KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

1

Új Magyarország FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

I. Halmazok

1. Jelölések

A **halmaz** fogalmát és tulajdonságait gyakran használjuk a matematikában. A halmazt nem definiáljuk, ezt *alapfogalomnak* tekintjük.

Ez nem szokatlan, hiszen a geometriában sem definiáljuk a pontot vagy az egyenest.

Egy halmazra úgy tekinthetünk, mint tárgyak összességére. Ezeket a tárgyakat a halmaz **elemeinek** nevezzük.

A matematikában gyakran találkozhatunk a következő halmazokkal:

- a természetes számok halmaza,
- pontok halmaza,
- egy egyenlet megoldásainak halmaza.

Halmaz elemei

Egy halmazt nemcsak a halmaz nevének megadásával írhatunk le, mint ahogy azt az előbbiekben tettük, hanem úgy is, hogy felsoroljuk az elemeit, majd az egészet kapcsos zárójelbe { } tesszük. [1]

Halmazokat rendszerint *nagybetűkkel* jelölünk, például $A, B,$ vagy C. Így az $A = \{a, e, i, o, u\}$ jelölés azt jelenti, hogy az A halmaz elemei a, e, i, o, u. Az $\in$ szimbólumot arra használjuk, hogy "*tagja a halmaznak*" vagy "*eleme a halmaznak*" és a $\notin$ jelölést pedig, hogy "*nem eleme az illető halmaznak*".Az előző példát tekintve az $A = \{a, e, i, o, u\}$ halmaz esetén azt írhatjuk, hogy $a \in A, e \in A, u \in A, 2 \notin A$.

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatározzák. Ez azt jelenti, hogy két halmaz nem lehet különböző, ha elemeik pontosan ugyanazok. (Más szóval ha két halmaznak ugyanazok az elemeik, akkor a két halmaz egyenlő egymással).

Elemek sorrendje, ismétlődése

Egy halmazban az elemek *sorrendje* nem számít. Ez azt jelenti, hogy ha egy halmazban megváltoztatjuk az elemek sorrendjét, akkor nem kapunk egy új halmazt.

Például, $\{1,2,3\}$ és $\{1,3,2\}$ ugyanazok a halmazok. Emiatt írhatjuk azt, hogy $\{1,2,3\} = \{2,1,3\}$. Mindkét halmaznak ugyanazok az elemeik, nevezetesen $1, 2,$ és 3.

Egy halmazban az elemek *ismétlés nélkül* szerepelnek. Ez azt jelenti, hogy ha megismétlünk a halmazban bizonyos elemeket, ettől még a halmaz változatlan marad. Például az $\{1,2,2,3,3\}$ halmaz ugyanaz mint az $\{1,2,3\}$ halmaz. Ezért írhatjuk azt, hogy $\{1,2,2,3,3\} = \{1,2,3\}$.

Halmaz megadása az elemek tulajdonságainak megadásával

A kapcsos zárójeleket akkor is használhatjuk, amikor egy halmaz elemeit az elemek *közös tulajdonságának* segítségével adjuk meg.

Egy harmadik, nagyon gyakran használt és korrekt módszer a következő: egy kapcsos zárójel után először egy betűt vagy egy szimbólumot írunk, ami egy valamilyen halmaz eleme lehet. Ezután egy kettőspont következik, aminek jobb oldalán erre a szimbólumra vonatkozó állítást írunk képlettel vagy akár szavakkal kifejezve. Így adjuk meg precízen a halmaz elemeit.Például az $\{1, 2, 3\}$ halmaz helyett azt is írhatjuk, hogy: $\{x : x \text{ egész szám és } 1 \le x \le 3\}$

$$\{1, 2, 3\} \Leftrightarrow \{x : x \text{ egész szám és } 1 \le x \le 3\}$$

Ha azok az elemek, amelyeket meg szeretnénk adni, már valamilyen ismert halmaznak az elemei, olyannak aminek neve is van, akkor a kettőspont bal oldalára vonatkozó tulajdonság előírásával adjuk meg a halmazt: $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 3\}$. Ezt úgy olvassuk, hogy: "*A* $\mathbb{Z}$ halmazból azoknak az x-eknek a halmaza, amelyre 1 kisebb vagy egyenlő mint x és x kisebb vagy egyenlő mint 3."

