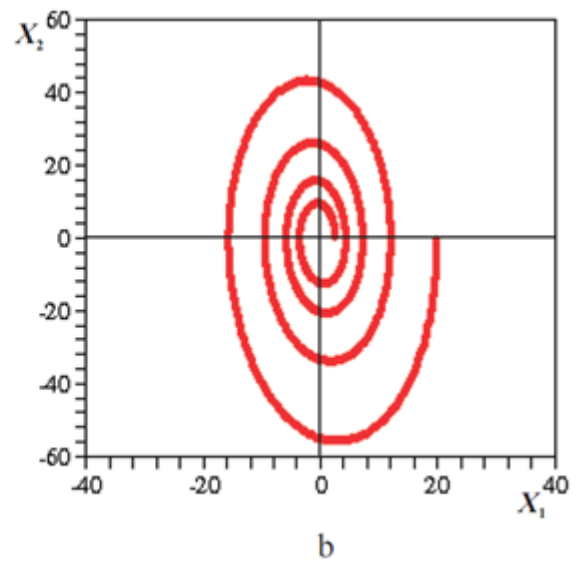
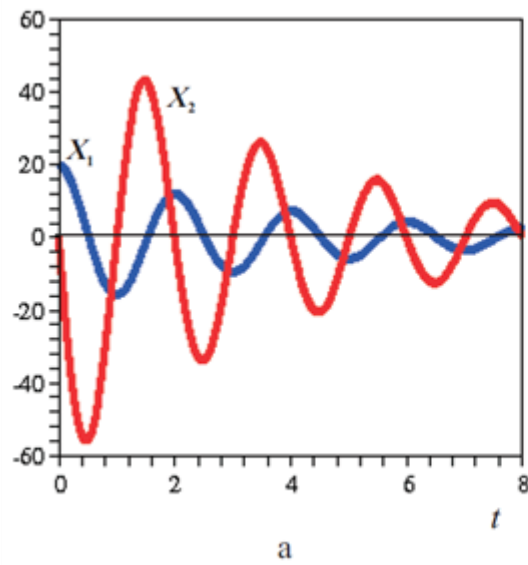
paraméterek választásával a (4.1) egyenletrendszert ennek leírására tettük alkalmassá az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= c_1 X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

formában.

4.14. ábra. Csillapított rezgés.

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 20 & b_2 &= -0,5 & c_1 &= 1 \\ X_2(0) &= 0 & & & c_2 &= -\pi^2 \end{aligned}$$



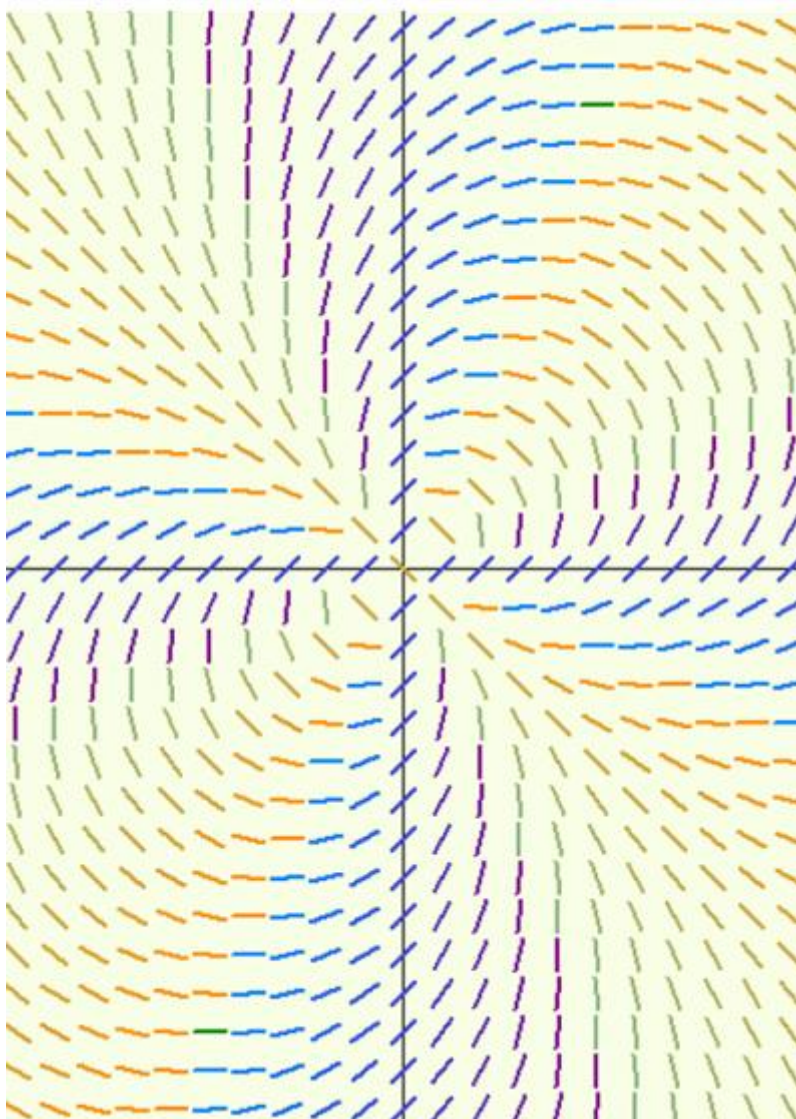
Az $X_1(0)$ és $X_2(0)$ kezdeti feltételek megadásakor a harmonikus rezgőmozgásnál megadott szempontokat itt is figyelembe kell venni.

5. fejezet - Néhány közelítő megoldás geometriai szemléltetése

1. Iránymező

Láthattuk, hogy az explicit differenciálegyenletek rendelkeznek azzal az érdekes és kivételes tulajdonsággal, hogy bár esetenként magáról a megoldásról igen keveset tudunk, de a sík minden pontjában ismerjük a megoldásgörbe érintőjének meredekségét. Kalmár László, volt szegedi professzor, ezt találóan úgy szemléltette, mintha a sík minden pontjában állna egy-egy közlekedési rendőr, akik jeleznék, hogy a ponton áthaladó görbe milyen irányban haladhat. És valóban, bevált gyakorlat a differenciálegyenletek tanulmányozása során, hogy megfelelő pontokban megrajzoljuk az érintők egy darabkáját, azzal a céllal, hogy a megoldások viselkedésére következtethessünk ezek alapján. Az 5.1. ábra az $y = x$ és a $y = -x$ egyenesekre tengelyesen, azok metszéspontjára pedig középpontosan szimmetrikus. Az ábrát összevetve a 3.2. ábrával, könnyen látható, hogy ábránk „egyes-darabkái” egymást és az $y = -x$ egyenest az origóban érintő körök érintői.

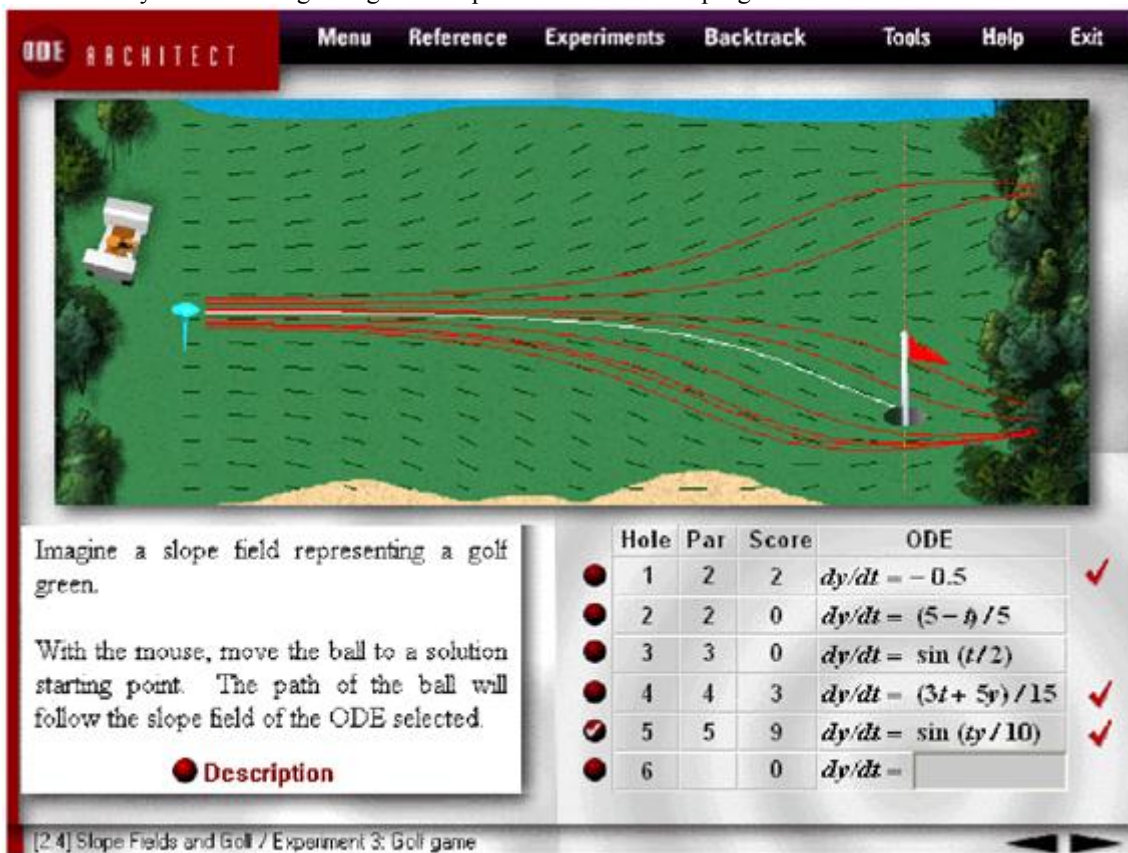
5.1. ábra. A $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{y^2 - x^2 + 2xy}$ differenciálegyenlet alapján rajzolható iránymező.



A témához kapcsolódó, magas színvonalú munkák közé tartozik [6]. A könyv értékét emelik a CD-mellékleten található, sokoldalúan használható segédletek is. Az 5.2. ábra jól példázza azt a játékosságot és szemléletességet,

ahogy a kiadvány megközelíti ezeket a problémákat. Az ábra szerint egy golfpályára fölrajzolt iránymező mentén kell a felhasználónak a pálya szélétől a labdát célba juttatnia, miközben az követi az iránymezőt¹.

5.2. ábra. Az iránymező és a megoldásgörbék kapcsolatát szemléltető program.

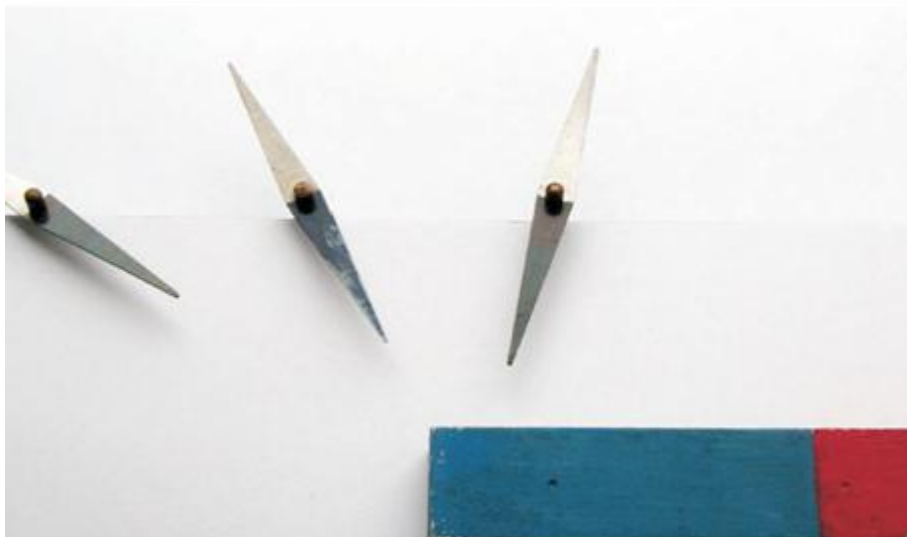


A programban a készítő előre megadtak öt differenciálegyenletet – és ezzel öt iránymezőt – és biztosították annak lehetőségét is, hogy hatodikként a felhasználó adjon meg egy tetszőleges „pályát”.

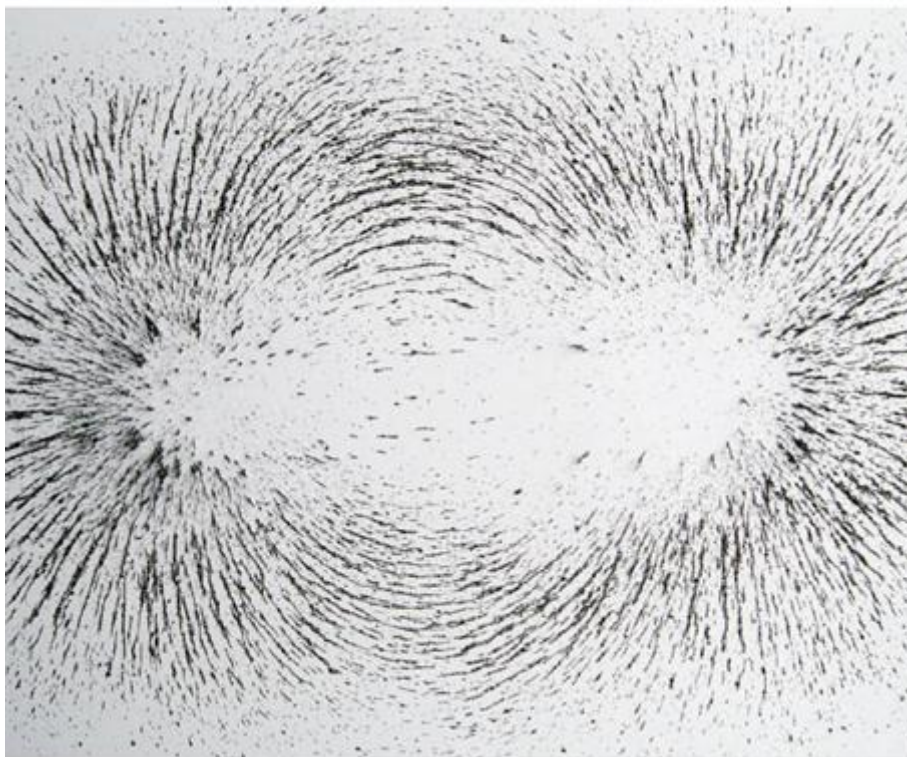
A hasonlatok annyira találóak, hogy bizonyos rendszerek esetében valóban van lehetőség ilyen „közlekedési rendőrök” elhelyezésére. Természetesen inkább csak az indikátor szerepét töltik be, hiszen nem ők mutatják meg, hogy merre „haladhatnak” a görbék, sokkal inkább csak jelzik azok érintőinek irányát az adott pontban.

5.3. ábra. A mágnesűk a rúd mágnes erőterében az erővonalak irányát mutatják.

¹Jegyezzük meg, hogy hasonló probléma a valóságban is előfordulhat, ha az adott területen a pálya pontjaihoz nem illeszthető vízszintes sík. Ugyanakkor nem elhanyagolható különbség, hogy míg a programban a labda helyét egy függőleges egyenes mentén megváltoztathatjuk, addig a valóságban csak a kezdősebességet (pontosabban annak irányát és nagyságát) adhatjuk meg.



5.4. ábra. A vasreszelék rajzolata sokkal részletesebben jeleníti meg a mágneses erővonalakat.



Gondoljunk csak a már általános iskolások által is ismert fizikai kísérletekre, amelyek bemutatásakor mágnesűket illetve vasreszeléket helyezünk egy rúd mágnes erőterébe. Az 5.3. ábrán látható iránytűk állásából és az 5.4. ábra vasszemcséinek elrendeződésével létrejövő rajzolatból következtethetünk a mágneses erővonalak irányára.

Az adott rendszer sajátosságaitól függően más és más lehetőséget találhatunk a rendszer jellemzőinek bemutatására. A természetet járva megfigyelhetjük, ahogyan egy patak medrében élő vízínövények szára, levelei legalábbis azt mutatják, hogy milyen kölcsönhatás van az áramló folyadék és a növény részei között. A szélsatornában végzett áramlási vizsgálatok esetében sokszor füsttel teszik láthatóvá az áramló levegő útját. (Mintha Kalmár professzor úr közlekedési rendőreit rávettük volna, hogy üljenek motorra és mutassák az utat.) Vajon megadható-e ennek a matematikai megfelelője?

2. Egylépéses módszerek

Fölhasználva a kezdetiérték-probléma geometriai jelentésében rejlő lehetőséget, szemléltethetjük néhány közelítő megoldás elvét. Bár a (3.8) egyenlet szolgál a későbbiek alapjául a (3.9) feltétel mellett, az eljárások általánosítása könnyen elvégezhető (3.11) vonatkozásában is.

Szükséges továbbá még azt is megjegyezni, hogy az alábbiakban csupán néhány úgynevezett diszkrét módszer² tárgyalására szorítkozunk, amelyek jellemző módon a megoldás közelítésére csak véges sok pontban adnak lehetőséget, tetszőleges pontossággal. Geometriai értelemben tehát a közelítő megoldások megadása ekvivalens egy P_0, P_1, \dots, P_n pontsorozat megadásával, ahol $P_i \in T$ ($0 \leq i \leq n$) és P_0 megfelel a kezdeti feltételnek. Ennek kapcsán adjunk meg továbbá egy $h \in \mathbb{R}$ pozitív lépésközt, mely kifejezi az egymást követő P_i és P_{i-1} pontok első koordinátáinak különbségét.

Egy diszkrét módszert k -lépéses módszernek nevezünk, ha a következő P_i közelítéshez fölhasználjuk az öt megelőző $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \dots, P_{i-1}$ közelítéseket is ($i \geq k$). A továbbiakban néhány egylépéses módszert ($k = 1$) említünk egy lehetséges szemléltetési módra koncentrálni.

2.1. Explicit Euler-módszer

Az Euler-módszer a kezdetiérték feladatok numerikus megoldására alkalmazható legegyszerűbb eljárás. Az alap gondolat az, hogy a feladat (3.8) egyenletéből kiszámítható $\dot{X}(t_0)$, ami a keresett $X(t)$ függvény deriváltjának értéke a t_0 helyen. Ez pontosan a keresett függvény görbéjének $P_0(t_0, X(t_0))$ pontjában rajzolható érintő a egyenes $f(t_0, x_0)$ meredeksége. Ezen az egyenesen „keressük meg” azt a P_1 pontot, aminek első koordinátája $t_0 + h$. A pontsorozat következő, P_2 elemének meghatározásában P_1 -nek ugyanaz a szerepe, mint korábban P_0 -nak volt P_1 esetében. Általánosítva az előzőeket tehát $P_{i-1}(t_{i-1}, x_{i-1})$ pont ismeretében a következő, P_i ($i > 0$) közelítő pont koordinátáit

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i &= x_{i-1} + hk \end{aligned} \tag{5.1}$$

ahol $k = f(t_{i-1}, x_{i-1})$

szerint számíthatjuk.

A fentieket vektorokkal szemléltetve az 5.5. ábra mutatja be. Ennek alapján P_i helyvektorát megkapjuk, ha P_{i-1} helyvektorához hozzáadunk egy olyan a -val párhuzamos vektort, melynek első koordinátája h . Ennek pontosan megfelel a

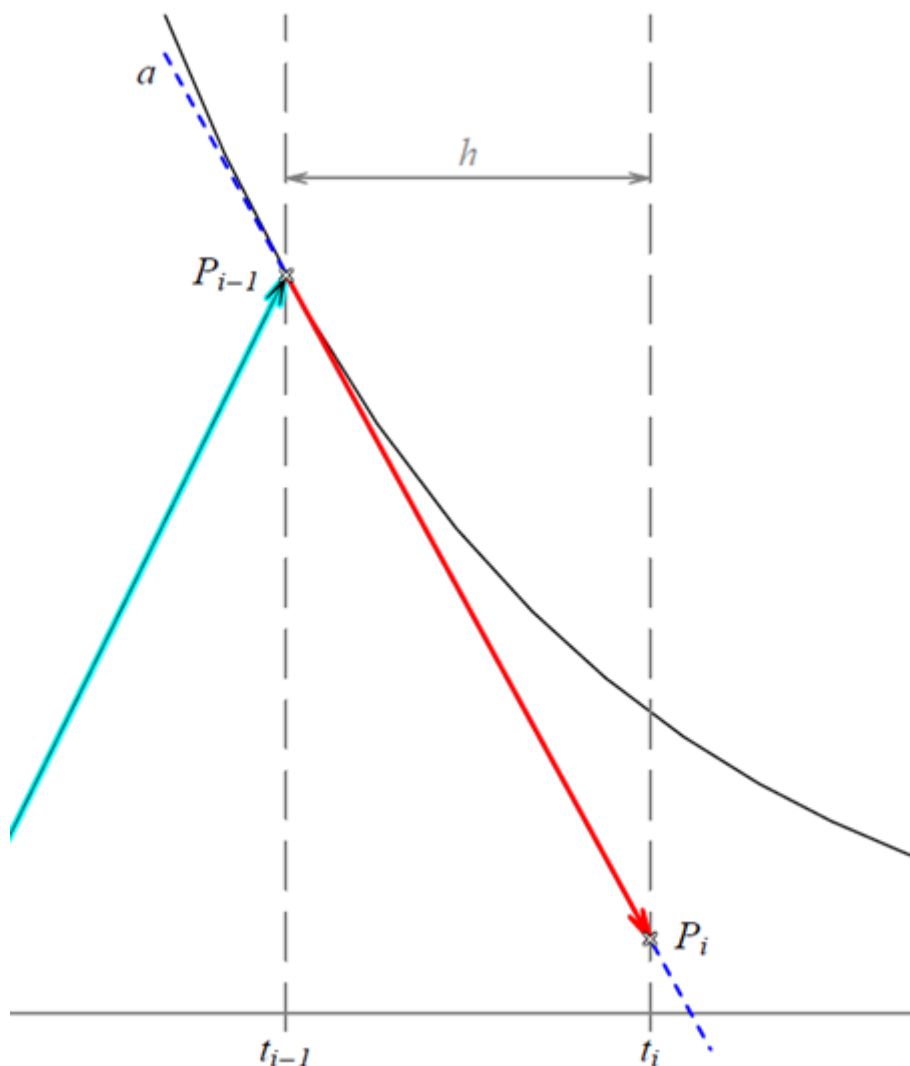
$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}(h, hk)$$

vektor.

5.5. ábra. Euler-módszer egy lépésének szemléltetése vektorokkal.

²Ezekre a továbbiakban az egyszerűség kedvéért „numerikus módszer”-ként fogunk hivatkozni, ott ahol ez nem okoz félreértést.

³A továbbiakban megkülönböztetjük az $X(t)$ függvény t_i helyen vett $X(t_i)$ helyettesítési értékét, a t_i -hez tartozó közelítés x_i értékétől. Erre azért van szükség, mert – az $i = 0$ esettől eltekintve – általában $x_i \neq X(t_i)$, de $x_0 = X(t_0)$ biztosan teljesül.



2.2. Javított Euler-módszer

Az Euler-módszernek már egy lépése is – mivel az a egyenes egy pontját választjuk a közelítés következő pontjának – elég jelentősen letérhet a pontos megoldás görbéjéről. A további lépések során az ebből származó hiba tovább halmozódhat. Az 5.5. ábra alapján következtethetünk arra, hogy a h értékének csökkentésével ez mérsékelhető, ami azonban csökkenti az eljárás hatékonyságát azáltal, hogy növeli annak számításiigényét.

Határozzuk meg most a következő, P_i pontot a

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i &= x_{i-1} + hk_b \end{aligned} \tag{5.2}$$

ahol

$$\begin{aligned} k_a &= f(t_{i-1}, x_{i-1}) \\ k_b &= f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_a\right) \end{aligned}$$

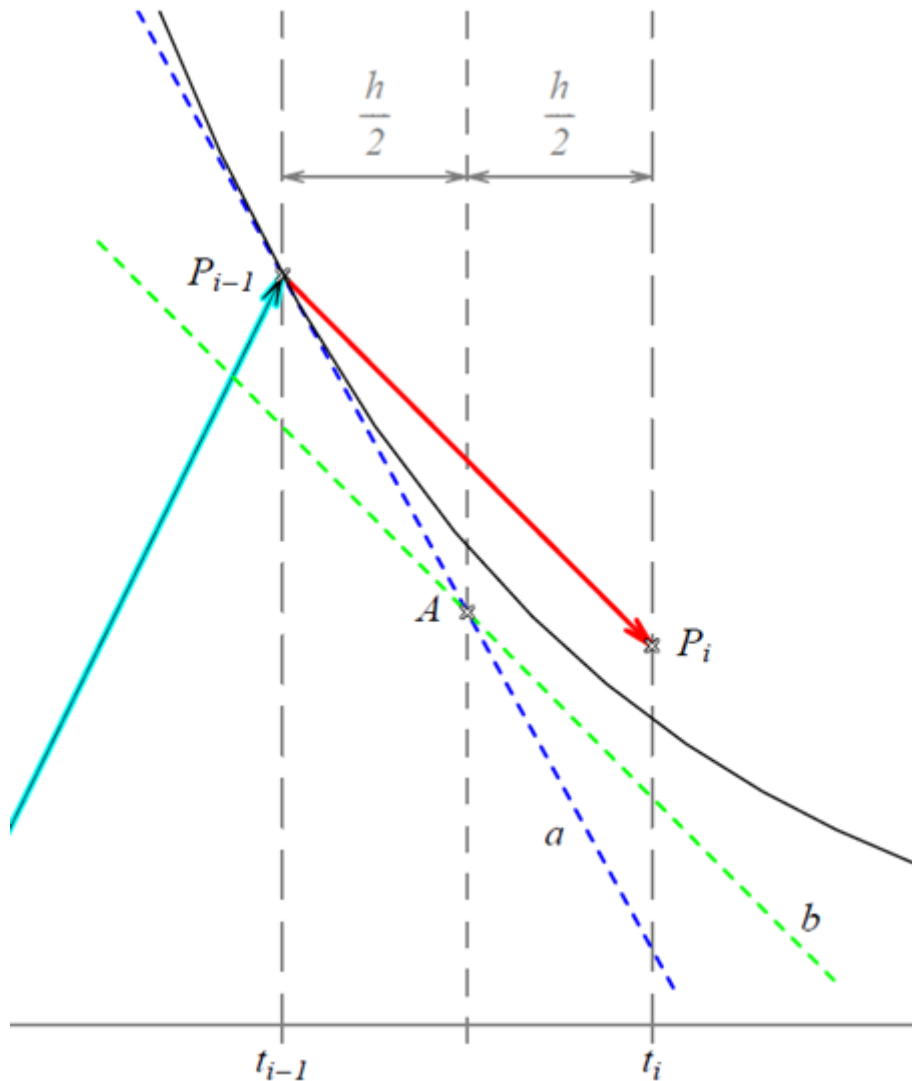
összefüggések alapján. Az eljárás geometriai jelentését az 5.6. ábra szemlélteti.

Először az Euler-módszernek megfelelően keressük meg a $k_a = f(t_{i-1}, x_{i-1})$ meredekségű a egyenesnek azt az A pontját, amelynek első koordinátája

$$t_{i-1} + \frac{h}{2}.$$

Az ábrán b jelöli az A ponton áthaladó görbe érintőjét, melynek meredeksége k_b .

5.6. ábra. A javított Euler-módszer szemléltetése.



Ezt praktikusán úgy nyerjük, hogy A koordinátáit behelyettesítjük az $f(t, X(t))$ függvénybe. A következő lépésben határozzuk meg P_i helyét úgy, hogy

$$b \parallel \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$$

teljesüljön és P_i első koordinátája t_i legyen. A szimmetria miatt ez a megoldás általában pontosabb eredményt szolgáltat.

2.3. Runge–Kutta-módszer

Ez az eljárás szintén egy lépéses módszer. A

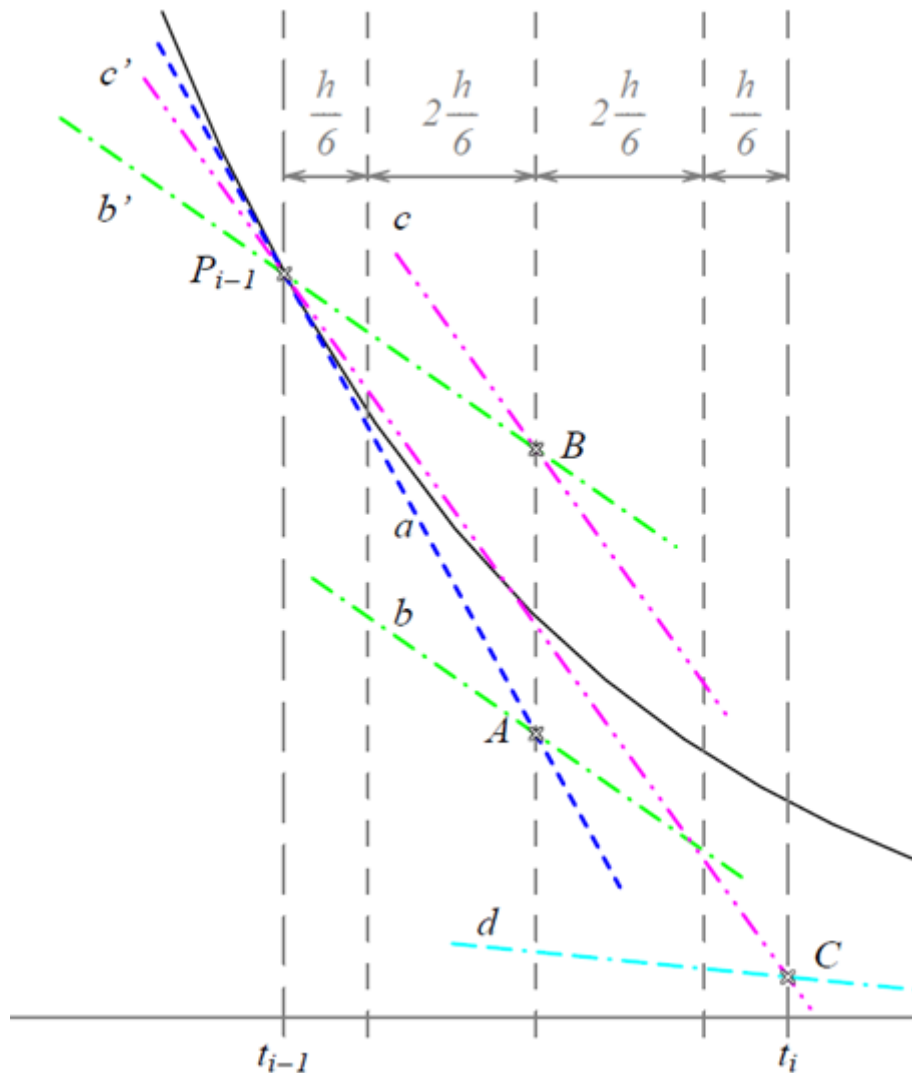
$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i &= x_{i-1} + \frac{h}{6}(k_a + 2k_b + 2k_c + k_d) \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} k_a &= f(t_{i-1}, x_{i-1}) \\ k_b &= f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_a\right) \\ k_c &= f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_b\right) \\ k_d &= f\left(t_{i-1} + h, x_{i-1} + hk_c\right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

szabályok a negyed rendű Runge–Kutta-módszer egyik lehetséges megadási módját jelentik.

5.7. ábra. További pontok (A, B, C) kijelölése a negyed rendű Runge–Kutta-módszerben.



Összevetve az (5.2) és az (5.3) összefüggéseket látható, hogy k_a és k_b értékét azonos módon származtatják. A javított Euler-módszerhez képest azonban k_b -t – ami az A ponthoz tartozó b érintő egyenes meredeksége – fölhasználjuk a B pont meghatározásához, amelyre teljesül, hogy

$$b \parallel \overrightarrow{P_{i-1}B}$$

és B első koordinátája

$$t_{i-1} + \frac{h}{2}.$$

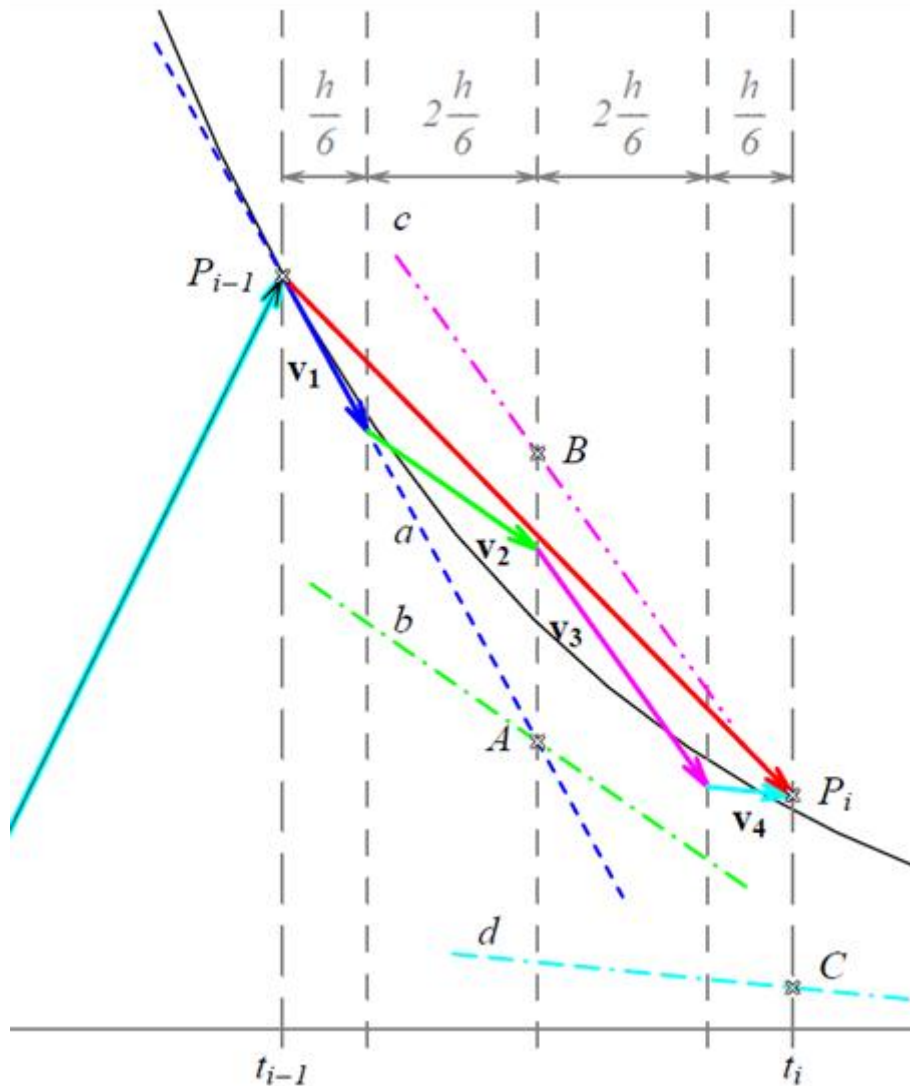
Jelölje c a B pontba rajzolható érintőt, amelynek meredeksége (5.3) alapján k_c .

Ezt felhasználjuk a C pont meghatározásához, amelyre teljesül, hogy

$$c \parallel \overrightarrow{P_{i-1}C}$$

és C első koordinátája t_i . Az itt rajzolható d érintő egyenes meredeksége pedig k_d .

5.8. ábra. A P_{i-1} és a C pontokban számított meredekséget egyszeres, míg a A és a B -ben számítottakat pedig kétszeres súllyal vettük figyelembe.



A P_{i-1} ponthoz tartozó irányon kívül, a fenti módon meghatározott A, B és C pontokban számítható meredekségeket a 5.8. ábrán látható módon vehetjük figyelembe P_i meghatározásában.

Legyen

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$$

ahol

$$a \parallel \mathbf{v}_1; \quad b \parallel \mathbf{v}_2; \quad c \parallel \mathbf{v}_3; \quad d \parallel \mathbf{v}_4$$

és

$$\mathbf{v}_1 \left(\frac{h}{6}; \frac{h}{6} k_a \right), \quad \mathbf{v}_2 \left(\frac{h}{3}; \frac{h}{3} k_b \right), \quad \mathbf{v}_3 \left(\frac{h}{3}; \frac{h}{3} k_c \right), \quad \mathbf{v}_4 \left(\frac{h}{6}; \frac{h}{6} k_d \right)$$

teljesül.

3. Közelítő módszerek hibája

A fenti numerikus módszerek fontos jellemzője, hogy az egymást követő lépések sorozatán keresztül mekkora hibát halmoznak föl. Egy módszer e_n globális hibája azt fejezi ki, hogy n lépés végrehajtása után a módszerrel számított közelítő érték milyen mértékben tér el a függvény pontos értékétől. A továbbiakban a korábban tárgyalt három módszert hasonlítjuk össze ebből a szempontból egy kezdetiérték feladat kapcsán.

Legyen adott az

$$\dot{X}(t) = \lambda X(t); \quad X(0) = 1 \tag{5.4}$$

kezdetiérték feladat és a közelítést a $[0; 1]$ intervallumon végezzük. A feladat megoldása

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

alakban adható meg. Ennek ismerete lehetővé teszi azt, hogy a kezdeti feltételnek megfelelően a

$$P_0(0,1)$$

pontból kiinduló pontos megoldás görbéjéhez az intervallum felső határán tartozó függvényértéket összehasonlítsuk a numerikus módszerek által, a felső határon szolgáltatott közelítő értékekkel. Ezek alapján számítható az eljárások e_n globális hibája. Az e_n értéke természetesen nem csak a közelítés módjától, hanem a h lépésköz nagyságától is függ. (A h értékét a $[0; 1]$ intervallum n részre történő osztásával állítjuk elő.) Hogy képet alkothassunk a lépésköz változtatásának szerepéről, mindhárom közelítő módszer esetében többször is elvégezzük a közelítéseket úgy, hogy a lépésszámot az előző kétszeresére növeljük, azaz felére csökkentjük a lépésközt.

5.9. ábra. Az Euler-módszer globális hibájának változása lépésköz függvényében.

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{n/2}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.00253295	0.00857604	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0061099	0.0049991	0.582914
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.00844762	0.00266137	0.532371
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.00973996	0.00136904	0.51441
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.0104152	0.000693842	0.506811
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.0107598	0.000349219	0.503312
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.0109338	0.00017518	0.501634
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.0110213	0.0000877321	0.500811

5.10. ábra. A javított Euler-módszer globális hibájának változása lépésköz függvényében.

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.0137239	0.0026149	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0116196	0.000510626	0.195276
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.0112243	0.000115339	0.225878
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.0111365	0.0000275334	0.238717
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.0111157	6.73316×10^{-6}	0.244546
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.0111107	1.66524×10^{-6}	0.247318
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.0111094	4.14095×10^{-7}	0.24867
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.0111091	1.0325×10^{-7}	0.249338

5.11. ábra. A Runge–Kutta-módszer globális hibájának változása a lépésköz függvényében.

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.0111339	0.0000249291	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0111103	1.28856×10^{-6}	0.0516892
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.0111091	7.32971×10^{-8}	0.0568828
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.011109	4.37087×10^{-9}	0.0596322
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.011109	2.66845×10^{-10}	0.0610507
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.011109	1.64834×10^{-11}	0.0617715
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.011109	1.02419×10^{-12}	0.062135
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.011109	6.38361×10^{-14}	0.0623281

Az 5.9., 5.10. és az 5.11. táblázatok rendre az Euler-, a javított Euler- és a Runge–Kutta-módszerek fölhasználásával készültek a (5.4) kezdetiérték feladat közelítő megoldása során ($\lambda = -4,5$).

A táblázatok – mindhárom módszer esetében – nyolc közelítő számítás eredményeit tartalmazzák, amelyeket a $[0; 1]$ intervallum egyre finomdó felosztásai mellett végeztünk. A közelítéseket mindhárom esetben először $h = \frac{1}{10}$ lépésközzel végeztük ($n = 10$), és a következőben a h értékét felére csökkentettük, azaz az osztópontok számát kétszeresére növeltük. Így a legutolsó számításokat már a $h = \frac{1}{1280}$ értéke mellett végeztük. (Az 5.9., 5.10. és az 5.11. táblázatok első (n) és második (h) oszlopa.)

Az egyes sorok tehát a következőket tartalmazzák :

n :	a közelítő lépések száma,
h :	a lépésköz nagysága az aktuális n lépésszám esetén,
$X(t_n)$:	a pontos függvényérték az intervallum végén ($X(1)$),
X_n :	a közelítő érték az n . lépés után, az intervallum végén,
e_n :	a közelítés globális hibája ($ X(t_n) - X_n $),
$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$:	az aktuális és az előző közelítés globális hibáinak hányadosa. (Ez a hányados természetesen a táblázatok első soraiban nem értelmezhető.)

Mindhárom táblázatban megfigyelhető, hogy az X_n oszlopának értékei egyre jobban közelítenek a pontos $X(1)$ értékhez az n növekedésével. Ez természetesen azt is jelenti, hogy a globális hiba értéke is egyre csökken ezzel együtt.

A továbbiakban a globális hiba csökkenésének mértékére vonatkozóan szeretnénk megállapítást tenni. Érdekes azt is megfigyelni, hogy a fenti táblázatok utolsó oszlopainak $\frac{e_n}{h_n}$ értékei hogyan változnak az n növekedésével. Ha figyelembe vesszük, hogy az 5.9. táblázatban az $n = 163840$ értéke esetén ebben az oszlopban $0,500006$, illetve az 5.10. táblázatban ugyanitt $0,249988$ szerepelne, akkor megalapozottnak tűnhet az a feltevés, hogy az egyes táblázatokban az n növelésével az $\frac{e_n}{h_n}$ értékei 2^{-1} , 2^{-2} és 2^{-4} értékekhez közelítenek.

Egy numerikus módszert konvergensenek nevezünk az adott I intervallumon ($\forall t_n \in I$), ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_n = X(t_n),$$

azaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_n = 0.$$

Az előzőkből is látható, hogy a globális hiba nagyságát a h értéke jelentősen befolyásolja. Ugyanakkor az is nyilvánvaló, hogy a különböző módszerek globális hibái is másként „viselkednek” a h értékének változtatásával. Az mondjuk, hogy a globális hiba P -ed rendű, ha megadható olyan r valós konstans, hogy

$$e_n \leq r \cdot h^p \tag{5.5}$$

teljesül.

Az előzőek lehetőséget adnak a numerikus módszerek jellemzésére is, ugyanis P -ed rendűnek nevezünk egy numerikus módszert, ha globális hibája P -ed rendű.