Halmaz elemeinek száma; az üres halmaz

Egy halmaznak lehetvéges számú eleme és lehet végtelen sok eleme is. Ha egy halmaznak véges sok eleme van, akkor azt véges halmaznak, ha végtelen sok eleme van, akkor azt végtelen halmaznak nevezzük. Az is lehetséges, hogy egyáltalán nincs eleme, ekkor ezt a halmazt üres halmaznak nevezzük.

Tekintsük például a Balatonban élő delfinek számát. Ennek a halmaznak nincs eleme, hiszen a Balatonban nincsenek delfinek.

Ha fel akarjuk sorolni egy ilyen halmaz elemeit kapcsos zárójelek között, akkor semmi sem kerül a zárójelek közé. Így a { } jelet kapjuk. Ez az **üres halmaz**, amit még *null halmaznak* is nevezhetünk. Az üres halmaz jele tehát { }, de van egy másik gyakran használt jelölés is ϕ. A halmaz szemléltethető egy síkidommal; például körrel vagy téglalappal. Az ilyen ábrát Venn-diagrammnak nevezzük.

Néhány nevezetes halmaz

Néhány alapvető halmaznak megvan a saját külön jelölése.

Ötöt felsorolunk ezekből:

- $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^{+} =$ a pozitív egész számok halmaza $= \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} =$ az egészek gyűrűje $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} =$ a racionális számok teste $= \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- $\mathbb{R} =$ a valós számok teste
- $\mathbb{C} =$ a komplex számok teste $= \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \quad (i^2 = -1)$

2. Halmazműveletek

Részhalmaz

$A \subseteq B$

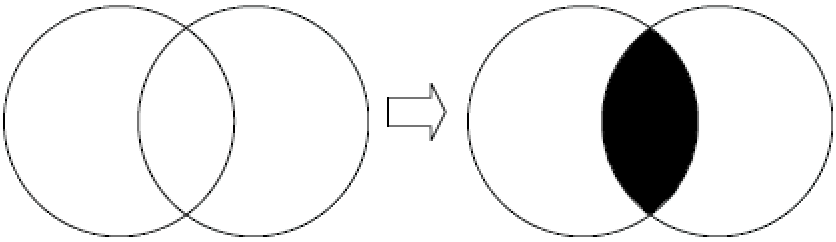
Az A halmaz a B halmaznak **részhalmaza**, ha A mindegyik eleme B - nek is eleme. Jelölése: $A \subseteq B$. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, azaz $\phi \subseteq B$.

Metszet

$A \cap B$

Ha A és B halmazok, akkor A és B **metszete** (közös része) azoknak az elemeknek az összessége, amelyek hozzátartoznak A-hoz is és B hez is.

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ és } x \in B\} =$ minden olyan x,amely eleme A-nak is és B-nek is. Ha két halmaz metszete az üres halmaz, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz diszjunkt (idegen) egymáshoz képest.



Így

$\{1,2\} \bigcap \{2,3\} = \{2\}$

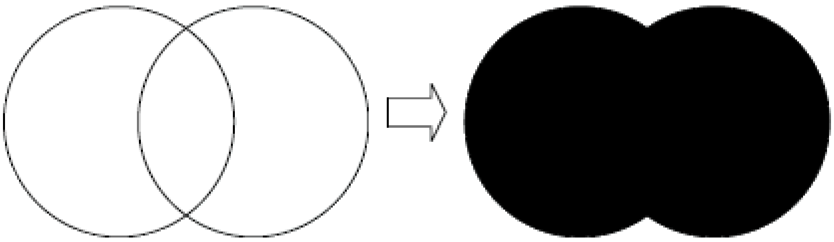
és

$\{1\} \bigcap \{2\} = \{\}$.

Unió

$A \bigcup B$

Az A és B halmaz **egyesítése (uniója)** alatt azokat a dolgokat értjük, amelyek az A és B halmazok közül legalább az egyiknek az eleme.