Jelölje h_n az intervallum adott felosztásához tartozó lépésközt, tehát esetünkben $n \cdot h_n = 1$ teljesül. Ha a numerikus módszer konvergens, akkor a definíció szerint e_n globális hibája 0-hoz tart a felosztás finomításával. Ebből következik, hogy $e_n \leq e_{\frac{n}{2}}$ teljesül (minden n esetén), valamint

$$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$$

szintén konvergens, ha $n \rightarrow \infty$.

Hozzuk most az (5.5) összefüggést

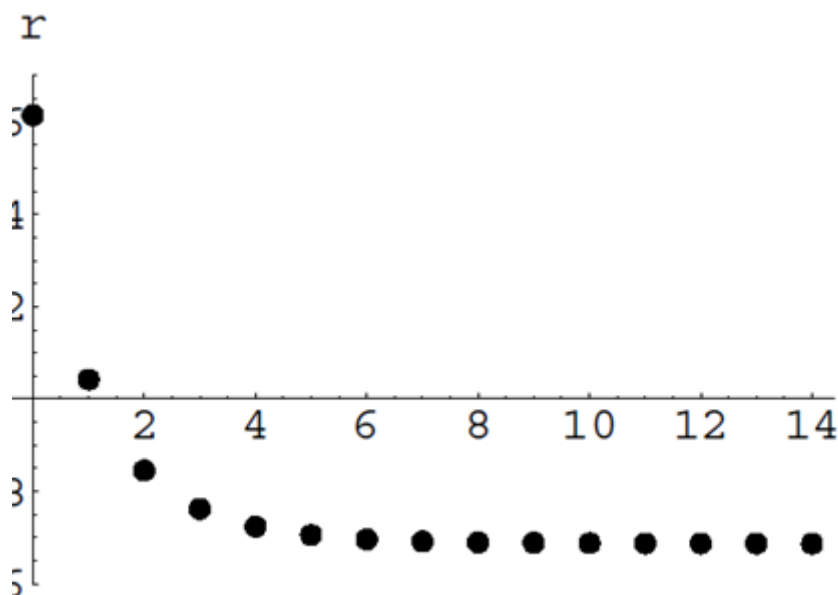
$$\frac{e_n}{(h_n)^p} \leq r$$

alakúra, ami kifejezi, hogy minden lépésközhöz található olyan r valós szám, amelynél a fenti hányados nem nagyobb. Érdekes még azt is megfigyelni, hogyan változik a hányadosok értéke a lépésköz finomításával a különböző numerikus módszerek esetében. Azt mutatja be az 5.1. táblázat és jóval szemléletesebb módon az 5.12. ábra is, hogy nem túlságosan nehéz feladat ilyen r számot találni.

5.1. táblázat. A $\frac{e_n}{(h_n)^p}$ hányados változása a lépésköz csökkentésével.

	n	160	320	640	1280
	h	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{640}$	$\frac{1}{1280}$
Euler- módszer	e_n	$6,9384 \cdot 10^{-4}$	$3,4921 \cdot 10^{-4}$	$1,7518 \cdot 10^{-4}$	$0,8773 \cdot 10^{-4}$
	$\frac{e_n}{h}$	$1,1101 \cdot 10^{-1}$	$1,1175 \cdot 10^{-1}$	$1,1212 \cdot 10^{-1}$	$1,1230 \cdot 10^{-1}$
javított Euler- módszer	e_n	$6,7332 \cdot 10^{-6}$	$1,6652 \cdot 10^{-6}$	$0,4141 \cdot 10^{-6}$	$0,1033 \cdot 10^{-6}$
	$\frac{e_n}{h^2}$	$1,7237 \cdot 10^{-1}$	$1,7052 \cdot 10^{-1}$	$1,6961 \cdot 10^{-1}$	$1,6916 \cdot 10^{-1}$
Runge-Kutta- módszer	e_n	$2,6685 \cdot 10^{-10}$	$0,1648 \cdot 10^{-10}$	$0,0102 \cdot 10^{-10}$	$0,0006 \cdot 10^{-10}$
	$\frac{e_n}{h^4}$	$1,7488 \cdot 10^{-1}$	$1,7284 \cdot 10^{-1}$	$1,7183 \cdot 10^{-1}$	$1,7136 \cdot 10^{-1}$

5.12. ábra. A $\frac{e_n}{(h_n)^2}$ hányados változása a lépésköz csökkentésével a javított Euler-módszer esetében.



A vizsgálatok során az elsőként alkalmazott lépésköz $h = 10$ volt. Jelölje j annak a közelítő számításnak a sorszámát⁴, amelyben a lépésköz $h_j = \frac{1}{10} \cdot 2^{-j}$ volt. A fentiek alapján a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{e_{2j}}{e_{2j-1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r \cdot (h_j)^p}{r \cdot (h_{j-1})^p} = \frac{1}{2^p}$$

határérték számítható és így összehasonlíthatóvá válnak a numerikus módszerek a közelítés pontossága szempontjából.

A fentiekkel látható módon összhangban vannak az 5.9., 5.10. és az 5.11. táblázatok utolsó oszlopainak értékei, ha p rendre 1, 2 és 4.

4. Prediktor-korrektor-módszerek

⁴Ez egyben az 5.9., 5.10. és az 5.11. táblázatok soraira értelmezhető sorszámozás is egyben, ha az 0-val kezdődik. Ugyanakkor $n = 10 \cdot 2^j$ is teljesül.

Az explicit Euler-módszerhez úgy is eljuthatunk, ha a (3.8) egyenlet bal oldalán az $\dot{X}(t)$ deriváltat a megfelelő differencia hányadossal helyettesítjük:

$$\frac{X(t_i) - X(t_{i-1})}{h} \approx \dot{X}(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, X(t_{i-1}))$$

Ezt az összefüggést

$$X(t_i) \approx X(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, X(t_{i-1}))$$

alakra hozva t_{i-1} és $X(t_{i-1})$ ismeretében fölhasználhatjuk $X(t_i)$ értékének közelítésére. Lényegében ezt tettük az explicit Euler-módszer minden lépésében.

Ha most a fentiekhez hasonló módon a (3.8) egyenlet segítségével az $\dot{X}(t_i)$ derivált értéket értelmezzük, akkor az

$$\frac{X(t_i) - X(t_{i-1})}{h} \approx \dot{X}(t_i) = f(t_i, X(t_i))$$

összefüggés átrendezésével

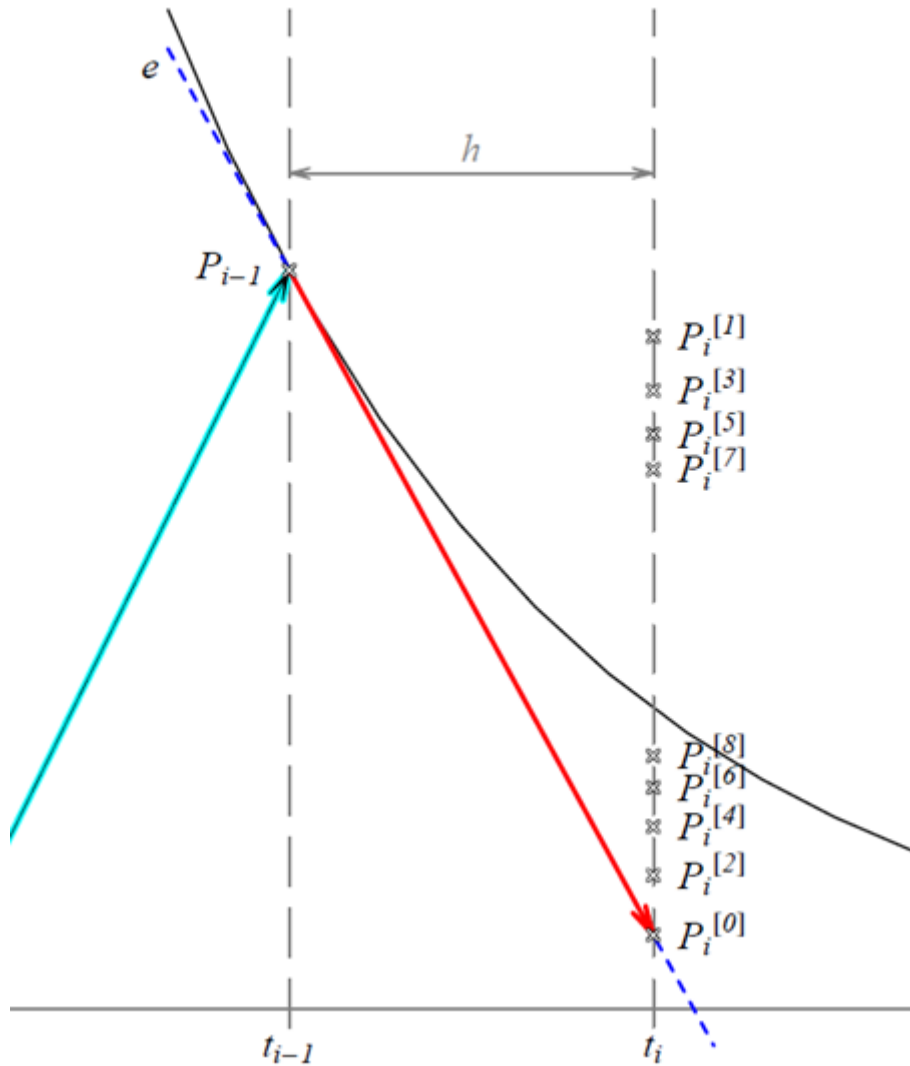
$$X(t_i) \approx X(t_{i-1}) + hf(t_i, X(t_i))$$

nyerhető. A pontos $X(t_i)$, $X(t_{i-1})$ értékek helyébe az x_i , x_{i-1} közelítő értékeket írva, az alábbiak szerint értelmezhetjük az implicit Euler módszert:

$$x_i = x_{i-1} + hf(t_i, x_i).$$

Látható módon az egyenlőség mindkét oldalán szerepel a keresett x_i érték. Ennek kifejezhetőségét és így a módszer közvetlen használhatóságát az f -függvény határozza meg, és általában lineáris rendszerek esetében előnyös.

5.13. ábra. Implicit Euler-módszer (prediktor-korrektor-módszerben).



Ha azonban a

$$\begin{aligned}
 t_i &= t_{i-1} + h \\
 x_i^{[l+1]} &= x_{i-1} + hk
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

ahol $k = f(t_i, x_i^{[l]})$
($l = 0, 1, \dots$) és $x_i^{[0]}$ adott

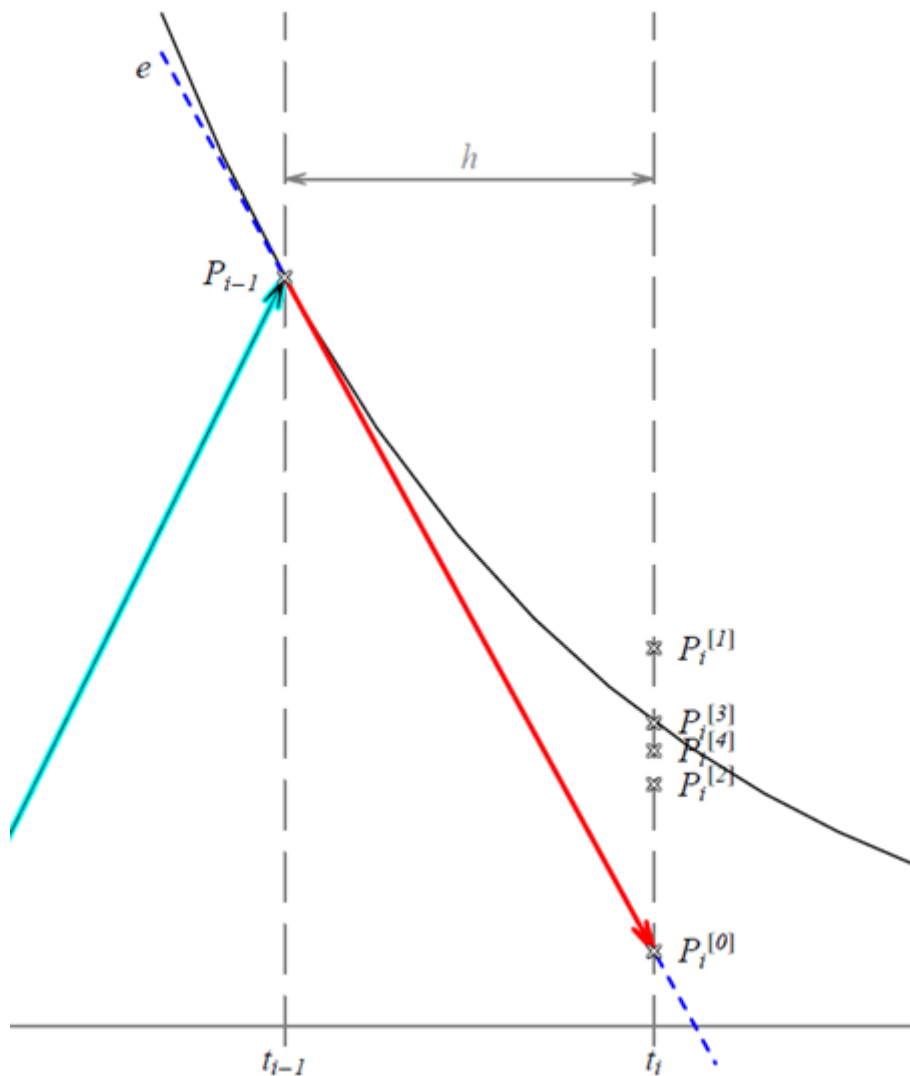
összefüggésnek megfelelően megadjuk a kezdő, $x_i^{[0]}$ értéket – az 5.13. ábra szerinti módon, explicit Euler-módszerrel – akkor néhány iteráció⁵ után $x_i^{[l]}$ értékére az $X(t_i)$ pontos értékét jobban közelítő értéket kapunk.

Így egy olyan módszert nyertünk, amelyben a következő, x_i közelítő érték meghatározását egy explicit módszer segítségével kiválasztott értéket ($x_i^{[0]}$), egy implicit módszer segítségével teszünk pontosabbá kellő számú iteratív lépés során. Az explicit módszert prediktornak, míg az implicit módszert korrektornak nevezzük.

⁵Ez általában 2-3 iterációs lépést jelent.

Ha a numerikus integrálás trapéz formulája alapján a $[P_{i-1}, t_i]$ mindkét végpontjához tartozó meredekség értékeket azonos súllyal vesszük figyelembe a következő közelítő pont meghatározásához, a trapéz-módszer néven ismert implicit módszert kapjuk.

5.14. ábra. Trapéz-módszer (prediktor-korrektor-módszerben).



Ennek korrektor-módszerként történő alkalmazása a

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i^{[l+1]} &= x_{i-1} + \frac{h}{2}k \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\text{ahol } k = f(t_{i-1}, x_{i-1}) + f(t_i, x_i^{[l]})$$

($l = 0, 1, \dots$) és $x_i^{[0]}$ adott

szabályok alapján történhet.

A 5.14. ábrán jól látható, hogy a trapéz-módszer korrektor módszerként való alkalmazása révén kevesebb iterációs lépés szükséges a következő, P_i pont kijelöléséhez közel azonos pontossággal.

5.2. táblázat. A két módszerre épülő prediktor-korrektor módszer első néhány iterációjának eredménye.

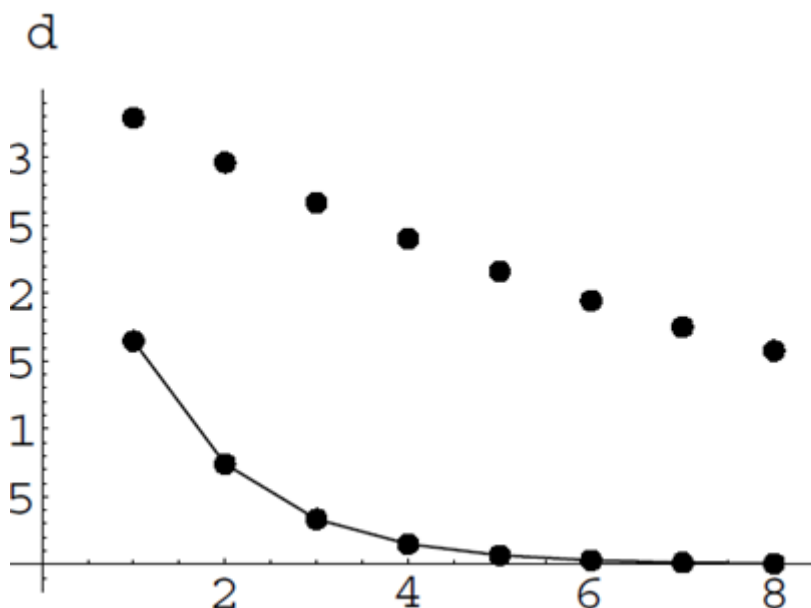
k	t_i	implicit Euler-módszer		Trapéz-módszer	
		$x_i^{[k]}$	$d_E(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$	$x_i^{[k]}$	$d_t(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$
0	0,40	0,040657	—	0,040657	—
1	0,40	0,369978	0,329321	0,205318	0,164661
2	0,40	0,073589	0,296389	0,131220	0,074098
3	0,40	0,340339	0,266749	0,164564	0,033344
4	0,40	0,100264	0,240075	0,149559	0,015005
5	0,40	0,316332	0,216068	0,156312	0,006753
6	0,40	0,121871	0,194461	0,153273	0,003039
7	0,40	0,296886	0,175015	0,154640	0,001367
8	0,40	0,139372	0,157514	0,154025	0,000615

Erre a 5.2. táblázat adatai szolgálnak magyarázattal. A pontsorozatok konvergenciáját jellemezhetjük az egymást követő pontok távolságainak

$d_E(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$ és $d_t(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$ sorozatával.

Látható, hogy az implicit Euler-módszer esetében az egymást követő pontok távolsága közelítőleg lineárisan csökken, míg a Trapéz-módszer esetében a távolságok a következő iterációs lépésben jó közelítéssel megfeleződnek. Ezek az összefüggések még szemléletesebben jelennek meg a táblázat adatai alapján készült 5.15. ábrán. (Az ábrán folytonos vonallal összekötött pontok jelölik a trapéz-módszerhez tartozó, a 5.2. táblázat utolsó oszlopában található adatokat.)

5.15. ábra. Implicit Euler-módszer és a trapéz-módszer konvergenciája (prediktor-korrektor-módszerben).



6. fejezet - Véletlen modellek matematikai alapjai

„Az Isten nem kockajátékos.”

Albert Einstein

A véletlen fogalmát, amilyen könnyedén alkalmazzuk a mindennapi szóhasználatban¹, olyan nehezen adhatjuk meg valóban pontosan a modern tudományok területén. Bár a biológia, fizika, kémia, közgazdaságtan, szociológia és szinte minden más tudományág használ olyan modelleket, melyekben a jelenségek véletlen, statisztikus jellege dominál. Nemes egyszerűséggel azt is szoktuk mondani, hogy minden véletlen (azaz sztochasztikus), ami nem determinisztikus. Az előző fejezetek példáiban determinisztikus modelleket ismerhettünk meg. Praktikusnak ezekre az jellemző, hogy az azonos kiinduló adatok és változatlan feltételek mellett a determinisztikus modellre épülő szimuláció mindig ugyanazt az „eredményt” szolgáltatja, függetlenül attól, hogy mikor és ki végzi a szimulációt.

Ugyanakkor a véletlen egyben egy meglehetősen „nehéz” fogalom is. Tekintsünk egy klasszikusan a véletlen jelzővel illelhető jelenséget, a kockadobást. Nem határozzák-e meg egyértelműen a dobás eredményét a kocka fizikai és geometriai paraméterei, a kockát, mint testet a dobás kezdetétől annak nyugalmi állapotáig eltelt idő alatt ért hatások? Mindezek a fizika és a matematika eszközeivel jól leírhatók. Vagy – egy az előzőtől sokkal összetettebb rendszert alapul véve – az internetes hálózat esetében vajon számítható-e egyértelműen, azaz megjósolható-e egy csomag útja, így számítható-e előre a hálózat egyes elemeinek terhelése? Természetesen – ahogy az előző példában is – az adatok pontos ismeretében ez lehetséges volna. Akkor miért alkalmazunk például a hálózatok (függetlenül attól, hogy kommunikációs- vagy úthálózatról van szó) működésének leírására sztochasztikus modelleket?

Még összetettebb a kép, ha a szimulációról a számítógépek vonatkozásában beszélünk. Ezekben az esetekben a szimulációt egy számítógépes program végzi, ami, mint tudjuk determinisztikus, azaz a program futásának eredményét a bemenő adatok egyértelműen meghatározzák.

Ezek után természetesen fölvetődik a kérdés, hogy van-e véletlen a valóságban, és miért is használjuk egyáltalán a fogalmát a tudományokban? Láthatjuk, hogy az eseményeknek vannak előzményeik, amelyekből azok következnek. Ilyen összefüggésben tehát a véletlen fogalma a tudományok területén megkerülhető lenne. Azt, hogy mégis szükség van rá, semmi sem bizonyítja jobban, mint hogy a sztochasztikus számítógépes szimulációk napjainkra hatékony segédeszközökké váltak a tudomány és az ipar különböző területein. Azt is mondhatjuk, hogy a véletlen a „szükséges rossz”, amit általában tömegjelenségek esetében eredményesen tudunk alkalmazni, amikor azok összefüggéseinek pontos leírása gyakorlatilag lehetetlen, mert vagy nem ismert, vagy túlságosan bonyolult, vagy a pontos számítások elvégzéséhez nem áll rendelkezésre elegendő adat, illetve idő.

1. Véletlenszámok

A matematika törekszik arra, hogy mindent mérhetővé, számokkal kifejezhetővé tegyen. Természetesen nincs ez másként ezen a területen sem. Ezért tehát a valóságos, vagy a számítógépben lejátszódó virtuális „véletlen” eseményeket is számok segítségével fejezhetjük ki. Így vált szükségessé a *véletlenszám* fogalmának bevezetése. Ilyen véletlenszámnak tekinthető például a kockadobás eredménye, hiszen eleget tesz a fenti „feltételeknek”, mivel a dobás kimenetelének számításához a gyakorlatban sem kellő idő, sem kellő adat nem áll rendelkezésünkre általában, és valójában túlságosan bonyolult is volna. Ennek megfelelően beszélhetünk véletlenszámsorozatról is, ami több kockadobás egymásutánjaként is előállhat.

Bár „megalkuvások” eredményeként (hiszen tudjuk, hogy véletlenek márpedig nincsenek), más olyan jelenségeket is fölhasználhatunk véletlenszámok előállítására, amelyeknek a kimenetelét nem ismerjük pontosan.

Összefoglaló néven Monte Carlo-módszereknek nevezzük a sztochasztikus szimulációkat. Ez az elnevezés is utal egy másik, lehetséges véletlenszám forrásra, a szerencsejátékok világára. Ennél jóval hatékonyabban, elég

¹Jól érzékelteti a hétköznapi véletlen történések determinisztikus voltát a Benjamin Button különös élete (2008) című film alábbi részlete: Daisy.avi

hosszú ideig a radioaktivitás jelenségét is főhasználták véletlenszámok előállítására. Előállíthatunk például egy véletlen bitsorozatot, ha zárt térbe helyezett hasadó anyagot Geiger–Müller-számlálóval figyelünk, és 1-et vagy 0-t írunk a műszer kattánásakor annak megfelelően, hogy az óránk másodpercmutatója páros vagy páratlan értéket mutat.

Hasonlóan véletlen bitsorozatot nyernénk, ha sorozatos pénzfeldobáskor a „fej”-hez mondjuk 0-t az „írás”-hoz pedig 1-et rendelnénk. Hasonló eredményre jutnánk, ha egy geometriailag szabályos, anyagát tekintve pedig homogén kockával dobásokat végezve, páros szám dobása esetén 0-t, páratlan esetben pedig 1-et adnánk meg.

Tekintsük most az alábbi bitsorozatot:

1010111001100100101101110111110100010001100100100100111010110.

Vajon a korábbi „módszerek” egyikével előállított bitsorozatok megkülönböztethetők-e ettől, amit a π szám bináris alakjából emeltünk ki?

Mivel a gyakorlat szempontjából ennek igen fontos szerepe van, a matematikában rendelkezésre áll az az eszköztárszer, amellyel eldönthető, hogy egy számsorozat „mennyire véletlenszerű”.

Miért is van szükség véletlenszámokra? Ahogyan tudjuk a matematika mindent számok formájában igyekszik kifejezni, az összehasonlíthatóság érdekében mindent meg akarunk mérni.

Először talán nézzük meg, hogy hol is találkozhatunk véletlen számsorozatokkal. Egyes termékek csomagolásán a termék tömege, vagy a térfogata mellett azt is föl szokták tüntetni, hogy a tényleges tömeg illetve térfogat a „névleges” tömegtől illetve térfogattól – azaz attól, amiért fizettünk – hány százalékkal térhet el maximálisan. Elektronikai alkatrészek esetében például az ellenállások fontos jellemzője, hogy az alkatrész tényleges ellenállása a névlegestől hány százalékkal térhet el. Vajon mitől is függhet ez a bizonyos eltérés? Természetesen nagyon sokmindentől. A technológiától, a gépsor állapotától, amellyel a csomagolást illetve a termék gyártását végezték, az aktuális hőmérséklettől, a levegő páratartalmától, és még sorolhatnánk. Egy szóval a „véletlentől”. Azaz ha a szalagról lekerülő termékeket pontosan megmérnénk, akkor egy véletlenszámsorozatot kapnánk. Tehát ahol a gyár dolgozói egy adott termék sokaságát látják, ott a matematikus alkalmasint egy véletlenszámsorozatot.

Láthatjuk, hogy a minket körülvevő világ telis-tele van véletlenszámsorozat forrásokkal, csak észre kell venni őket. A jelenségek matematikai leírásához jó lenne ha rendelkezésünkre állna egy általános fogalom, ami alkalmas az összes véletlen jelenség megadására matematikai értelemben. Az összes véletlenszám forrást a matematikában *valószínűségi változónak* nevezik. Tehát a korábban említett csomagoló- vagy gyártósort a valószínűség-számítás valószínűségi változónak tekinti. (Természetesen annak tekintjük a dobókockát, a pénzérmét és persze felsorolhatnánk az összes szerencsejátékot is.)

A valószínűségi változónak fontos jellemzője, hogy hány féle értéket szolgáltathatnak. Ha csak véges sokat, vagy legalább megszámlálható értéket vehet föl, akkor a valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük. Ha azonban egy vagy több intervallum tetszőleges értékét fölveheti, akkor folytonos valószínűségi változóról beszélünk. A matematika diszkrét valószínűségi változóval írja le például a pénzfeldobást, a kockadobást. A palackokba kerülő málnaszörp mennyisége azonban (elsősorban nem annak halmazállapota miatt) *folytonos valószínűségi változóval* azonosítható, hiszen a térfogat folytonossága miatt – a térfogat egy valós számmal jellemezhető – valamely két érték közötti tetszőleges értéket is fölvehet.

Természetesen a palackozó üzemből azt látnánk, hogy a palackokba általában mégis csak a névleges térfogathoz közeli mennyiségű folyadék kerül. Egyszerűen csak azért, mert erre törekszenek. Nagyon ritkán fordulhat csak elő az, hogy nagy legyen a névleges értéktől való eltérés. Ez ugyanis a selejtet jelenti. Tehát a névleges értéktől való nagy eltérések ritkán fordulnak elő, az attól való kis eltérések pedig nagyon gyakoriak. Talán úgy is lehetne fogalmazni, hogy az egyre nagyobb eltérések egyre ritkábban fordulnak elő. Ugyanakkor például a pénzfeldobással vagy a kockadobással kapcsolatban pedig az a tapasztalat, hogy kellően sok dobás után a „fejek” és az „írások” száma, illetve az egyes számok gyakorisága közel azonos. Ennek a jelenségre (azaz matematikai értelemben a valószínűségi változóra) nagyon jellemző tulajdonságnak a megadására a valószínűségi változó *eloszlása* alkalmas.

Alapvetően tehát a jelenségek (a valószínűségi változók) két lényeges nagy csoportba sorolhatók: lehetnek diszkrét és folytonosak.

Az eloszlás tekintetében – bár vannak eloszlás-„családok” – minden jelenség eloszlása egyedi, és ez nagyon fontos gyakorlati jelentőséggel bír. Ez teszi lehetővé például azt, hogy ha kellő minta áll rendelkezésünkre, el tudjuk dönteni, hogy az egyes minták elemei mely gyártósoron készültek. Jellemző módon az egyes elemek nem föltétlen hordozzák ezt az információt, de azok sokasága már igen.

Mit is tehetünk tehát, ha bizonyos jelenségeket jellemző véletlenszámsorozatokra van szükségünk szimulációs céllal? Nyilvánvalóan fölhasználhatjuk magából a jelenségből nyert számsorozatokat. Bár bizonyára ez lenne a leghitelesebb, de azt is könnyen be lehet látni, hogy a legtöbb esetben meglehetősen nehézkes lehet ez a megoldás. Különösen akkor, ha a jelenség túlságosan lassan szolgáltatja a sorozat egymást követő elemeit. Fölvetődik a kérdés, hogy vajon a számítógép alkalmas lehet-e arra, hogy ilyen számsorozatokat produkáljon? Logikus válasznak egy határozott „Nem!” tűnne, hiszen a számítógép működését program vezérli, ezektől a programoktól pedig pontosan azt várjuk el, hogy a bemenetükhöz egy jól meghatározott – mégpedig a bemenetük által meghatározott – kimenetet rendeljenek. Azaz legyenek determinisztikusak.

Korábban láttuk, hogy a valódi jelenségek esetében, amikor valamely változás kimenetelét a véletlennek tulajdonítjuk, elvileg előre ki tudnánk számítani a vágállapotot, ha elég gyorsak lennénk, valamint ha rendelkezésünkre állna megfelelő mennyiségű adat és nem volna „kényelmesebb” megoldás az, amit a valószínűségszámítás kínál. Ha tehát ezek a jelenségek „valahol” mégis determinisztikusak, akkor egy determinisztikus rendszert, a számítógépet miért is ne lehetne „megtanítani” arra, hogy a kívánt jelenséghez hasonló véletlenszámsorozatokat produkáljon. Annál is inkább, mivel a számítógép meglehetősen gyors, és a legtöbb esetben sokkal olcsóbban képes ezt megtenni.

Valóban léteznek olyan matematikai algoritmusok, amelyek alapjául szolgálnak az ilyen programoknak. Nevezük az ilyen programokat *véletlenszám-generátoroknak*. Annak megkülönböztetésére, hogy ezek a számok, nem természetes módon, egy valódi jelenségből eredeztethetőek, ezért *pszeudó*-véletlenszám generátoroknak (álvéletlenszám-generátorok) nevezük őket. Mindez azt jelenti, hogy matematikai értelemben a számítógép is tekinthető valószínűségi változónak.

A digitális számítógép, bár meglehetősen nagy pontossággal képes számokat előállítani, tárolni, de mégis csak véges pontossággal teszi azt. Ez azt jelenti, hogy mindig meghatározható az a $d = 2^{-k}$ alakban megadható legkisebb lépésköz, amelynél kisebb értékkel növelve egy a rendszerünkben ábrázolható számot, az nem lesz megjeleníthető az adott adattípuson. Például ha 8 biten fixpontosan ábrázolunk előjel nélküli számokat úgy, hogy a felső 4 bit az egészet jelenti, akkor belátható, hogy az így ábrázolható számok értékeit legfeljebb 2^{-4} lépésközzel tudjuk változtatni, ennél kisebbel, például 2^{-5} -nel már nem, hiszen ilyen helyiérték nem szerepel ebben az ábrázolásban (6.1. táblázat).

6.1. táblázat. Nyolc biten ábrázolt fixpontos tört értékét 2^{-4} lépésekkel tudjuk változtatni, ha a felső 4 bit az egészet, az alsó 4 pedig a törtet tárolja.

2^2	2^1	2^0	.	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
X	X	X	.	X	X	0
X	X	X	.	X	X	0
X	X	X	.	X	X	1
X	X	X	.	X	X	1

Ebből azonban az következik, hogy valójában egy diszkrét valószínűségi változóval írható le matematikai értelemben egy ilyen véletlenszám-generátor.

Általában a különféle programozási nyelvek, táblázatkezelők, számítógépes algebrai rendszerek rendelkeznek olyan lehetőséggel, amellyel *egyenletes eloszlású* v pszeudó-véletlenszámokat lehet előállítani úgy, hogy $0 \leq v < 1$ teljesül. Az hogy egyenletes eloszlásúak, szemléletesen annyit jelent, hogy – hasonlóan a kockadobáshoz – nagyon sok ilyen számot előállítva, az egyes értékek *gyakorisága* egyre jobban közelít

egymáshoz. Például, ha n elemű ilyen sorozatot állítottunk elő, és az egyes értékek k_1, k_2, \dots, k_i előfordulási gyakoriságai közel azonosak lehetnek. A fentiek alapján természetesen $n = k_1 + k_2 + \dots + k_i$ teljesül.

Azért, hogy az ilyen számsorozatok különböző elemszám esetén is összehasonlíthatóak legyenek, bevezetjük a *relatív gyakoriság* fogalmát. A j -edik érték r_j relatív gyakorisága $\frac{k_j}{n}$ alakban adható meg, ahol k_j a j -edik szám gyakorisága, n pedig a sorozat elemszáma. Természetesen

$$r_1 + r_2 + \dots + r_i = 1,$$

hiszen

$$\sum_{j=1}^i r_j = \sum_{j=1}^i \frac{k_j}{n} = \frac{\sum_{j=1}^i k_j}{n} = 1$$

teljesül.

A sorozat elemszámának növelésével, azaz ha n végtelenhez tart, akkor r_j relatív gyakoriság egy elméleti P_j értékhez tart, ami annak *valószínűsége*, hogy aktuálisan a j -edik számot generálja a program, vagy dobjuk a kockával. Egyenletes eloszlás esetén teljesül, hogy

$$P_1 = P_2 = \dots = P_i.$$

Például a kockadobás esetében ez azt jelenti, hogy bármelyik számot azonos, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobhatjuk.

2. Véletlenszám-generátorok használata

A számítógép segítségével tehát általában $v \in [0; 1)$ számokat tudunk előállítani, amelyek egyenletes eloszlásúak. Ez megfelelő alapot biztosít a más tartományokba eső, ettől különböző eloszlású számok előállításához.

2.1. Egyenletes eloszlás tetszőleges tartományban

Könnyen belátható, hogy a

$$\hat{v} = v(b - a) + a$$

összefüggés a $v \in [0; 1)$ számot úgy transzformálja, hogy $\hat{v} \in [a; b)$ teljesül.

Állítsunk elő most olyan véletlen

$$P_j(x_j; y_j)$$

síkbeli pontokat, hogy

$$x_j \in [-1; 1) \text{ és } y_j \in [-1; 1)$$

teljesüljün tetszőleges J esetén.

A fentiek alapján x_j és y_j értéke a

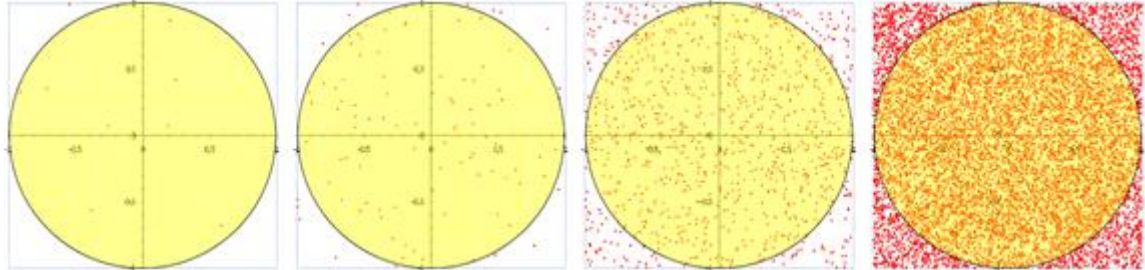
$$2v - 1$$

kifejezéssel adható meg, ahol $v \in [0; 1)$ egyenletes eloszlású véletlenszám. A 6.1 ábrán megfigyelhető, hogy a koordináta-rendszer egy origó középpontú, 2 egység oldalhosszúságú, négyzet alakú tartományában így

²A jelölés szerint i különböző véletlenszámot képes a program előállítani, amelyekből a j -edik k_j -szer fordul elő a sorozatban. A mindenkor index nem feltétlen az előállított értéket jelöli. Az említett véletlenszám-generátor esetében ennek nem is lenne értelme, hiszen minden így előállított v számra teljesül, hogy $0 \leq v < 1$. Ugyanakkor a kockadobások esetében az index a lehetséges dobások értékét is jelölheti.

megjelenített pontok elhelyezkedése valóban az „egyenletesség” benyomását kelti függetlenül a pontok számától.

6.1. ábra. A képeken rendre 10, 100, 1 000 és 10 000 pontot helyeztünk el úgy, hogy a koordinátáikat egyenletes eloszlású véletlenszámokként állítottuk elő úgy, hogy azok a $[-1; 1]$ -ba essenek.



Ha ez valóban így is van, akkor annak is teljesülnie kell, hogy az azonos nagyságú területekre közel azonos számú pont jut, és a számuk közötti relatív eltérés vélhetően a pontok n számának növelésével csökken. Ezt mutatja be a 6.2 táblázat.

6.2. táblázat. Azonos nagyságú területekhez tartozó egyenletes eloszlású síkbeli pontok elhelyezkedése.

n : az összes pontok száma

k : az x -tengely fölötti pontok száma

$d_{\frac{n}{2},k}$: a k -nak $\frac{n}{2}$ -től való abszolút százalékos eltérése

n	k	$d_{\frac{n}{2},k}$
10	8	30,0
100	63	13,0
000	491	0,90
000	4 950	0,50
000	49 851	0,149

Ez a tapasztalat azt sejteti, hogy egyenletes eloszlás esetén az adott terület nagysága és a véletlenszerűen a területre sorsolt pontok száma között összefüggés van. A fenti tapasztalatot a következő gyakorlati példával szemléltethetnénk. Képzeljük csak el, hogy tetszőleges vonallal határolt sík felületet egyenletesen „mehintünk” (azonos méretű) homokszemekkel. Vélhetően az azonos nagyságú területekhez azonos számú homokszem fog tartozni³. Egy másik példa szerint, ami szintén arra a tényre épít, hogy ha területeket egyenletesen, összetételében homogén anyaggal „terítünk be”, akkor az anyagszükségletek egyenesen arányosak a területek nagyságával. Ezt a tapasztalatot laboratóriumi mérések kiértékelésekor, megfelelő számítási kapacitás hiányában korábban föl is használták. Ha a mérési eredmények ábrázolásával kapott görbét integrálni kellett⁴, akkor gyakran folyamodtak a „közelítő integrálás” egy meglehetősen szokatlannak tűnő, de kétségkívül leleményes és elég hatékony módjához. Miután a görbét milliméter-papíron ábrázolták, ollóval kivágták a meghatározandó T_x területet és egy egységnyi ($t_e = 1$) nagyságú darabot, vagy más, a keresett területtel

³Ezt a kőműves szakmunkás is fölhasználja, hiszen ki tudja számolni, hogy adott terület lebetonozásához (adott vastagságban) mennyi alapanyagra van szükség

⁴A határozott integrál geometriai jelentése a görbe alatti terület.

összemérhető nagyságú, ismert területet. A lehető legpontosabban lemérve a két papírdarab m_x és m_e tömegét, és feltételezve, hogy a papír anyagát tekintve homogén és egyenletes vastagságú, a kívánt T_x terület az alábbi arányosság alapján számítható:

$$\frac{T_x}{t_e} = \frac{m_x}{m_e}.$$

További tapasztalatszerzés céljából vizsgáljuk meg most szintén a 6.1 ábra képein az összes pontok n és az origó középpontú, egység sugarú körön belüli pontok k számának az arányát. A 6.3 táblázat az érdekesség kevéért a $\bar{\pi}$ oszlopban a $\frac{k}{n}$ hányados négyzeresének változását mutatja be.

A korábbi tapasztalat az volt, hogy a pontok száma az azonos nagyságú területeken közel azonos. Az összes pontok számát növelve, a két szám közelít egymáshoz. Ezt általánosíthatjuk is, miszerint az egy adott területre jutó pontok száma a terület növelésével növekszik. Tehát azonos valószínűséggel fog a következő véletlen pont a 6.1 ábrán az „ x ”-tengely alatt vagy fölött megjelenni, mivel a tengely a négyzetet két azonos területű téglalapra osztja. Jelölje P_{\odot} annak valószínűségét, hogy a pont a körben lesz, P_{\square} pedig azt, hogy a négyzeten belül. (Mivel az utóbbi a biztos esemény – hiszen csak ilyen pontokat generálunk – ezért $P_{\square} = 1$.)

A fentiek alapján a következő arányosság írható:

$$\frac{P_{\odot}}{P_{\square}} = \frac{t_{\odot}}{t_{\square}}.$$

A valószínűségek helyébe a relatív gyakoriságokat írva a két oldal közelítőleg fog megegyezni:

$$\frac{r_{\odot}}{r_{\square}} \approx \frac{t_{\odot}}{t_{\square}}.$$

Helyettesítsük most a relatív gyakoriságokat a definíciónak megfelelő törtekkel:

$$\frac{\frac{k}{n}}{\frac{n}{n}} \approx \frac{t_{\odot}}{t_{\square}}.$$

Egyszerűsítve a baloldalt az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{k}{n} \approx \frac{t_{\odot}}{t_{\square}}.$$

Tudjuk továbbá, hogy $t_{\odot} = \pi$, mert a kör sugara egységnyi, és $t_{\square} = 4$, hiszen a négyzet oldala a kör átmérőjével egyenlő, tehát

$$\frac{k}{n} \approx \frac{\pi}{4}.$$

Ennek az összefüggésnek a rendezéséből valóban az látható, hogy a körön belüli pontok relatív gyakoriságának négyzeresére π -hez közeli érték:

$$4r_{\odot} \approx \pi.$$

6.3. táblázat. π véletlen „közelítése”.

n : az összes pontok száma

k : a körön belüli pontok száma

$$\bar{\pi}: 4 \cdot \frac{k}{n}$$

$d_{\pi, \bar{\pi}}$: a $\bar{\pi}$ -nek π -től való abszolút százalékos eltérése

	k	$\tilde{\pi}$	
0	9	3,6	1
0	84	3,36	
0	808	3,232	
0	7 876	3,1504	
0	78 731	3,14924	

2.2. Egyenletestől eltérő eloszlású véletlenszámok

A korábbiakból tudjuk, hogy ha szabályos dobókockával dobásokat végzünk, azt egy egyenletes eloszlású, diszkrét valószínűségi változóval írhatjuk le. Ekkor bármely szám dobásának a valószínűsége $\frac{1}{6}$.