Például:

$\{1,2\} \bigcup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

és

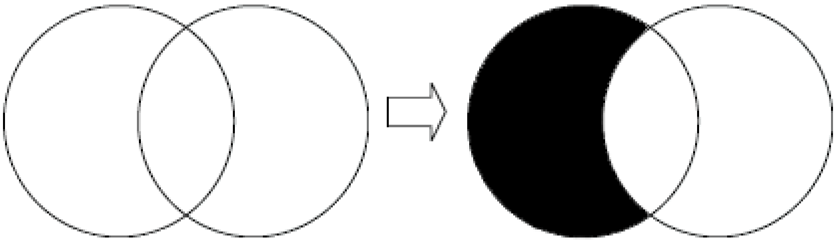
$\{1\} \bigcup \{2\} = \{1,2\}$.

$A \bigcup B = \{x : x \in A$ vagy $x \in B\} =$ az összes olyan x-eknek a halmaza, amelyek A-nak vagy B-nek elemei.

Különbség

$A - B$

Az A és B halmazok **különbsége** alatt (jelölése: $A - B$) mindazokat a dolgokat értjük, amelyek A-hoz hozzátartoznak, de B-hez nem.



Így

$\{1,2\}-\{2,3\}=\{1\}$

és

$\{1\}-\{2\}=\{1\}$.

Műveleti szabályok

A $\bigcap$ és $\bigcup$ műveletek *kommutatívak* és *asszociatívak*, pontosan úgy, ahogy a pozitív egész számok viselkednek összeadás és szorzás esetén, azaz ha X,Y és Z halmazok, akkor $X\bigcap Y=Y\bigcap X$ és $X\bigcup Y=Y\bigcup X$.

Ugyanígy:

$X\bigcap(Y\bigcap Z)=(X\bigcap Y)\bigcap Z$ és $X\bigcup(Y\bigcup Z)=(X\bigcup Y)\bigcup Z$.

Sőt, $\bigcap$ és $\bigcup$ *disztributívak* a másik felett, azaz

$X\bigcap(Y\bigcup Z)=(X\bigcap Y)\bigcup(X\bigcap Z)$ és $X\bigcup(Y\bigcap Z)=(X\bigcup Y)\bigcap(X\bigcup Z)$.

Hasonlóan a pozitív egész számok esetén a szorzás disztributív az összeadás felett, de ennek a fordítottja nem igaz.

A szabály leírása	A szabály neve (magyarázata)
$X\bigcup Y=Y\bigcup X$	az unió kommutatív
$X\bigcap Y=Y\bigcap X$	a metszet kommutatív
$(X\bigcup Y)\bigcup Z=X\bigcup(Y\bigcup Z)$	az unió asszociatív
$(X\bigcap Y)\bigcap Z=X\bigcap(Y\bigcap Z)$	a metszet asszociatív
$(X\bigcup Y)\bigcap Z=(X\bigcap Y)\bigcup(Y\bigcap Z)$	a metszet disztributív az unióra
$X\bigcap(Y\bigcup Z)=(X\bigcap Y)\bigcup(X\bigcap Z)$	az unió disztributív a metszetre

Halmazműveleti szabályok összefoglalása

Komplementer halmaz

$\overline{A}$

Tekintsünk egy tetszőleges H alaphalmazt. Tegyük fel, hogy A részhalmaza H -nak. Ekkor az A halmaz H halmazra vonatkozó **komplementer** halmazán azon elemeket értjük, melyek elemei a H halmaznak, de *nem elemei* az A halmaznak ($\overline{A}=H\setminus A$).

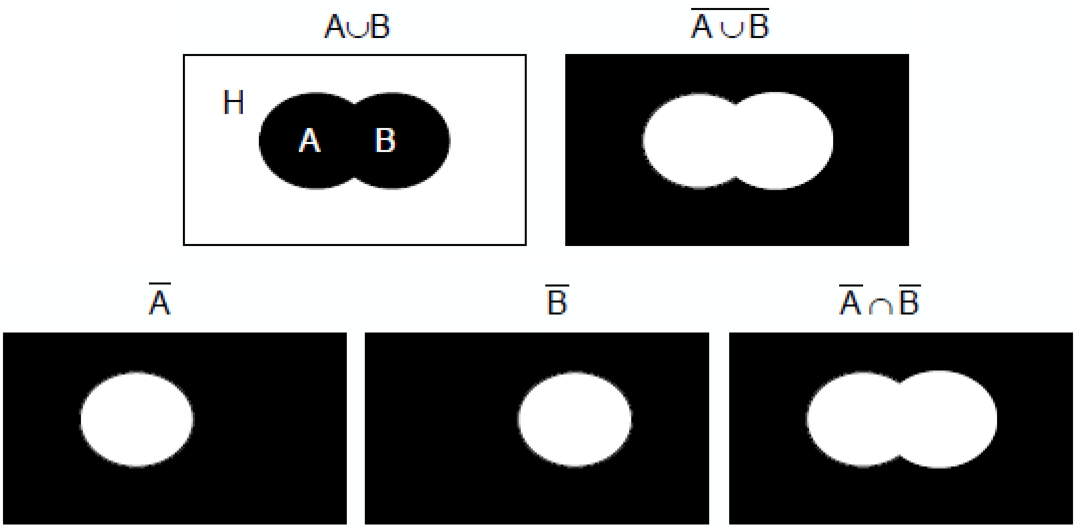
Jele: $\overline{A}$ (*föléhúzás*).

De Morgan azonosságok

A komplementer halmazokra vonatkozó De Morgan azonosságok [2]:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



A De Morgan azonosságok a fenti Venn-diagramok alapján könnyen beláthatók

MINTAFELADAT

Rajzolja fel a Venn-diagramokat az $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ azonosság szemléltetésére is!

3. A Descartes-szorzat

Rendezett párok, halmazok

Definíció Egy rendezett pár egy *első* és egy *második* elemből áll. Ha a jelöli az első elemet és b pedig a második elemet, akkor ezt a párt (a,b) jelöli.

Az $(a,b) = (a',b')$ egyenlőség ezért azt jelenti, hogy $a = a'$ és $b = b'$.

Az alapvető különbség egy *rendezett pár* és egy *kételemű halmaz* között az, hogy a pár esetén a sorrend fontos, a kételemű halmaz esetén pedig nem.

Így egy kételemű halmaz esetén $\{a,b\} = \{b,a\}$, de $(a,b) = (b,a)$ csak akkor állhat fenn ha $a = b$.

Definíció Az $A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ rendezett párok halmazát az A és B halmazok Descartes-féle szorzatának nevezzük.

Más szóval az A és B halmazok *Descartes-féle szorzata* az összes olyan rendezett pár halmaza, amelyek első elemét A -ból második elemét pedig B -ből vesszük.

A "$:=$" szimbólum azt jelenti, hogy a kettőspont bal oldalán lévő kifejezést először definiáljuk ezzel az egyenlettel. Ebben az esetben nem kell azon gondolkodnunk, hogy ezt a mennyiséget, amit az egyenlet definiál, vajon már ismerjük-e. Természetesen a szövegkörnyezetből ez nyilvánvaló, de ez a jelölés mégis megkönnyíti a szöveg tanulmányozását.

MINTAFELADAT

Mintafeladat

Legyen $A=\{1,2,3\}$ és $B=\{a,b\}$. Határozzuk meg az A és B halmazok Descartes-féle szorzatát.

Megoldás

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$.

PÉLDA

Példa:

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=$ a sík

Rendezett n-esek

A rendezett párok definíciójának analógiájára, definiálhatunk rendezett hármasokat (a,b,c), és rendezett *n*-eseket $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Ha $A_1,A_2,\ldots,A_n$ halmazok, akkor a

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n:=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n): a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n\}$$

halmazt az $A_1,A_2,\ldots,A_n$ halmazok Descartes-féle szorzatának nevezzük. Gyakran használjuk az $\mathbb{R}^n$ jelölést az $\mathbb{R}$ halmaz n tényezős Descartes-féle szorzatára:

$$\mathbb{R}^n:=\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}.$$

4. Halmazrendszerek

A matematikában gyakran fordulnak elő olyan halmazok, amelyeknek az elemei szintén halmazok. Például, definiáljuk a következő halmazt

$$M=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{4\}\},$$

amely négy darab természetes számokból álló halmazból áll, pontosabban az $\{1,2,3,4\}$ halmaz négy részhalmazából. Ilyenekkel gyakran találkozunk a matematikában.