Könnyen belátható, hogy ha két kockával dobunk egyszerre, és a számok összegét tekintjük az adott dobás eredményének, akkor ilyen módon 2-től 12-ig tetszőleges egész számot kaphatunk. Tételezzük föl, hogy kezdetben mindkettő „1”-est mutat. Ekkor „2”-t dobtunk. Ezt követően ha az egyik kocka értéke változatlan marad, a másiké pedig egyesével változik „6”-ig, akkor az összegükként előállnak a további számok 3-tól 7-ig. Ezután, ha a másik növekszik egyesével, akkor 8-tól 12-ig egyesével a többi lehetséges összeg áll elő (6.4. táblázat X_i oszlopa).

6.4. táblázat. Két kocka dobása esetén kapott számok összege 2-től 12-ig változhat. Ugyanakkor a „7” hat féle módon, míg a „2” és a „12” csak egy módon állhat elő.

	2	3	4	5
-1	1+2	1+3	1+4	1+5
↗	↗	↗	↗	↗
-1	2+2	2+3	2+4	2+5
↗	↗	↗	↗	↗
-1	3+2	3+3	3+4	3+5
↗	↗	↗	↗	↗
-1	4+2	4+3	4+4	4+5
↗	↗	↗	↗	↗
-1	5+2	5+3	5+4	5+5
↗	↗	↗	↗	↗
-1	6+2	6+3	6+4	6+5

A 6.4. táblázatból az is jól látható, hogy az egyes értékek (2 és 12 között az egészek) több, különböző módon is előállnak. (A táblázat jelölése szerint tehát az aktuális X_i érték a_i különböző módon állhat elő.) Ezek az információk a 6.5. táblázatból szintén kiolvashatók, ahol a táblázat oszlopának illetve sorának a száma jelenti az egyik illetve a másik kockával dobott értéket. Ugyanakkor itt az is jól látható, hogy az összegek 36 különböző módon állhatnak elő, hiszen az egyik kockával dobott tetszőleges értékhez párosíthatjuk a másikkal dobott tetszőleges értéket.

Láthatjuk továbbá, hogy a táblázat főátlójában lévő összegek értéke rendre „7”. A főátlóval párhuzamosan haladva – függetlenül attól, hogy az első oszlop vagy az utolsó sor mely elemétől indulunk – az összegek egyenlőek, hiszen a „7” dobása hat különböző módon következhet be, míg „2”-t és „12”-t csak 1-1 féle módon dobhatunk.

Azt mondjuk, hogy az összes lehetséges 36 különböző összegből az a hat a „kedvező eset” (ha „7”-et szeretnénk dobni), amelyek a 6.4 táblázat 7. sorában illetve a 6.5 táblázat főátlójában található. Azt várjuk, hogy olyan szám dobásának nagyobb az esélye, amelynél nagyobb a kedvező esetek száma.

6.5. táblázat. A táblázat fejlécében és első oszlopában az egyik illetve a másik kockával dobható lehetséges értékek találhatóak.

.	2	3	4	5
-1	1+2	1+3	1+4	1+5
\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow
-1	2+2	2+3	2+4	2+5
\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow
-1	3+2	3+3	3+4	3+5
\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow
-1	4+2	4+3	4+4	4+5
\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow
-1	5+2	5+3	5+4	5+5
\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow
-1	6+2	6+3	6+4	6+5

6.6. táblázat. „Páros” kockadobás eredményének összesítése egy 10 000 elemből álló minta alapján

X_i : a kockadobás lehetséges eredménye

k_i : az i -edik lehetséges kimenetel gyakorisága

a_i : az X_i értékéhez tartozó kedvező esetek száma

r_i : az i -edik lehetséges kimenetel relatív gyakorisága

p_i : az i -edik lehetséges kimenetel valószínűsége

k_i	$\frac{k_i}{k_7}$	$\frac{a_i}{a_7}$	r_i	p_i
289	0,17389	$0,1666\bar{6} = \frac{1}{6}$	0,0289	$0,02\bar{7} =$
570	0,34296	$0,3333\bar{3} = \frac{2}{6}$	0,0570	$0,05\bar{5} =$
831	0,50000	$0,5 = \frac{3}{6}$	0,0831	$0,08\bar{3} =$
1 108	0,66667	$0,6666\bar{6} = \frac{4}{6}$	0,1108	$0,11\bar{1} =$
1 404	0,84477	$0,8333\bar{3} = \frac{5}{6}$	0,1404	$0,138 =$
1 662	1	$1,0 = \frac{6}{6}$	0,1662	$0,16\bar{6} =$
1 392	0,83755	$0,8333\bar{3} = \frac{5}{6}$	0,1392	$0,13\bar{3} =$
1 143	0,68773	$0,6666\bar{6} = \frac{4}{6}$	0,1143	$0,11\bar{1} =$
763	0,45909	$0,5 = \frac{3}{6}$	0,0763	$0,08\bar{3} =$
556	0,33454	$0,3333\bar{3} = \frac{2}{6}$	0,0556	$0,05\bar{5} =$
282	0,16968	$0,1666\bar{6} = \frac{1}{6}$	0,0282	$0,02\bar{7} =$

Mindezek azt is jelentik, hogy az így nyert véletlenszámok már nem lesznek egyenletes eloszlásúak.

Korábban gondolhattuk volna, hogy a 6.1 ábra pontjainak koordinátáit a

$$2v - 1$$

kifejezés mellőzésével, másként is előállíthattuk volna, hiszen teljesül, hogy

$$0 \leq v_1 + v_1 < 2$$

(ha v_1 és $v_2 \in [0; 1)$). Ezt követően minden így előállt értékből 1-et kivonva teljesül, hogy

$$-1 \leq v_1 + v_2 - 1 < 1.$$

Ezek a véletlen-pontok is valóban ugyanabba a tartományba esnének, de megfelelkeznenek a valószínűségi változó egy nagyon fontos jellemzőjéről, az eloszlásról. Ezt az eloszlásban jelentkező különbséget szemlélteti a 6.2 ábra, ahol az első képen a pontok koordinátáit egy-egy véletlenszámból állítottuk elő, a többi esetben pedig rendre 2, 4 és 8 véletlenszám összegét használtuk föl az egyes koordináták előállításához.

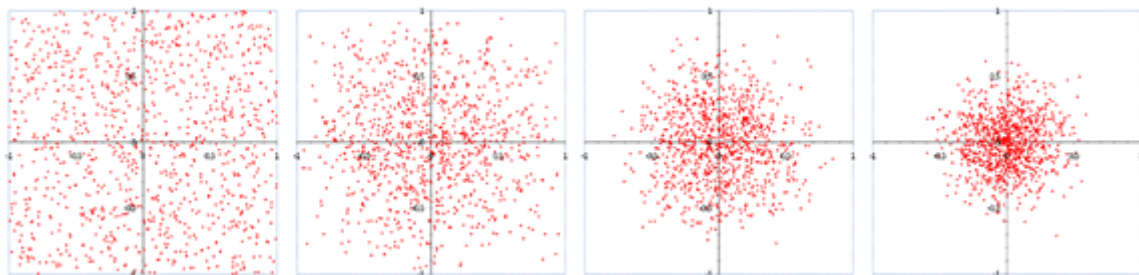
Természetesen az ilyen eloszlású véletlen pontok már nem volnának alkalmasak a π korábban bemutatott „közelítésére” sem. Ugyanakkor találtunk egy „módszert” arra, hogy egyenletes eloszlású véletlenszámok fölhasználásával más eloszlás számait állítsuk elő. Az ábra pontjainak viselkedésére a valószínűségszámítás egyik fontos tétele, a *központi határeloszlás tétele*⁵ ad magyarázatot, amely lehetővé teszi többek között a természetben lejátszódó tömegjelenségek értelmezését is. Ugyanez a tétel igazolja, hogy a

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^n v_i - \frac{n}{2} \right)$$

összefüggés alkalmas közel normális eloszlású \hat{v} véletlenszámok előállítására (ahol $5 \leq n \leq 12$ egész, $v_i \in [0; 1)$ és egyenletes eloszlású).

6.2. ábra. Az ábra képein minden esetben 1000-1000 pontot helyeztünk el, de a koordinátákat rendre 1, 2, 4 illetve 8 véletlenszám fölhasználásával állítottuk elő.

⁵Ha elegendően nagy számú (lényegében tetszőleges eloszlású) véletlen hatást „összegzünk”, akkor normális eloszlást kapunk



A 6.6 táblázat utolsó oszlopából kiolvasható, hogy az egyes X_i értékek milyen valószínűséggel következhetnek be. A táblázatból az is jól látható, hogy az egyes események valószínűsége annyiszor $\frac{1}{3}$, ahány kedvező eset tartozik az adott értékhez. Ez azonban azt jelenti, hogy ha a kockákat megkülönböztetjük, azaz velük rendezett számpárok előállítására volna a célunk, akkor egy olyan egyenletes eloszlást valószínűsítanánk meg, amelyben minden számpár dobásának a valószínűsége $\frac{1}{36}$. A geometriai valószínűség kapcsán említettük, hogy az azonos mértékekhez (hossz, terület, stb.) azonos valószínűség tartozik. Osszuk föl tehát a $[0; 1)$ intervallumot 36 egyenlő részre és rendeljük minden részintervallumhoz pontosan egy számpárt. A számpárok (egyenletes eloszlású) véletlen sorsolásához ezek után elegendő a $[0; 1)$ intervallumba eső egyenletes eloszlású véletlenszámokat előállítani, és csak azt kell megnéznünk, hogy az adott részintervallumot – amelybe az aktuális véletlenszám esik – milyen rendezett számpárral „címkéztük föl” korábban.

Ha most összevonjuk azokat a részintervallumokat amelyekhez tartozó számpárok összege egyenlő, és az így nyert részintervallumokhoz a számpárok elemeinek összegét rendeljük, akkor olyan véletlenszám-generátorhoz jutunk, amellyel a korábban említett „páros”-kockadobás szimulációja végezhető.

Természetesen ezt az eljárást általánosíthatjuk is. Ha tehát valamely diszkrét eloszlásnak megfelelő véletlenszámokat szeretnénk előállítani, akkor rendeljük minden eseményhez a $[0; 1)$ intervallumnak egy olyan részintervallumát, amelynek hossza megegyezik az adott esemény valószínűségével. A most leírt *dominószabály* alapján tehát a szabályos kockadobáshoz a $[0; 1)$ intervallumot 6 egyenlő részre kell felosztanunk. (Természetesen ennek a felosztásnak a megfelelő módosításával egy „cinkelt” kocka szimulációja is megvalósítható.)

Tetszőleges, folytonos eloszlású véletlenszám előállításához meg kell említenünk az *eloszlásfüggvény* fogalmát. Legyen X egy folytonos eloszlású valószínűségi változó.

Az X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye az értelmezési tartományának (X által felvehető értékek halmazának) minden x eleméhez hozzárendeli annak valószínűségét, hogy $X < x$. Mivel valószínűséget rendel az értelmezési tartományának az elemeihez, ezért

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

teljesül minden olyan x -re, amelyet az X valószínűségi változó szolgáltathat.

Tejesül továbbá, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény monoton növekvő (azaz $\forall x_1 < x_2$ esetén $F(x_1) < F(x_2)$, ha x_1 és x_2 az értelmezési tartomány elemei).

Például az

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

a λ paraméterű ($\lambda > 0$) exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye ($x > 0$). Ennek inverz függvénye

$$F^{-1}(y) = \frac{-\ln(1 - y)}{\lambda}$$

alakban állítható elő. Az eloszlásfüggvény tulajdonsága alapján ennek értelmezési tartománya a $[0; 1]$ lesz. Ha ezek után ebbe a függvénybe egyenletes eloszlású ($[0; 1)$ -intervallumba eső) véletlenszámokat helyettesítünk, akkor λ paraméterű, exponenciális eloszlású véletlenszámokat fogunk kapni.

3. Véletlenszámok a szimulációkban

Talán az első, a későbbiek során tudományosan is vizsgált és napjainkban is nagy jelentőséggel bíró véletlen jelenség a Brown-mozgás volt. Elnevezése felfedezője, Robert Brown angol botanikus emlékéét őrzi, aki a vízben elkevert virágporszemcsék vizsgálata során figyelt föl rá a XIX. században. A jelenség – Einstein későbbi magyarázata szerint – azért következik be, mert az oldószer molekulái állandó hőmozgásuk révén a folyadékban eloszlott apró szilárd részecskéket véletlenszerűen „ide-oda lökdösik”. A jelenséget az anyag atomos szerkezetének bizonyítékaként tekintjük.

3.1. Brown-mozgás

Bár a jelenség maga már jóval korábban ismert volt, precíz matematikai leírása a XX. század első felében történt csak meg és Norbert Wiener nevéhez fűződik. Munkássága máig fontos szerepet játszik a sztochasztikus folyamatok elméletében.

A Wiener-folyamat az egy részecske (véletlen) pályáját leíró legjobb matematikai modell. Ennek legegyszerűsége 2D-s realizációit mutatja a 6.3 és a 6.4 ábra. Mindkét esetben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel döntjük el, hogy a „részecske” új pozíciójának koordinátáit az előzőből annak eggyel való növelésével vagy csökkentésével nyerjük. Tehát ha a részecske előzőleg a $P_i(x_i; y_i)$ pontban volt, akkor a következő pozíciója az alábbi pozíciók egyike lehet:

$$P_{i+1}(x_i - 1; y_i - 1)$$

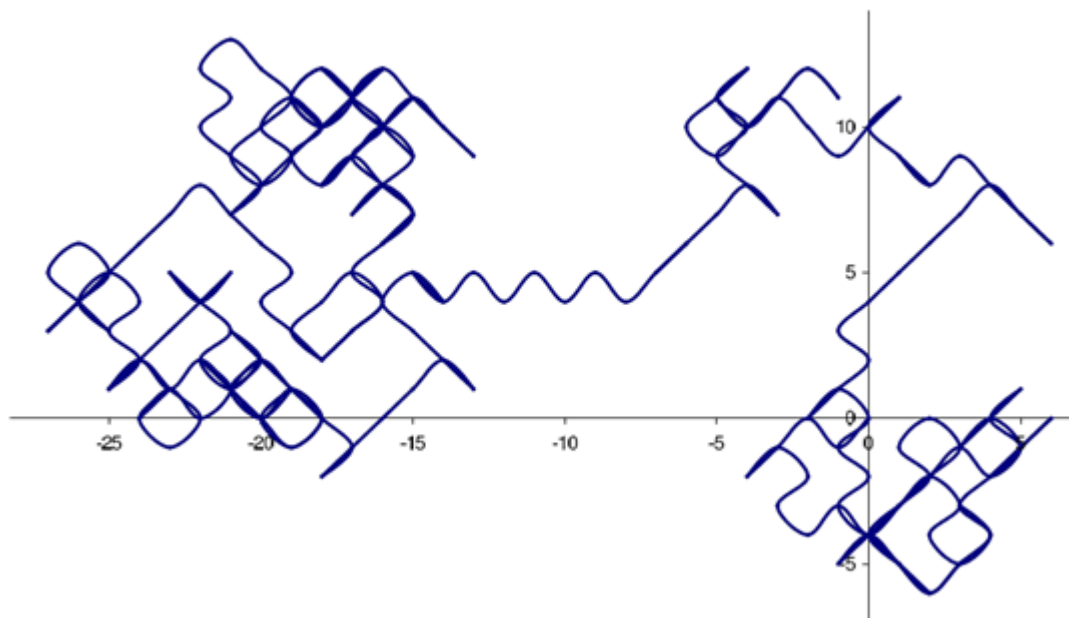
$$P_{i+1}(x_i + 1; y_i - 1)$$

$$P_{i+1}(x_i + 1; y_i + 1)$$

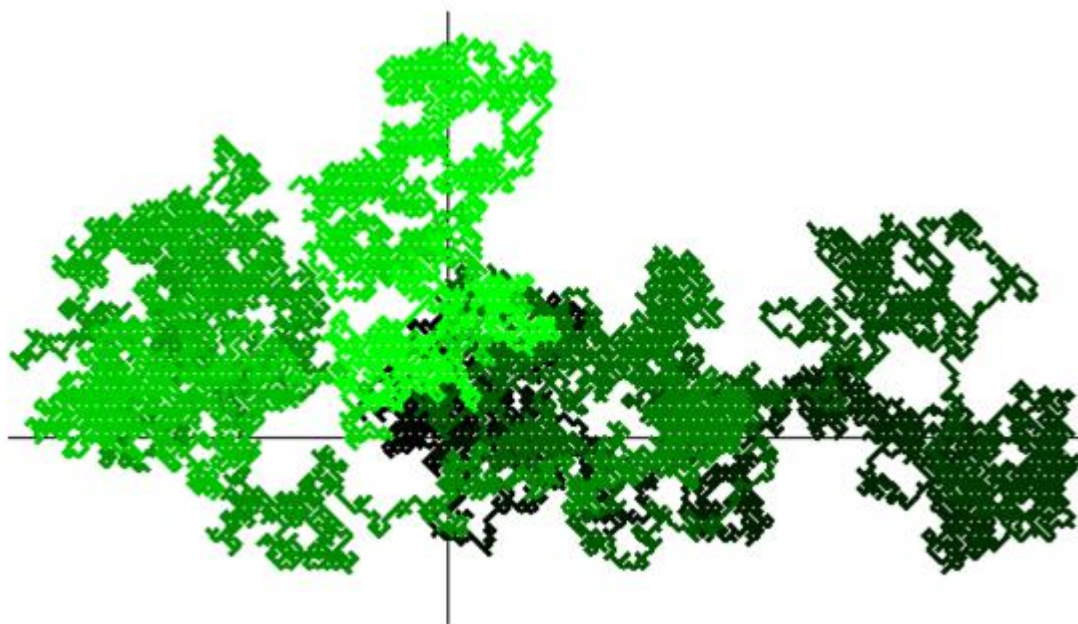
$$P_{i+1}(x_i - 1; y_i + 1)$$

A fentiek alapján a relatív elmozdulásvektor $\vec{v}(\pm 1; \pm 1)$ lehet.

6.3. ábra. Brown-mozgás szimulációja táblázatkezelővel.



6.4. ábra. A Brown-mozgás szimulációja során a szín mélysége jelzi a bolyongás időbeliségét.



3.2. Darázs-modellek

A darázs-modell a legegyszerűbb gondolat kísérlet a gázrészecskék térbeli eloszlásának szemléltetésére. A kísérletben rendelkezésünkre áll két doboz (A és B) és n darab részecske (darázs), amelyek egyediek, tehát meg tudjuk őket különböztetni. Kezdetben legyen minden részecske az A dobozban. A szimuláció során véletlenszerűen kiválasztott részecskét (ez lehetséges, mert megkülönböztethetők) egyszerűen áthelyezzük a másik dobozba. A műveletet kellően sokszor ismételve azt fogjuk tapasztalni, hogy az egyes dobozokban a részecskék száma közel azonos lesz.

A modell egy lehetséges adat-reprezentációja sem bonyolult. Kezdetben egy n elemű D-vektor elemeinek adjunk értékül 1-et. (A vektor egy eleme egy részecskének felel meg. Az egyes elemek az indexük segítségével megkülönböztethetők. Az elem értéke jelölje, hogy az adott részecske mely dobozban van.) A szimuláció során a véletlenszerűen kiválasztott elem értékét a

$$D[v] := -D[v]$$

értékadással módosíthatjuk (Ahol v a D-vektor indexhatárainak megfelelő véletlen érték).

Könnyen látható, hogy $n = 1$ esetén olyan 1D-s Wiener-bolyongásról van szó, amikor erősen lekorlátoztuk a részecskék „mozgásterét”.

A darázs-modell egy általánosítását kaphatjuk, ha növeljük a dobozok számát, és minden doboznak legfeljebb két szomszédja lehet. Kezdetben ekkor is legyen az összes részecske az egyik dobozban. A szimuláció során a véletlenszerűen kiválasztott részecskét helyezzük át az egyik, véletlenszerűen kisorsolt szomszédos dobozba. Könnyen látható, hogy ez n részecskének szintén 1D-s Wiener-bolyongása, bár a mozgásteret némileg kibővítettük. (További általánosítási lehetőséget jelentene a modell értelmezése 2D esetére, ami a fentieket tovább gondolva könnyen elvégezhető.)

3.3. Sztochasztikus differenciál-egyenlet

A Wiener-folyamatok alkalmazásának lehetőségei azonban ennél jóval szerteágazóbbak. A legkülönbözőbb területeken (pénzügyi, ökológiai) alkalmazzák sztochasztikus szimulációk megvalósítására

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (6.1)$$

általános formában megadható sztochasztikus differenciál-egyenletekben (ahol $W(t)$ a Wiener-folyamatot jelenti, pedig f -nek és g -nek valamilyen, a rendszerre jellemző függvénye, ami egyszerűbb esetben konstans is lehet).