Abból a célból, hogy elkerüljük a "halmazok halmaza" kifejezést, inkább **halmazrendszerről** vagy *halmazok családjáról* beszélünk.

Azt mondhatjuk, hogy a fenti M halmazrendszer a $\{1,2,3,4\}$ halmaz néhány részhalmazát tartalmazza. Az ilyen halmazokat néha *kalligrafikus betűvel* szoktuk jelölni, mint például: $\mathcal{M}$.

Ha egy halmazrendszer egy X halmaz összes részhalmazaiból áll, akkor ezt 2^X-el jelöljük, és az X halmaz **hatványhalmazának** nevezzük. A hatványhalmaz egy másik szokásos jelölése: $\mathcal{P}(X)$.

5. Mintapéldák

Megoldások: ⊙ láthatók ○ nem láthatók

1. Legyen $A=\{1,2,5,8\}$, $B=\{0,2,3,5\}$, $C=\{3,4\}$, $D=\{2\}$.

Ekkor:

$A\cup B=\{0,1,2,3,5,8\}$, $A\cap B=\{2,5\}$, $A\setminus B=\{1,8\}$,

$A\cap C=\phi$, $C=\{3,4\}=\{3,4,3\}=\{4,3\}=\{3,4,4,3,3\}$,

$C\cap D=\phi$, $A\times C=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(5,3),(5,4),(8,3),(8,4)\}$,

$C\times C=C^2=\{3,4\}\times\{3,4\}=\{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$.

A fenti halmazok mindegyike véges halmaz (az $A\cap C=\phi$ üres halmaz is). D részhalmaza A -nak is és B -nek is, de C -nek nem. $A\cap B$ ugyancsak részhalmaza A -nak is és B -nek is.

2. Legyen $H=\{1,2,3,4,5\}$ alaphalmaz, $A=\{2,4,5\}$.

Ekkor $\overline{A}=H\setminus A=\{1,3\}$, $\overline{\overline{A}}=\{2,4,5\}$.

3. Legyen $A=\{1,2,3\}$. Írjuk fel A hatványhalmazát.

Megoldás. Jelölje $\mathcal{P}(A)$ ezt a halmazt, amelynek elemei tehát az A halmaz részhalmazai, beleértve az üres halmazt is és magát az A halmazt is. Így

$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

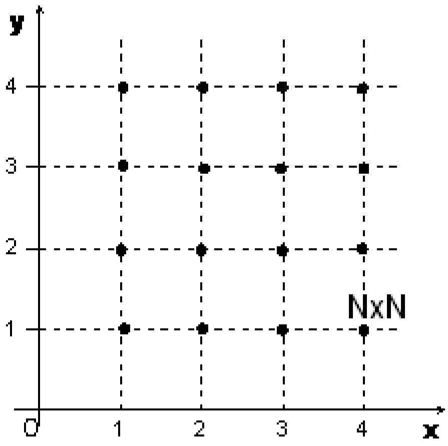
Látható, hogy $\mathcal{P}(A)$ elemeinek száma $8=2^3$. Általában is igaz, hogy ha A elemeinek száma *n*, akkor $\mathcal{P}(A)$ elemeinek száma 2^n.

- **4.** Legyen a természetes számok halmaza $\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots\}$, az egész számok halmaza $\mathbf{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, a valós számok halmaza pedig $\mathbb{R}$.

Ekkor $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$, azaz **N** részhalmaza **Z** -nek is és $\mathbb{R}$ -nek is, **Z** részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek. Mindhárom halmaz végtelen halmaz.

5. Legyen $\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. Írjuk fel az $\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\mathbf{N}^2$ halmazt néhány elemének felsorolásával.

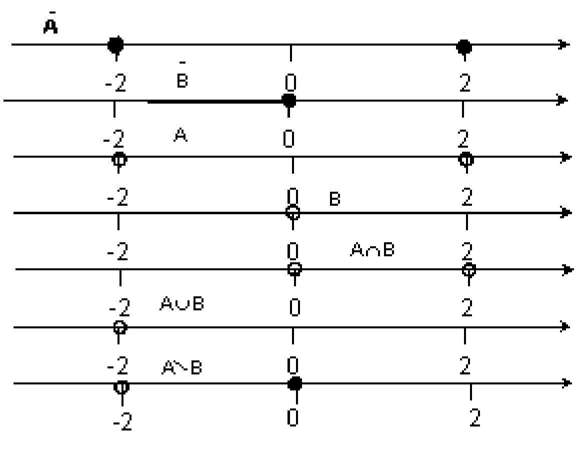
Megoldás. $\mathbf{N}^2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),\ldots\}$. Ez a halmaz szemléltethető a koordinátarendszer első síknegyedének (belső) rácspontjaival. (1.1. ábra). Például a (2, 3) elem megfelel a $P(2,3)$ pontnak.



1.1. ábra

- **6.** Legyen **R** a valós számok halmaza, továbbá legyen $A=\{x: x\in\mathbf{R},\ |x|<2\}$, $B=\{x: x\in\mathbf{R},\ x>0\}$. Írjuk fel és ábrázoljuk a számegyenesen az $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$ halmazokat.

Megoldás. $\overline{A}=\{x.x\in\mathbb{R},|x|\geq 2\}$, $\overline{B}=\{x.x\in\mathbb{R},x\leq 0\}$. Mivel A és B közös elemei a kettőnél kisebb pozitív valós számok, ezért $A\cap B=\{x.x\in\mathbb{R},0<x<2\}$. A két halmaz egyesítése (uniója) a két halmaz valamennyi elemét tartalmazza, ezért $A\cup B=\{x: x\in\mathbf{R},\ x>-2\}$. Az $A\setminus B$ halmaz A -nak azokat az elemeit tartalmazza, amelyek nem tartoznak B -hez. Ezért $A\setminus B=\{x: x\in\mathbf{R},\ -2<x\leq 0\}$. L. az 1.2. ábrát.



1.2. ábra

7. Igazoljuk, hogy $A\setminus(B\cup C)=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ tetszőleges A, B, C halmazokra.

Megoldás. Az $A\setminus B=A\cap\overline{B}$ és a *De Morgan-féle második azonosságot* felhasználva,

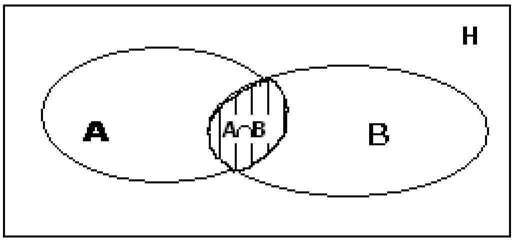
$$A\setminus(B\cup C)=A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}.$$

8. Legyen H az alaphalmaz $(A\subset H$ és $B\subset H)$. Igazoljuk, hogy $A\cup(A\cap B)=A$.

Megoldás. Ismert, hogy $A = A \cap H$, és $H \cup B = H$. Így

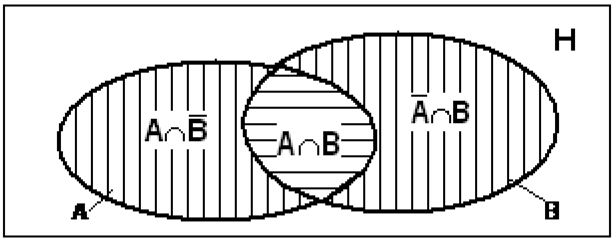
$$A \cup (A \cap B) = (A \cap H) \cup (A \cap B) = A \cap (H \cup B) = A \cap H = A.$$

Itt az *A* "tényezőt" kiemeltük. Az azonosságot az 1.3. ábrán Venn-diagrammal szemléltetjük.



1.3. ábra

- **9.** Legyen H alaphalmaz és $A \subset H,\ B \subset H$. Igazoljuk, hogy $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup B$ (1.4. ábra).



1.4. ábra

Megoldás. Használjuk ki azt, hogy $A = A \cup A$. Itt konkrétabban azt, hogy $A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap B)$. Ekkor

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) =$$

$$= \left[A \cap (\overline{B} \cup B)\right] \cup \left[B \cap (A \cup \overline{A})\right] = (A \cap H) \cup (B \cap H) = A \cup B.$$

Itt kihasználtuk, hogy $\overline{B} \cup B = H$, $A \cup \overline{A} = H$, $A \cap H = A$, $B \cap H = B$.