A fenti 6.1 egyenlet a

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t))$$

differenciálegyenletből származtatható. A szimulációhoz az Euler-módszer ebben az esetben is alkalmazható, ami a korábbi jelölésekkel

$$x_i = x_{i-1} + f(t_{i-1}, x_{i-1})h + g(t_{i-1}, x_{i-1})\Delta W \quad (6.2)$$

formában adható meg. Ha ezt a formulát összevetjük az 5.1 összefüggéssel, jól látható, hogy az Euler-módszerrel számított értéket lényegében „elrontjuk” a $g(t_{i-1}, x_{i-1})\Delta W$ szorzattal, amelyben ΔW egy véletlen tag, g pedig egy hozzá tartozó súly, ami függhet a rendszer aktuális állapotától.

7. fejezet - Segédeszközök a szimulációkhoz

Célunk, hogy bár a teljesség igénye nélkül, de mégis számba vegyünk néhány olyan szoftvert, amelyeket eredményesen alkalmazhatunk saját szimulációk készítésére és bemutatására. Bár napjainkra különböző forrásokból nagyon sok „előre gyártott” szimulációs program szerezhető be, a tanár, az oktató által készített fejlesztésben mindig ott van annak a lehetősége, hogy azt egyedileg szabjuk a téma feldolgozásának módjához, a célközönséghez és nem utolsósorban az ismeret közvetítőjéhez. További előnyt jelent, ha olyan lehetőséget találunk, amely révén a hallgatók, a tanulók maguk is részesei lehetnek egy szimuláció létrehozásának, hiszen így nem csak a modellel kapcsolatos ismereteket mélyíthetjük el jobban, de a fejlesztéshez fölhasznált szoftver jobb megismerését is lehetővé teszi.

Természetesen nem mondhatjuk azt, hogy egyetlen szoftver-eszköz megoldást jelenthet minden számítógépes szimuláció megvalósítására. Ugyanakkor nem is kényszerülünk erre, hiszen napjainkra a legkülönbözőbb lehetőségek közül válogathatunk, illetve különféle eszközök érhetők el viszonylag könnyen. Milyen elvárásoknak is kell megfelelnie egy szoftvernek, hogy valóban alkalmas legyen a fenti feladat betöltésére? Ennek bemutatására egy három elemű szempontrendszert adhatunk meg.

1.

Matematikai eszkörendszer. Mivel szimulációink alapja minden esetben valamely matematikai modell, ezért elengedhetetlen, hogy az adott szoftver „ismerje” azokat a matematikai műveleteket, amelyek leírják a modellezett jelenséget illetve rendszert, és mindez viszonylag egyszerűen legyen elérhető a szimuláció megvalósításához.

2.

Megjelenítés. Az oktatási céllal készült szimulációk esetében nagy hangsúlyt kell fektetnünk a modellt leíró matematikai összefüggések és a szimuláció eredményének esetleg több módon történő szemléletes bemutatására. Ezért a választott programnak lehetőséget kell biztosítania a modell állapotát leíró függvénykapcsolatok szemléletes megjelenítésére, esetleg animált formában is.

3.

A szoftver elérhetősége. Előnyben részesíthetjük azokat a szoftvereket, amelyeket más területről már ismerünk, de az előző két feltételnek való megfelelésük alkalmassá tesznek a szimuláció terén való alkalmazásra is. Ez a megoldás általában sem anyagi, sem időbeli többletráfordítást nem igényel. (Ilyenek lehetnek a táblázatkezelők, hiszen a legkülönbözőbb területeken dolgozunk velük, használatuk napjainkban általában nem okoz gondot. Egy másik, ebbe a kategóriába tartozó program a GeoGebra, hiszen matematikai problémák szemléletes bemutatására elterjedten használják.)

Napjainkra már a legtöbb szoftvernek elérhető a megfelelője a szabad szoftverek között. Bizonyos esetekben ezek alkalmazása jelenthet megoldást, ami ugyan egy új szoftver megismerését jelenti, de ingyenesen használhatók. (A téma szempontjából elsősorban a Maple és a Mathematica professzionális számítógép-algebrai rendszerek kiváltására alkalmas, olyan szabad szoftverekre gondolunk, mint például a Maxima vagy a Sage.)

Természetesen foglalkoznunk kell azzal is, hogy a korábbi ismeretek alkalmazására milyen lehetőségek kínálóznak. Ennek megfelelően a fejezetben bemutatunk az aktuális szoftverrel készült konkrét szimulációkat is.

1. Táblázatkezelők

A táblázatkezelők ilyen céllal történő alkalmazásának kétségtelen előnyei, hogy a szoftver beszerzése, valamint használata általában nem jelent problémát, és alap szintű alkalmazása nem igényel programozási ismereteket, ugyanakkor egyszerű lehetőséget biztosítanak a modellezéshez, a szimulációhoz és a közelítő módszerekhez kapcsolódó ismeretek szemléltetéséhez.

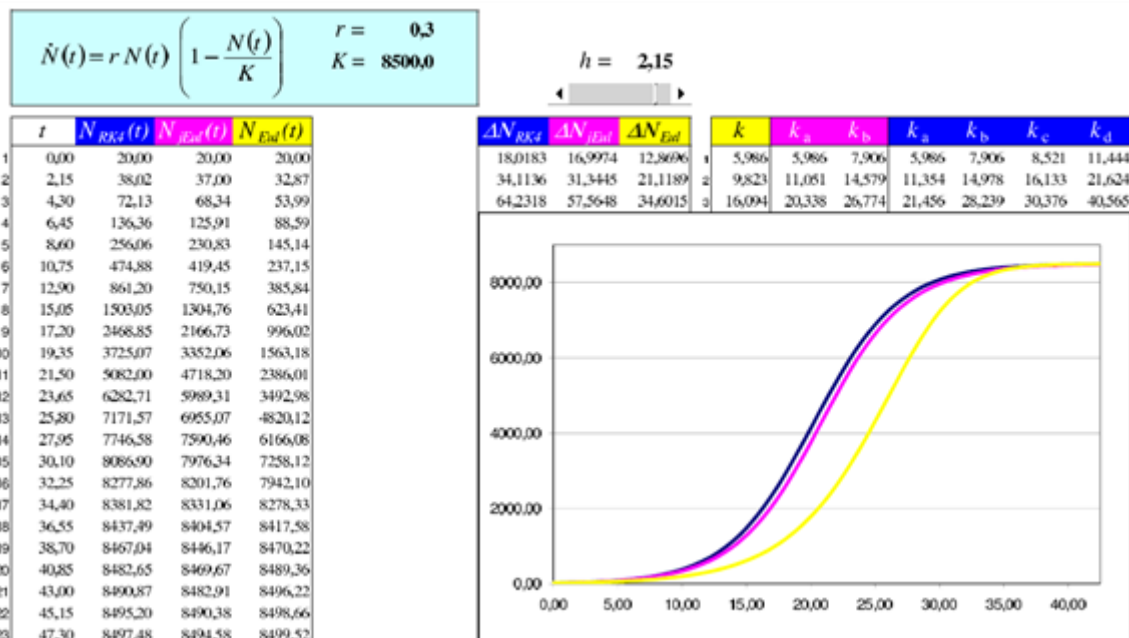
Ezeknek az alkalmazásoknak a megismerése az iskolai tananyag részét képezik, ami azt is jelenti, hogy minden oktatási intézményben hozzáférhető lehetőségről van szó. Ez vitathatatlan előnyt jelent, hiszen diák, tanár, hallgató és oktató számára egyaránt ismert. Bár tudományos célú szimulációt nem tesznek lehetővé, de oktatási céllal nagyon sok esetben eredményesen alkalmazhatóak.

Rendelkezésre állnak benne többségében a szükséges matematikai eszközök beépített függvények formájában, alkalmas sok matematikai összefüggés leírására a képletszerkesztő segítségével és nem utolsó sorban a szimuláció eredménye grafikus formában megjeleníthető¹.

Használatához alapvetően programozási ismeretre nincs szükség, ugyanakkor csúszkák használatával a szimulációk jelentős része dinamikussá tehető. Egyszerűbb modellek esetében akkor is eredményesen alkalmazható, ha a modellezés során közelítő számításokat kell végezni.

A táblázatkezelők alkalmazását tehát föltétlen célszerű megfontolni, hiszen általa „ismerős” környezetben végezhetjük a szimulációt, tehát valószínűleg a tanulók is könnyebben bevonhatók lesznek az azzal kapcsolatos munkába, hiszen nem kell új alkalmazás használatát megtanulniuk. Arról nem beszélve, hogy miért is „mozgósítanánk nagyobb erőket”, ha ez is megfelel – miért lőnénk verébre ágyúval?

7.1. ábra. Logisztikus növekedést leíró differenciálegyenlet közelítő megoldása táblázatkezelővel.



Az Excel-tábla, amely alapján logisztikus növekedést leíró differenciálegyenlet (4.4) közelítő megoldását bemutató a 7.1. ábra készült, csupán a program alapvető lehetőségeire építve létrehozható. A táblázatkezelő segítségével megjeleníthető a differenciálegyenlet, valamint a három különböző eljárással (Euler-, javított Euler- és a Runge–Kutta-módszer) végzett közelítések numerikus értékei, és azok grafikonnal való szemléltetése.

A táblázat képleteihez az (5.1), az (5.2) és az (5.3) összefüggések szolgáltak alapul. A megvalósításhoz szükséges ismeretek (képletek írása, különböző cella-hivatkozások, diagramok készítése) alapvetőnek számítanak, tehát ez nem jelentheti akadályt annak, hogy a tanulók akár önállóan, vagy a modell jellegétől, és a szükséges matematikai ismeretek mélységétől függően több-kevesebb tanári segítséggel ilyen problémákat tanulmányozzanak, illetve feladatokat oldjanak meg. Például a k -értékek számításához az alábbihoz hasonló képletekre van szükség, amely az ábrán is látható differenciálegyenlet és az 5.1 összefüggés alapján írható:

$$=r*E7*(1-E7/K)$$

(ahol E7 az aktuális cellával egy sorban lévő $N_{Eul}(t)$ értéket jelenti, r és K pedig adott paraméterek.)

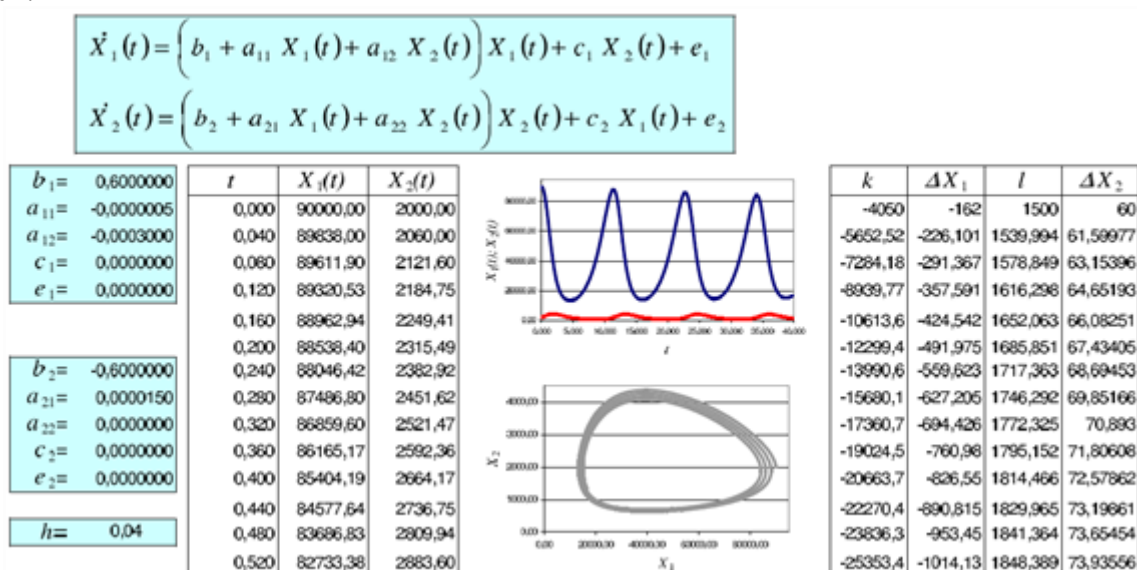
¹Meg kell említenünk, hogy táblázatkezelő segítségével készültek az alábbi ábrák is: 6.1, 6.2, 6.3

Az ábrán látható csúszka segítségével változtathatjuk a közelítő számítás h lépésközét, amellyel bemutatható, hogy értékének megválasztása milyen hatással van a közelítések pontosságára az egyes módszerek esetében. Természetesen a táblázatkezelőben egy másik csúszka segítségével lehetőség volna a rendszer és paramétereinek változtatására is. Ebben az esetben már a rendszer „viselkedésével” kapcsolatban vonhatnánk le következtetéseket.

Az előzőtől összetettebb feladat megoldását mutatja be a 7.2 ábra, amely a 4.1 modell fölhasználásával készült. A paraméterek magválasztása a zsákmány-ragadozó rendszer modelljét eredményezte, de ez az egyszerű táblázat lehetővé teszi a 4. fejezetben tárgyalt további rendszerek bemutatását is.

Bár ebben a szimulációban a matematikai modell egy differenciálegyenlet-rendszer volt, a táblázat celláiba írandó képletek akár középiskolai táblázatkezelői ismeretek alapján is elvégezhetők.

7.2. ábra. Az egyenletrendszer megfelelő paraméterezése a zsákmány-ragadozó modell eredményezi.



2. GeoGebra

A GeoGebra sajátos helyet foglal el a számítógépes szimuláció terén hatékonyan alkalmazható programos sorában. A GeoGebra egy olyan matematikai szoftver, amelyet alapvetően a középiskolai matematikaoktatás hatékonyabbá tételének érdekében kezdett fejleszteni Markus Hohenwarter a Salzburgi Egyetemen. Hamarosan azonban olyan színvonalas programmá fejlődött, hogy eredményesen alkalmazható az oktatás csaknem minden szintjén (bele értve a felsőoktatást is), és más tudományterületekhez sorolt jelenségek bemutatásában is hasznos segítség lehet. A fejlesztők mindezt úgy érték el, hogy közben a program könnyen kezelhető maradt. Ez elsősorban a világos, logikusan kialakított, könnyen átlátható felületnek és alapvetően annak az alapgondolatnak köszönhető, amely motiválta a szoftver létrehozóját.

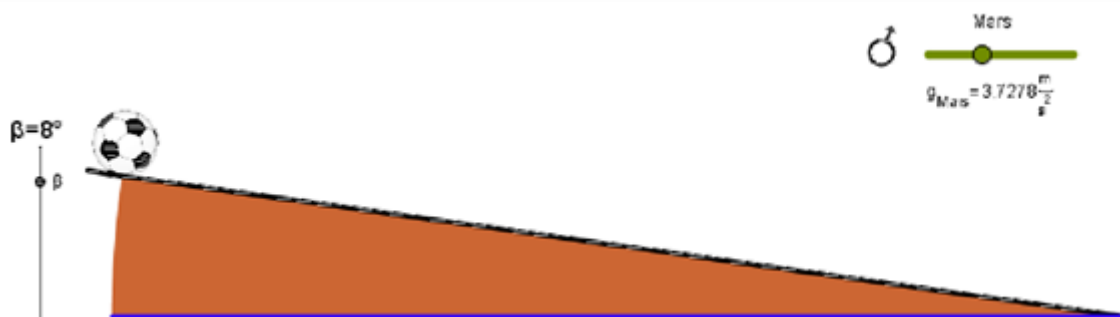
Elnevezése a geometria és az algebra szavak összevonásából született. Ez a névválasztás jól tükrözi a program alapfilozófiáját: a vizuálisan is megjeleníthető geometriai objektumok (pontok, vektorok, szakaszok, egyenesek, kúpszeletek, paraméteres és függvénygörbék) megadhatók szemléletesen a geometriánézetben, amelyek alapján generálódik azok matematikai leírása, és fordítva, ha az algebranézetben adjuk meg például egy pont koordinátáit, vagy akár egy görbe paraméteres egyenletrendszerét, akkor ennek megfelelően megjelenik azok képe a geometriánézetben is. Ez azt jelenti, hogy attól függetlenül, hogy milyen módon vittünk föl egy alakzatot, annak mindkét ablakban megtalálható a megfelelő leírása.

Természetesen az egyszerűbb alakzatokból összetettebbek építhetők föl, ami lehetővé teszi különböző bonyolultságú objektumok megadását, amelyek a nem föltétlen matematika tárgyú modellezést is segítik. Az egyszerűbb alakzatok két csoportba sorolhatók. A szabad alakzatok esetében azok jellemzőit úgy állítjuk be, hogy a beállításokhoz más, korábban megadott objektumokat nem használunk föl. Ezzel szemben a függő alakzatok létrehozásakor fölhasználjuk a korábban létrehozott alakzatokat. Ennek köszönhetőn válik dinamikussá és egyben interaktívvá az a rendszer, amit a GeoGebra segítségével létrehozunk, hiszen, ha megváltoztatjuk valamely szabad alakzatunkat, az hatással van arra a függő alakzatra, amelynek a definíciójában

azt fölhasználtuk. Fontos továbbá megemlítenünk azt a lehetőséget, hogy a GeoGebrával készült modellek egyszerűen publikálhatók az Interneten, amivel lehetővé válik az általunk fejlesztett modell távoli és tanórán kívüli elérése is.

Föltétlen említésre méltó a GeoGebra esetében az, hogy lehetőségünk van a szimulációkat színesíteni képek fölhelyezésével, amelyekkel különböző transzformációk is elvégezhetők. Ezzel a szimulációk nem csak tetszetősebbek, de bizonyos értelemben „valóságosabbak” is lesznek általa, de legalábbis több tanuló figyelmét leszünk képesek a témára irányítani és lehetőségünk lesz annak a folyamatnak a bemutatására is, amely során a valóságos objektumokból a modell béli megfelelői lesznek, például egy mozgó testből tömegpont, vagy a mozgás pályájából mondjuk egy egyenes szakasz.

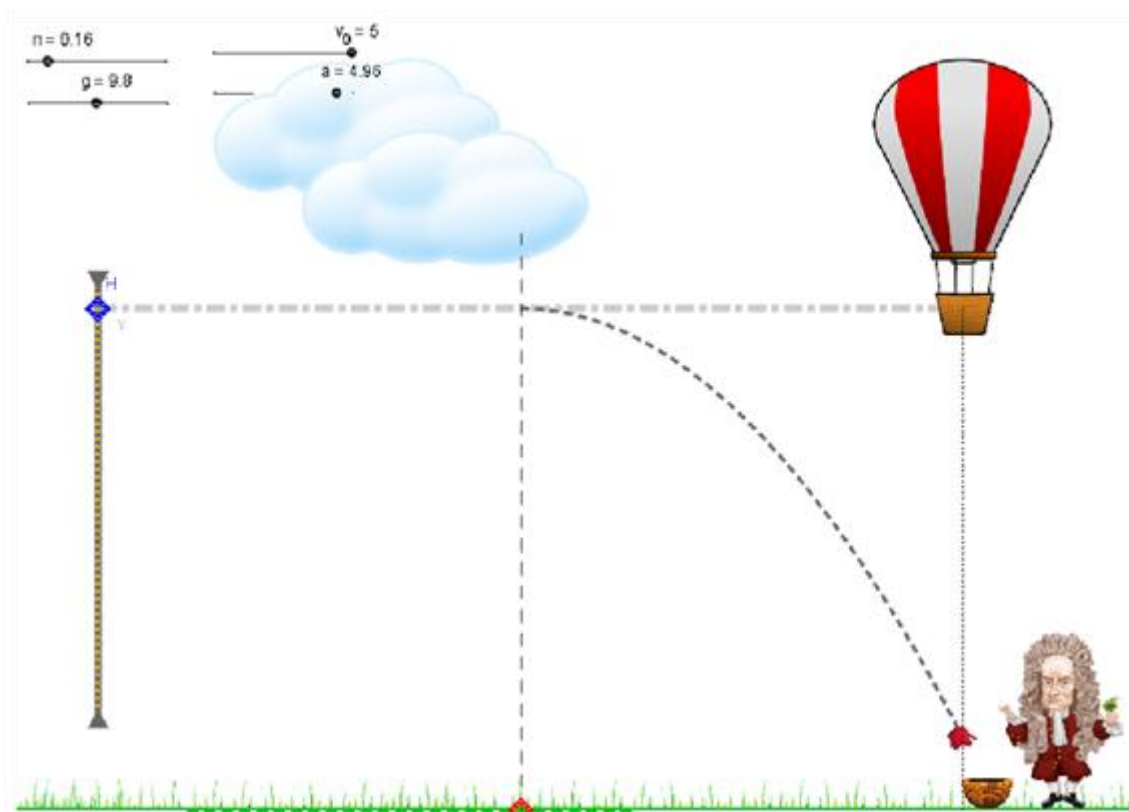
7.3. ábra. Egy állítható hajlásszögű lejtőn legördülő labda szimulációja.



A továbbiakban a fent említettek megerősítésére mutatunk be néhány egyszerű példát. A 7.3 ábra olyan szimulációt mutat be, amellyel egy állítható hajlásszögű lejtőn legördülő labda viselkedését vizsgálhatjuk, különböző gravitációs gyorsulás mellett. (Az ábra szerint a kísérletet a Marson végezzük.)

A 7.4 ábrán bemutatott szimulációval azt vizsgálhatjuk, hogy az általunk választott repülési magasság esetén, az egyenes sebességgel haladó ballon gondolájából hol kell kipottyanítani az almát, hogy az Newton kosarába essen. Mivel a szimulációban változtathatjuk a ballon repülési magassága mellett annak sebességét és a gravitációs gyorsulást is, így tanulmányozhatjuk ezeknek a kidobott test pályájára gyakorolt hatását is.