6. Feladatok

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

Többször megoldható feladat, **elvégzése kötelező**.
A feladat végső eredményének a mindenkori **legutolsó megoldás** számít.

Oldja meg a következő feladatokat! A válaszadáshoz esetleg szükséges részszámításokat, levezetéseket külön papíron végezze el!

Keresse ki a következő halmazok minden elemét! (N a természetes számok halmaza, R a valós számok halmaza).

1. $A = \{n : n \in \mathbf{N},\ 3 < n \leq 7\}$

- ☐ 1
- ☐ 6
- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ 7
- ☐ 0
- ☐ 3
- ☐ 5

2. $B = \{x : x \in \mathbf{R}, x^2 - 6x = 0\}$

- ☐ 1
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 3
- ☐ 5
- ☐ 4
- ☐ 0
- ☐ 2

Hány eleme van az alábbi halmazoknak?

Válaszát mindig számjeggyel írja, ne használjon semmilyen más karaktert!

3. *A* = {Vörösmarty Mihály, 2, az $x^2 - 4 = 0$ egyenlet gyökei, a Szózat írója};

Elemek száma: ______

4. $B = \{x : x^2 = 0\}$;

Elemek száma: ______

5. $D = \{\emptyset\}$

Elemek száma: ______

6. $X = \{x : x \in \mathbf{R},\ x^2 - 6x + 25 = 0\}$

Elemek száma: ______

Hány eleme van az alábbi halmaznak?

Válaszát mindig számjeggyel írja, ne használjon semmilyen más karaktert!

$C = \{4,\ a,\ b\}$;

Ha $a \neq b$ és $a \neq 4$, $b \neq 4$: $\boxed{}$ elem.

Ha $a \neq b$ és $a = 4$, vagy $a \neq b$ és $b \neq 4$: $\boxed{}$ elem.

Ha $a = b \neq 4$: $\boxed{}$ elem.

Ha $a = b = 4$: $\boxed{}$ elem.

Legyen $A = \{a, b, c, d, e\}$

11. Hány eleme van az *A* halmaz *hatványhalmazának*? $\boxed{}$

12. És hány eleme van az $A \times A$ halmaznak? $\boxed{}$

Legyen $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ és $B = \{\lg\sqrt{1}, \lg\sqrt{2}, \lg\sqrt{3}, \ldots, \lg\sqrt{n}, \ldots\}$.

13. Hány eleme van az $A \cap B$ halmaznak? $\boxed{}$

Készítsen Venn-diagramot és válaszoljon a kérdésekre!

Egy felmérés szerint 100 tanuló közül angolul 28-an, németül 30-an, franciául 42-en, angolul és németül 8-an, angolul és franciául 10-en, németül és franciául 5-en, mindhárom nyelven 3-an tanulnak.

Hányan nem tanulnak egy nyelvet sem? $\boxed{}$

Hányan tanulnak csak franciául? $\boxed{}$

Hányan tanulnak csak angolul? $\boxed{}$

Hányan tanulnak csak angolul és németül? $\boxed{}$

Legyen $X = \{x : x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ és $Y = \{y : y \in \mathbf{R},\ 0 < y \leq 4\}$. Hogyan lehetne szemléltetni az $X \times Y$ Descartes-szorzatot?

Az $X \times Y$ Descartes-szorzat a koordinátarendszerben azoknak a $P(x, y)$ pontoknak a halmazával szemléltethető, melyekre:

x > ☐ , ☐ < y ≤ ☐

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak!

21. Van megegyező eleme az *A* és *B* halmaznak, ha

$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ és

$B = \{ \sin\frac{k\pi}{6}$, *k* pozitív egész szám}

I	H
○	○

22. Igaz-e, hogy $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = B$?

I	H
○	○

23. Igaz-e a következő összefüggés?

$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = H$ (*H* az alaphalmaz)

I	H
○	○

[1] Természetesen erre csak véges számú elemet tartalmazó halmaz esetén van lehetőségünk.

[2] *Augustus De Morgan* (1806-1871) angol matematikus nyomán.