7.4. ábra. Vízszintes hajtás szimulációja GeoGebra segítségével.



A ferde hajítás szimulációját bemutató 7.5 ábra szintén tartalmaz néhány képi elemet. Ezeknek a megjelenése illetve elrejtése egy jelölő négyzet segítségével megoldható. A szimuláció bemutatásakor célszerű engedélyezni ezeket a képi elemeket, hogy a szemlélő tudatában a jelenség jobban kötődhessen a valóságos jelenséghez. Később – amikor a rendszer belső összefüggéseit tanulmányozzuk a szimuláció segítségével – azonban ezek elrejtése mellett, az összefüggések jobb megértése érdekében szükséges engedélyezni a röppályát és például a mozgó testre ható erőket jelölő vektorokat.

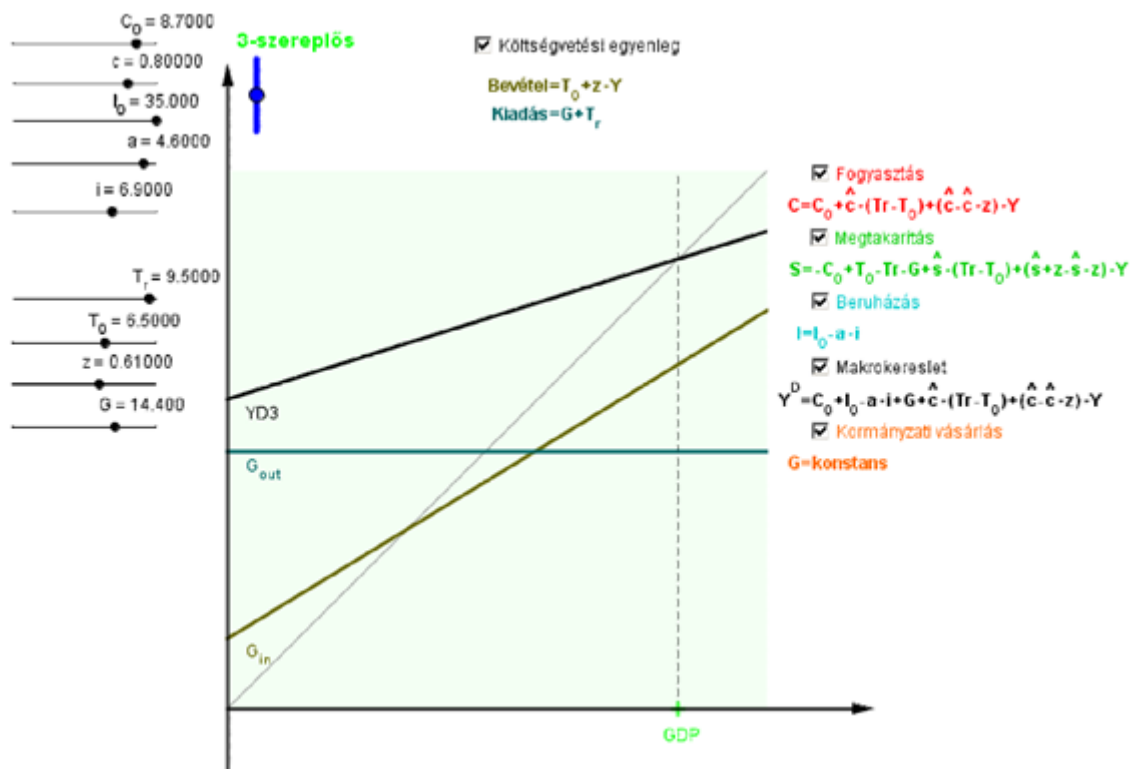
7.5. ábra. Vízszintes hajítás szimulációja GeoGebra segítségével.



A természeti változásokat irányító összefüggések ismerete mellett a gazdaság jelenségeinek megismerése is fontos, hiszen mindennapjainkat ezek egyre jobban meghatározzák, ugyanakkor az ezekkel kapcsolatos, a tanulók felé közvetített ismeretek aránya alatta marad annak, ami biztosíthatná az eligazodást a mindennapok gazdasági történései között.

GeoGebra segítségével ilyen jellegű szimulációk is megvalósíthatók. A 7.6 ábra a 3-szereplős makrogazdasági modell tanulmányozására alkalmas szimulációt mutat be.

7.6. ábra. 3-szereplős makrogazdasági modell.



3. Számítógép-algebrai rendszerek

Ha az előzőekben említett szoftverek az oktatási célú számítógépes szimulációk könnyűlovassága, akkor a számítógép-algebrai rendszerek valódi „nagyágyúnak” számítanak, hiszen a segítségükkel az előzőleg említett eszközökhöz képest többek között jóval nagyobb számítási pontosság érhető el.

A hetvenes évek elejére tehető az az időszak (azaz 4 évtizeddel korábban), amikor megjelentek az első szimbolikus számításokat végző számítógépes rendszerek. Ezek általában valamely konkrét tudományterülethez – kvantummechanika, algebra, stb. – kapcsolódó problémák megoldásának támogatására jöttek létre. Sikerülnek, és nem utolsó sorban a rendelkezésre álló egyre nagyobb számítási kapacitásnak köszönhetően merült föl az a természetes igény, olyan rendszerek iránt, amelyek már nem csak egy szűk terület problémáinak megfogalmazásához és megoldásához kínáltak segítséget, hanem – ahogyan maga a matematika tudománya is – tudományterülettől függetlenül, általános céllal alkalmazható tudományos problémák megoldásában. Tehát a számítógép-algebrai rendszerek alkalmazásának egyik – talán legfontosabb – alkalmazási területe a tudományos kutatás. Ennél fogva természetesen jóval komolyabb matematikai eszközrendszert biztosít felhasználója számára, mint amit az oktatási célú szimulációk igényelnek. Szerencsére a tudományos élettől sem idegen az eredmények szemléletes megjelenítésének igénye², ezért ezek a szoftverek általában ebből a szempontból is megfelelnek az oktatási célú szimulációk követelményeinek. Ugyanakkor jellegüknél fogva lényegesen nagyobb komplexitású rendszerekről lévén szó, valóban mély megismerésük lényegesen hosszabb időt igényel, mint amennyire az előzőekben említett programok eredményes alkalmazásához szükséges. Természetesen a befektetett energia hosszú távon itt is megtérül, hiszen egy lényegesen „pontosabb” eszköz birtokába jutunk a használatuk során, nem beszélve arról, hogy a középiskolában szükséges szimulációk megvalósításához általában messze nincs szükség a szoftver korábban említett mély megismerésére. A legfontosabb általános elvek és néhány fontosabb lehetőség ismerete – a függvényábrázolás, az egyenletmegoldás esetleg a differenciálegyenletek megoldása témaköréből – általában elegendő az ezen a területen történő eredményes használatához.

Ismertségüknél fogva föltétlenül meg kell említenünk a Maple rendszert, amelynek fejlesztését a kanadai Waterloo Egyetemen kezdték hozzávetőlegesen 10 évvel az első szimbolikus számításokat segítő programok megjelenése után, és a Wolfram Research Institute által létrehozott Mathematica programot.

²A jegyzet ábráinak jelentős része két ilyen, az alábbiakban majd említésre kerülő rendszer (Maple és Mathematica) segítségével készült.

Természetesen ezeknek a szoftvereknek is van megfelelőjük a nyílt forráskódú programok között. Ezek közül két kiemelkedőt, a Sage-et és a Maxima-t föltétlenül meg kell említenünk.

8. fejezet - Modellezési és szimulációs példák

„A Természet nagy könyve csak azok előtt áll nyitva, akik ismerik a nyelvet, amelyen írva van: a matematika nyelvét.”

Galileo Galilei

A fejezet célja, hogy bemutassa a dolgozatban tárgyalt eredmények további, néhány lehetséges oktatási alkalmazását. A témával kapcsolatosan nehéz feladat teljességre törekedni a terjedelem korlátai miatt, de hiányos lenne ez a dolgozat, ha nem tennénk említést néhány konkrét számítógépes megvalósításról. Ezért ezek bemutatására is itt kerül sor. A korábbiakban a matematikai modellezés és a számítógépes szimuláció – mint a természettudományos tárgyak oktatásában hatékonyan használható eszköz – alkalmazási lehetőségeit vizsgáltuk meg. Az eddigiek az alábbi három fő gondolatkörbe sorolhatók.

Elsőként a kísérleti mérések néhány lehetséges alternatíváját mutattuk be konkrét példákon keresztül, amelyek alapjául szolgálhatnak a matematikai modell fölállításához szükséges adatgyűjtésnek. Ezt követően a megismert jelenségekre és mérési módszerre építve megalkottuk matematikai modelljeiket.

Egy későbbi fejezetben, számítógépes szimuláció céljából megadtunk egy differenciálegyenlet-rendszert, és bemutattunk néhány klasszikusnak mondható, ismert alkalmazási lehetőségét.

Végül, a differenciálegyenletek kezeléséhez, azok néhány numerikus megoldási lehetőségének bemutatásával szerettünk volna hozzájárulni.

1. További jelenségek

A fejezetben szereplő néhány példa a (4.1) egyenletrendszer további alkalmazási lehetőségeire szeretne rávilágítani. Természetesen csak az lehetett cél, hogy nagyobb hangsúlyt kapjon a matematikai modell szintetizáló szerepe. Ezt a bekezdést tekinthetjük egyféle feladatgyűjteménynek is, ahol az egyes „feladatok” megoldását az jelenti, hogy megadjuk a (4.1) egyenletrendszer olyan paraméterezését, amely által az az adott jelenség modelljévé válik.

1.1. Testek hűlése

Egy test T_0 C₀ hőmérsékletről T_k C₀-os környezeti hőmérséklet mellett kezd el hűlni. A test hőmérsékletének időfüggését a

$$\dot{T}(t) = a(T(t) - T_k) \tag{8.1}$$

egyenlet írja le, ahol a a test anyagi minőségét jellemző állandó.

1.2. A logisztikus növekedés pontosítása

A logisztikus növekedést leíró (4.4) modell legnagyobb hibája, hogy feltételezi, hogy a rendszer rendkívül kicsiny $N(t)$ esetében is – ha lassan is – de növekedni fog. Ugyanakkor például az ökológiai rendszerek esetében az a tapasztalat, hogy ilyenkor az egyedszám csökkenésnek indul, mert az ivarérett egyedek nehezebben találnak párt, vagy mert beltenyészetek alakulnak ki, ami viszont a termékenységet csökkenti.

A fentiek miatt célszerű a (4.4) egyenletet úgy módosítani, hogy a populáció növekedése negatívvá váljon, ha az egyedszám egy adott M alsó küszöbnél kisebbé válik. Ez egy újabb szorzó bevezetésével lehetséges:

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\left(1 - \frac{M}{N(t)}\right). \quad (8.2)$$

1.3. Test lecsúszása

Egy test l hosszúságú, α hajlásszögű síklapon csúszik. A felületen a súrlódási együttható k . Az

$$\ddot{s}(t) = g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \quad (8.3)$$

egyenlet a kezdetben nyugalomban lévő test mozgástörvényét adja.

Az

$$\begin{aligned} \dot{s}_1(t) &= s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) &= g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \end{aligned} \quad (8.4)$$

egyenletrendszer a (8.3) egyenlettel ekvivalens.

1.4. Függőleges hajítás

Egy testet függőlegesen felfelé v_0 kezdősebességgel mozgásba hozunk. Ha a test mozgásának leírásához csak a nehézségi erőt vesszük figyelembe, azaz elhanyagoljuk a közegellenállást, akkor az az

$$\ddot{s}(t) = -g \quad (8.5)$$

egyenlettel jellemezhető. Ebből az átviteli elv alkalmazásával az

$$\begin{aligned} \dot{s}_1(t) &= s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) &= -g \end{aligned} \quad (8.6)$$

egyenletrendszer nyerhető.

1.5. Neutrális szál

Egy a két végénél alátámasztott gerendát, mindkét végétől a távolságban P nagyságú erővel terhelünk. Ebben az elrendezésben – ha a deformációk nem túlságosan nagyok – igaz, hogy a gerenda alsó részei megnyúlnak, a felső részei összenyomódnak. A két tartomány határa a neutrális szál, melynek hossza változatlan marad. Ennek alakját a

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{Pa}{EJ} \quad (8.7)$$

egyenlet írja le, ahol E a gerenda rugalmassági együtthatója, J pedig a neutrális szálra vonatkozó keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(x)}{dx} &= y_2(x) \\ \frac{dy_2(x)}{dx} &= -\frac{Pa}{EJ} \end{aligned} \quad (8.8)$$

1.6. Visszatérítő erő

Az m tömegű anyagi részecskét az O pont felé, a ponttól mért x távolsággal egyenesen arányos F erő mozgat. Az F hatására megvalósuló mozgást az

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{a}{m}\right)^2 x(t) = 0 \quad (8.9)$$

egyenlet írja le, amit egyenletrendszerként

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{a}{m}\right)^2 x_1(t) \end{aligned} \quad (8.10)$$

alakban írhatunk.

1.7. Lánc lecsúszása

Egy sima, vízszintes felületről l hosszúságú lecsúszó lánc mozgását az

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l} x(t) \quad (8.11)$$

egyenlet írja le.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g}{l} x_1(t) \end{aligned} \quad (8.12)$$

(A mozgás kezdetekor a láncnak már a hosszúságú darabja lecsúszott.)

1.8. Vagon mozgása szélben

Egy m tömegű vagon mozgásba jön a pálya irányában ható állandó erő hatására és vízszintesen mozog. A vagon ellenállása a mozgással szemben R , a mozgás F erő hatására jött létre, mozgástörvényét az

$$\ddot{x}(t) = \frac{F - R}{m} \quad (8.13)$$

egyenlettel adhatjuk meg. A (8.13) egyenlet a (8.3) és a (8.5) egyenletekhez hasonló módon egyenletrendszerre alakítható.

1.9. Függőleges hajítás közegellenállás figyelembe vételével

Egy m tömegű testet v kezdősebességgel mozgásba hozunk függőlegesen lefelé. Ha az esés közben számolunk a közegellenállással, a test mozgását az

$$m\ddot{s}(t) + k\dot{s}(t)^2 - mg = 0 \quad (8.14)$$

egyenlettel írhatjuk le, ahol k a közegellenállást jellemző arányossági tényező, g pedig a gravitációs gyorsulás.

$$\begin{aligned} \dot{s}_1(t) &= s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) &= g - \frac{k}{m}s_2(t)^2 \end{aligned} \quad (8.15)$$

1.10. Tengeralattjáró merülése

Egy M tömegű tengeralattjáró egy kis P erő (merülési képesség) hatására merülni kezd. A víz ellenállása arányos a merülés sebességével és a hajótest S vízszintes vetületével. A hajótest merülését az

$$M\ddot{x}(t) + kS\dot{x}(t) - P = 0 \quad (8.16)$$

egyenlettel írhatjuk le, ahol k közegellenállásra jellemző arányossági tényező.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{P}{M} - \frac{kS}{M}x_2(t) \end{aligned} \quad (8.17)$$

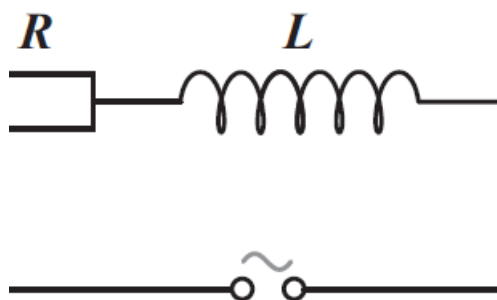
1.11. Rezgőkör

Az elektronikus alkatrészek kapcsolási lehetősége meglehetősen változatos lehet. Egyik alapvető áramkör a 8.1. ábrán látható ellenállásból, induktivitásból és kapacitásból álló soros kapcsolás, az úgynevezett soros rezgőkör. Az áramkör állapotainak leírására alkalmas a

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = E \quad (8.18)$$

egyenlet. Az egyenletből $E = 0$ esetén a mechanikai rezgéseknél megismert (4.16) homogén egyenlethez hasonlóhoz jutunk. Ez a hasonlóság egyben magyarázattal is szolgál az azonos szóhasználatra a két jelenséggel kapcsolatban.

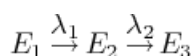
8.1. ábra. Soros rezgőkör



$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{q}_2(t) &= E - \frac{R}{L}q_2(t) - \frac{1}{LC}q_1(t) \end{aligned} \quad (8.19)$$

1.12. Bomlási-sor, sorozatos kémiai reakció

Bizonyos elemek atomjai radioaktív bomlás során más, alacsonyabb rendszámú elemmé alakulnak át, miközben α^+ , β^- , illetve γ -részecskéket bocsátanak ki. A jelenséget Becquerel fedezte föl 1896-ban. Sokszor az így keletkezett elem sem stabil izotóp, és egy az előzőhöz hasonló lépés során tovább bomlik, miközben újabb elem keletkezik. Jelölje

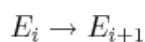


radioaktív anyagoknak azt a bomlási-sorát, amelyben E_1 anyag atomjai először E_2 atomjaivá alakulnak, majd azokból E_3 atomjai keletkeznek.

Az E_i stabilitása, azaz a $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átalakulás sebessége a λ_i bomlási együtthatóval jellemezhető. Az

$$\begin{aligned} \dot{n}_1(t) &= -\lambda_1 n_1(t) \\ \dot{n}_2(t) &= -\lambda_2 n_2(t) + \lambda_1 n_1(t) \end{aligned} \quad (8.20)$$

egyenletrendszer az anyagok ilyen módon való átalakulását írja le, ahol n_i az E_i elem atomjainak a száma. λ_i az E_i izotóp atomjainak stabilitását, azaz az



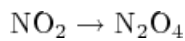
átalakulás sebességét jellemzi.

Fontos megemlítenünk, hogy a sorozatos kémiai reakciók is a (8.20) egyenletekhez hasonló módon írhatók le. De említhetjük még a fertőző betegségek terjedését, lefolyását is, ami szintén leírható ezzel az egyenletrendszerrel. Ebben az esetben E_1 jelenti a fertőzésen még át nem esett egyedek számát, E_2 a fertőzés hatására megbetegedettek száma.

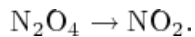
1.13. Egyensúlyi reakció

Bizonyos kémiai átalakulásokkal kapcsolatban ismert az a jelenség, hogy a keletkezett termékek a körülmények megfelelő megváltoztatásával visszaalakíthatók kiindulási anyagokká. Az ilyen átalakulásokat megfordítható kémiai reakcióknak nevezzük. Közismert reakció a szén-dioxid vízben való oldása (így készülnek a szénsavas italok). Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy a pohárba kitöltött ásványvízből „megszökik” a szén-dioxid, de egy zárt palackban nem tapasztalunk szemmel látható változást. Ekkor a két átalakulás egyensúlyban van.

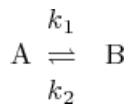
Hasonló reakciók a vöröses-barna nitrogén-dioxid szintelen dinitrogén-tetraoxidá váló alakulása is, amely hőmérséklet növelés vagy nyomás csökkentés hatására visszafelé játszódik le:



és



Hasonló folyamatok általános formában az



egyenlettel írhatók le.

Egyensúlyi állapot akkor alakul ki, amikor a kiindulási anyag [A] koncentrációja és a termék [B] koncentrációja már nem változik. Ez az átalakulás a

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -k_1[A] + k_2[B] \\ \frac{d[B]}{dt} &= -k_2[B] + k_1[A] \end{aligned} \tag{8.21}$$

egyenletrendszerrel írható le, ahol k_1 és k_2 az oda- és visszaalakulás sebességét jellemző állandók.

2. Makrogazdasági modellek

A társadalomban zajló gazdasági folyamatok modellezésére és szemléltetésére a közgazdaságtudomány is matematikai apparátusokat használ. Sajnálatos módon napjainkban a fiatalságban a természettudományok és a matematika iránti érdeklődés a kívánatosnál kisebb mértékben jelentkezik. Ez rányomja bélyegét közgazdasági ismereteikre is. A továbbiakban három egymásra épülő makrogazdasági modellt adunk meg, és amint látható lesz, az egyes összefüggéseket leíró függvények meglehetősen egyszerűek, hiszen lineárisak. Úgy gondoljuk tehát, hogy alapvetően nem az egyes függvénykapcsolatok értelmezésével lehet probléma a téma oktatása során, sokkal inkább a belőlük fölépülő rendszer áttekintése okoz gondot. Meggyőződésünk, hogy megfelelő szemléltetés – ami például GeoGebra segítségével megvalósítható – könnyebben értelmezhetővé teszi ezeket az összefüggéseket.

Természetesen az itt leírt modellek mélyebb értelmezéséhez további közgazdasági ismeretek szükségesek, itt csupán modellek matematikai jellegét szerettük volna érzékeltetni.

2.1. Két szereplős makrogazdasági modell

Fogyasztás:

$$C = C_0 + \hat{c} \cdot Y$$

Kormányzati vásárlás:

$$G = konstans$$

Beruházás:

$$I = I_0 - a \cdot i$$

Megtakarítás:

$$S = -C_0 + \hat{s} \cdot Y$$

Export:

$$X = konstans$$

Import:

$$IM = IM_0 + m \cdot (T_r - T_0) + (m - m \cdot z) \cdot Y$$

Makrokereslet:

$$Y^D = C_0 + I_0 - a \cdot i + \hat{c} \cdot Y$$

2.2. Három szereplős makrogazdasági modell

Fogyasztás:

$$C = C_0 + \hat{c} \cdot (T_r - T_0) + (\hat{c} - \hat{c} \cdot z) \cdot Y$$

Kormányzati vásárlás:

$$G = konstans$$

Beruházás:

$$I = I_0 - a \cdot i$$

Megtakarítás:

$$S = -C_0 + T_0 - T_r - G + \hat{s} \cdot (T_r - T_0) + (\hat{s} + z - \hat{s} \cdot z) \cdot Y$$

Export:

$$X = konstans$$

Import:

$$IM = IM_0 + m \cdot (T_r - T_0) + (m - m \cdot z) \cdot Y$$

Makrokereslet:

$$Y^D = C_0 + I_0 - a \cdot i + G + \hat{c} \cdot (T_r - T_0) + (\hat{c} - \hat{c} \cdot z) \cdot Y$$

Költségvetési egyenleg:

$$\text{Bevétel} = T_0 + z \cdot Y$$

$$\text{Kiadás} = G + T_r$$

2.3. Négy szereplős makrogazdasági modell

Fogyasztás:

$$C = C_0 + \hat{c} \cdot (T_r - T_0) + (\hat{c} - \hat{c} \cdot z) \cdot Y$$

Kormányzati vásárlás:

$$G = \textit{konstans}$$

Beruházás:

$$I = I_0 - a \cdot i$$

Megtakarítás:

$$S = -C_0 + T_0 - T_r - G + (\hat{s} + m) \cdot (T_r - T_0) + IM_0 - X + (\hat{s} + z + m - (\hat{s} + m) \cdot z) \cdot Y$$

Export:

$$X = \textit{konstans}$$

Import:

$$IM = IM_0 + m \cdot (T_r - T_0) + (m - m \cdot z) \cdot Y$$

Makrokereslet:

$$Y^D = C_0 + I_0 - a \cdot i + G + X - IM_0 + (\hat{c} - m) \cdot (T_r - T_0) + (\hat{c} - \hat{c} \cdot z) \cdot Y$$

Költségvetési egyenleg:

$$\text{Bevétel} = T_0 + z \cdot Y$$

$$\text{Kiadás} = G + T_r$$

9. fejezet - Feladatok

1.

A Ke-8-sz2-xvid.avi felvételen egy egyenes vonalú, szakaszonként egyenletes mozgást végző testet látunk. Alkalmassá válva segítségével nézze meg a teljes felvételt, aztán a felvételtől leolvasható értékek felhasználásával készítsen út-idő táblázatot körülbelül 15-20 értékpár felhasználásával. (Törekedjen az értékek pontos leolvasására! Különös tekintettel azokra a pillanatokra, amikor megváltozik a test mozgásállapota. A pontosabb leolvasások érdekében a felvétel természetesen megállítható újra indítható.)

2.

A G2-0205-xvid.avi felvételen egy olyan golyó mozgását kísérhetjük figyelemmel, amely először legördül egy lejtőn, majd a lejtő aljához érve felgurul egy másikon. A felvétel lejátszása során végezzen 15-20 leolvasást, és az így nyert értékpárokat foglalja táblázatba. Ne felejtse el, hogy a két lejtő „találkozásánál” megváltozik a golyó mozgásállapota!

3.

A G1-01.avi, G1-02.avi és a G1-03.avi felvételek lejátszása során gyűjtsön adatokat és azokat foglalja táblázatba. A táblázat alapján hasonlítsa össze a testek mozgását.

4.

A NaAc-1D.avi felvétel nátrium-acetát túltelített oldatának kémcsőben való kristályosodását mutatja be. A felvételen nyomonkövetve a folyamatot végezzen 10-15 leolvasást és a leolvasott térfogat és a hozzájuk tartozó idő értékeket foglalja táblázatba. (Vegye figyelembe, hogy a kristály képződése az 1 cm^3 -es osztástól indul.)

5.

A NaAc-2D.avi felvétel nátrium-acetát túltelített oldatának kristályosodását mutatja be. A felvételen nyomonkövetve a folyamatot végezzen 10-15 leolvasást és foglalja táblázatba, hogyan változik a kristály átmérője az idő függvényében. A táblázatban számítsa ki azt is, hogy az adott időpontban mekkora volt a növekedő kristály látható felülete. (A felvétel lejátszásához válasszon alkalmas lejátszót, amellyel századmásodperc pontossággal tudja követni a folyamatot. A kristály átmérőjének mérésére használhatja a juler programot.)

6.

Az 1. feladat mérési eredményeit ábrázolja táblázatkezelő¹ segítségével. A mozgás egyes szakaszait jelző pontokhoz illesszen megfelelő „görbét”. (A mérési pontok ábrázolása során ügyeljen arra, hogy a felvételen egy összetett mozgást látott, hiszen a sebesség szakaszonként változó volt.

7.

A 2. feladat mérési eredményeit ábrázolja táblázatkezelő segítségével. A mozgás egyes szakaszait jelző pontokhoz illesszen megfelelő görbét. (A mérési pontok ábrázolása során ügyeljen arra, hogy a felvételen egy összetett mozgást látott, hiszen a golyó először gyorsult, majd lassult.

8.

Ábrázolja táblázatkezelő segítségével a 3. feladat mérési eredményeit. Illesszen megfelelő görbét a mérési pontokhoz.

9.

¹A pontok ábrázolásához természetesen használhat más programot is, például a GeoGebrát vagy számítógép-algebrai rendszert. A pontok ábrázolásán kívül követelmény még, hogy megfelelő görbe illesztésére is legyen lehetőség.

Ábrázolja táblázatkezelő segítségével a 4. feladat mérési eredményeit. Illesszen megfelelő görbéket a mérési pontokhoz.

10.

Ábrázolja táblázatkezelő segítségével az 5. feladat mérési eredményeit és a számított értékeket két külön grafikonon. Illesszen megfelelő görbéket a mérési pontokhoz.

11.

Határozza meg a függvénykapcsolatokat, amelyek leírják az 1. feladat mérési eredményei alapján a felvételen látható test mozgását.

12.

Határozza meg a függvénykapcsolatokat, amelyek leírják a 2. feladat mérési eredményei alapján a felvételen látható test mozgását.

13.

Határozza meg a függvénykapcsolatokat, amelyek leírják a 3. feladat mérési eredményei alapján a felvételeken látható testek mozgását.

14.

Határozza meg a függvénykapcsolatot, amely leírja a 4. feladat mérési eredményei alapján a felvételen látható kristály növekedését.

15.

Határozza meg a függvénykapcsolatokat, amelyek leírja az 5. feladat mérési eredményei alapján a felvételen látható kristály átmérőjének és mennyiségének változását.

16.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a exponenciális növekedés közelítő megoldását. A kezdeti feltétel, a növekedési ráta és a közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze el az összes említett módon.

17.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a logisztikus növekedés közelítő megoldását. A kezdeti feltétel, a növekedési ráta, a környezet eltartóképessége és a közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze el az összes említett módon.

18.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a zsákmány-ragadozó modell növekedés közelítő megoldását. A közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze Euler-módszerrel.

19.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a két faj versengését leíró modell közelítő megoldását. A közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze Euler-módszerrel.

20.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a hagyományos harcot leíró modell közelítő megoldását. A közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze Euler-módszerrel.

21.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a gerilla-harcot leíró modell közelítő megoldását. A közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze Euler-módszerrel.

22.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a vegyes harcot leíró modell közelítő megoldását. A közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze Euler-módszerrel.

23.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő az a táblázatot, amely megfelelő paraméterezés mellett alkalmas a hagyományos, a vegyes és a gerilla-harcot, leíró modell közelítő megoldására is. A közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze Euler-módszerrel.

24.

Táblázatkezelő segítségével állítsa elő a rezgő mozgásokat leíró modell közelítő megoldását. A közelítéshez használt lépésköz értéke csúszkával legyen állítható. A közelítést végezze Euler-módszerrel.

25.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.1 alfejezetben megadott jelenség leírására.

26.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.2 alfejezetben megadott jelenség leírására.

27.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.3 alfejezetben megadott jelenség leírására.

28.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.4 alfejezetben megadott jelenség leírására.

29.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.5 alfejezetben megadott jelenség leírására.

30.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.6 alfejezetben megadott jelenség leírására.

31.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.7 alfejezetben megadott jelenség leírására.

32.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.8 alfejezetben megadott jelenség leírására.

33.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.9 alfejezetben megadott jelenség leírására.

34.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.10 alfejezetben megadott jelenség leírására.

35.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.11 alfejezetben megadott jelenség leírására.

36.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.12 alfejezetben megadott jelenség leírására.

37.

Állítsa elő a 4.1 egyenlet olyan paraméterezését, hogy az alkalmas legyen a 8.1.13 alfejezetben megadott jelenség leírására.

38.

Állítson elő 2D-s n -lépéses Wiener-bolyongást és jelenítse meg grafikusán.

39.

Írjon szimulációs programot a gázcseppképek térbeli eloszlásának szemléltetésére a két dobozos darázsmodell felhasználásával.

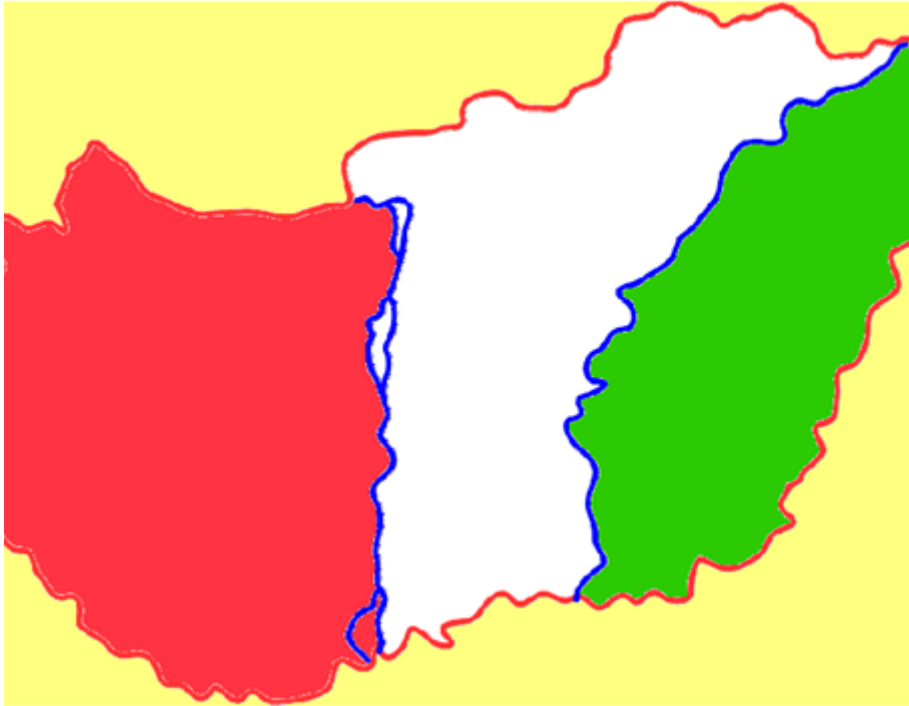
40.

Írjon szimulációs programot a gázcseppképek térbeli eloszlásának szemléltetésére a két dobozos darázsmodell általánosításával. A dobozok száma legyen választható 2-től 10-ig.

41.

A 9.1 ábra felhasználásával készítsünk olyan programot, ami „képes” megbecsülni az ország területének az arányát a bennfoglaló téglalap területéhez viszonyítva, a geometriai valószínűség alapján!

9.1. ábra.



42.

A 9.1 ábra fölhasználásával készítsünk olyan programot, amivel közelíthetjük az ország területének nagyságát a geometriai valószínűség alapján ha tudjuk, hogy a bennfoglalt téglalap oldalai a valóságban 507 km és 321 km!

43.

A 9.1 ábra fölhasználásával készítsünk olyan programot, ami „képes” megbecsülni az egyes országrészek területének az arányát a geometriai valószínűség alapján!

44.

Állítson elő (közel) normális eloszlású véletlen értékeket 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású számok fölhasználásával.

45.

Modelleze a cinkelt kocka számait a dominó-szabály fölhasználásával. Készítsen programot, ami háromszor gyakrabban ad hatost mint egyest, és a további számok dobásának valószínűsége kétszeres az egyeséhez képest.

46.

Állítson elő λ -paraméterű exponenciális eloszlású véletlen értékeket a 6.2.2 fejezetben leírtak alapján.

47.

Modellezze egy részecske 2D-s mozgását. A részecske minden szimulációs lépésben véletlen irányban indul el és legfeljebb h nagyságú utat tesz meg. Ha közben a téglalap alakú „edény” falának ütközik, akkor azzal rugalmasan ütközik, tehát csak az elmozdulás iránya változik a visszaverődés szabályai szerint, az összesen megtett út ebben az esetben is h .

48.

Általánosítsa a 47. feladatot n részecskére. Ossa föl az „edényt” két egyenlő részre. Kezdetben legyen az összes részecske az egyik térfélen. A válaszfalról a részecskék szintén visszapattannak. A szimulációban a válaszfal tetszőleges darabját eltávolíthatjuk. A program készítsen statisztikát és ábráolja az egyes térfeleken található részecskék számát az egyes szimulációs lépések során.

49.

Készítse el az exponenciális növekedés sztochasztikus szimulációját a 6.3.3 fejezet alapján.

50.

Készítse el két faj versengésének (4.10) sztochasztikus modelljét sztochasztikus differenciál-egyenletek (6.3.3 fejezet) fölhasználásával. Jelenítse meg az egyedszámok változását az időben a determinisztikus és a sztochasztikus modell szerint is.

Irodalomjegyzék

- [1] Arató, M., *A Famous Nonlinear Stochastic Equation (Lotka-Volterra Model with Diffusion)*, Mathematical and Computer Modelling, 38 (2003), 709–726.
- [2] Арнольд В.И., *Обобщенное дифференциальное уравнения*, Наука, Москва, (1984)
- [3] Atkins, P.W., *Physical Chemistry I-III.*, Oxford University Press, Oxford (1990)
- [4] Bazsa, Gy., *Nem lineáris dinamika és egzotikus kinetikai jelenségek kémiai rendszerekben*, Egyetemi jegyzet (1992)
- [5] Biraben, N.J., *Essai sur l'évolution du nombre des hommes*, Population (1979)
- [6] Borrelli, R.L., Coleman, C.S., *Differential Equations: A Modeling Perspective*, 2nd Edition, Wiley, New York, (2004)
- [7] Budó, Á., *Kísérleti fizika I-III.*, Tankönyvkiadó, Budapest (1978)
- [8] Csapó, B., *A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései*, MAGYAR PEDAGÓGIA 100/3 (2000) 343-366.
- [9] Fernengel, A., *A kémia tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai*, Új pedagógiai szemle 52 (2002) 68-82.
- [10] Филиппов А.Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*, Госуцарштвенное издательство Физико-Математической Литературы, Москва, (1961)
- [11] Fokasz, N., *Káosz és fraktálok, Bevezetés a kaotikus dinamikus rendszerek matematikájába – szociológusoknak*, Új Mandátum Könyvkiadó (2000)
- [12] Geary, D. C., *Children's mathematical development: Research and practical applications* Washington, DC: American Psychological Association (1994)
- [13] Hadházy, T., Szabó, Á., *Általános iskolai tanulók véleménye a fizikaoktatásról*, Fizikai Szemle 46 (1996) 166.
- [14] Hatvani, L., Pintér, L., *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában*, POLIGON (1997)
- [15] Holt, R.D., Pickering, J., *Infectious Disease and Species Coexistence: A Model of Lotka-Volterra Form*, The American Naturalist, (1985)
- [16] Johnson, R.A., Wichern, D.W., *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice-Hall International, Inc. (1992)
- [17] Józsa K., Lencsés Gy., Papp K., *Merre tovább iskolai természettudomány?*, Fizikai Szemle 46 (1996) 167.
- [18] Kondratyev, V., *The Structure of Atoms and Molecules*, Foreign Languages Publishing House, Moscow
- [19] Livi Bacci, M., *A Concise History of World Population: An Introduction to Population Processes*, Blackwell Publishing, (2001)
- [20] Malthus, T.R., *An Essay on the Principle of Population*, Penguin Books, (1985)
- [21] Meyer P.S., Ausubel J.H., *Carrying Capacity: A Model with Logistically Varying Limits*, Technological Forecasting and Social Change, 61(3):209-214, (1999)
- [22] Murray J.D., *Interdisciplinary Applied Mathematics: Mathematical Biology*, Springer, (2003)
- [23] *Nemzeti alaptanterv: 202/2007. (VII. 31.) rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet módosításáról* (2007)
- [24] Papp K., Józsa K., *Legkevésbé a fizikát szeretik a diákok?*, Fizikai Szemle 50/2 (2000) 61-67.
- [25] Петровский И.Г., *Лекции по теории обобщенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, (1970)
- [26] Ponomarjow, K.K., *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*, Tankönyvkiadó, Budapest (1981)
- [27] Понтрягин Л.С., *Обобщенное дифференциальное уравнения*, Наука, Москва, (1983)
- [28] Reményi, Z., Siegler, G., Szalayné Tahi, Zs., *Érettségire felkészítő feladatgyűjtemény – Informatika*, Nemzeti Tankönyvkiadó (2004)
- [29] Rontó, M., Raisz, P., *Differenciálegyenletek műszakiaknak*, Miskolci Egyetemi Kiadó (2004)
- [30] Seul, M., O'Gorman, L., Sammon, M.J., *Practical algorithms for image analysis*, Cambridge University Press, (2000)
- [31] Radnóti, K., *A fizika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai egy vizsgálat tükrében*, Fizikai Szemle 53/5 (2003) 170
- [32] Szalay, B., Szepesi, I., *A matematika- és természettudományoktatásról – TIMSS 2007*, Új Pedagógiai Szemle 1 (2009) 3
- [33] Stoyan, G., *Numerikus matematika Mérnököknek és programozóknak*, TYPOTE X Kiadó (2007)
- [34] Szentkúti, Zs. *Periodikus megoldások May-Leonard típusú populációdinamikai modellekben*, Alkalmazott matematikai lapok, (1998)
- [35] Tóth, J., Simon, L.P., *Differenciálegyenletek, Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, TYPOTE X Kiadó (2005)
- [36] Váti P., Bánfi I., Felvégi E., Krolopp J., Rózsa C., Szalay B., *A PISA 2000 vizsgálatról*, Új Pedagógiai Szemle 51/12 (2001)

- [37] Walter, W. *Ordinary Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics 182, Springer, New York (1998)
- [38] Wilson, E.O., Bossert, W.H., *A Primer of Population Biology*, Sinauer Associates, Inc., Sunderland, Massachusetts. (1971) 192 pp.
- [39] Wolfram, S., *The Mathematica Book, 5th ed.*, Wolfram Media, (2003)
- [40] Geda, G., *Modelling a simple continuous-time system*, Annales Mathematicae et Informaticae, Eger 35 (2008), 157–162
- [41] Geda, G., *Various systems in a single mathematical model*, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen 6/1 (2008), 1–13
- [42] Geda, G., Vágner, A., *Solving Ordinary Differential Equation Systems by Approximation in a Graphical Way*, Annales Mathematicae et Informaticae, Eger 33 (2006), 57–68.
- [43] Geda, G., *Solving initial value problem by different numerical methods: Practical investigation*, Annales Mathematicae et Informaticae, Eger 32 (2005), 203–210.
- [44] Geda, G., *Investigation of Stochastic Models of Some Periodic Phenomena*, 7th International Conference on Applied Informatics, Eger (2007)
- [45] Geda, G., *Investigation of Stability of Nonlinear Differential Equations with Stochastic Methods*, XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Szováta (2006)
- [46] Geda, G., Vida, J., Murányi Z., B. Tóth Sz., *How to study the phenomena of nature in the future (Multimédia a Kísérleti mérések szolgálatában)*, NETWORK SHOP 2005, Szeged (2005)
- [47] Geda, G., *Kezdetiérték-probléma közelítő megoldásának egy geometriai szemléltetése*, Tvaszi Szél 2005, Debrecen (2005)
- [48] Geda, G., *Solving initial value problem by approximation in different graphic ways*, University of Miskolc, Miskolc (2005)
- [49] Geda, G., Vida, J., *Observation of mechanical movements through virtual experiments*, 6th International Conference on Applied Informatics, Eger (2004)
- [50] Geda, G., Vida, J., *Digitális tudásbázis és fizikai mérőkísérlet*, Agria Media, Eger (2004)
- [51] Geda, G., Rácz, L., *Visualisation of Quantum Station*, 1st European Conference in Chemical Education, Budapest (1998)
- [52] Geda, G., Rácz, L., *Elektronszerkezet szemléltetése számítógéppel*, Agria Media, Eger (1998)
- [53] Geda, G., *Elektronszerkezet 3D szemléltetése számítógéppel*, Agria Media, Eger (1994)
- [54] Geda, G., *A hidrogénszerű atomok elektronszerkezetének szemléltetése számítógéppel*, XV. KÉMIA TANÁRI KONFERENCIA, Kaposvár (1992)
- [55] Geda, G., http://szamitastechnikatanar.ektf.hu/hu/html_files/segedletek/infotech/ferde_h_Trpr_01.html
- [56] Geda, G., http://szamitastechnikatanar.ektf.hu/hu/html_files/segedletek/infotech/Max.html,
- [57] Geda, G., http://szamitastechnikatanar.ektf.hu/hu/html_files/segedletek/infotech/exp_log.html,