KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

2

ÚJ MAGYARORSZÁG FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

II. Kombinatorika

1. Permutáció, variáció, kombináció

A **kombinatorika** egy véges halmaz elemeinek valamilyen szabály alapján történő csoportosításával, kiválasztásával, sorrendbe rakásával foglalkozik.

Permutáció

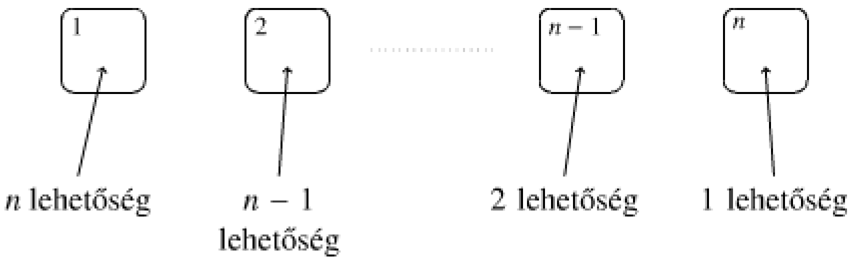
n különböző elem **permutációinak** (lehetséges sorrendjeinek) száma:

(1) $$P_n := n!$$

Ennyiféleképpen lehet *n* különböző elemet sorbarendezni. $n! = 1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n$ (olv. "*en faktoriális*").

Megállapodás:

- $1! = 1$
- $0! = 1$



Ismétlés nélküli permutáció
Az első, második, ..., n-dik helyekre választható elemek számát összeszorozva kapjuk az eredményt.

Ha az *n* elem között *k* megegyező van, de a többi elem ezektől is és egymástól is különbözik, akkor az ún. **ismétléses permutációk** száma:

(2) $$P_n^{k} := \frac{n!}{k!}, \qquad k \le n.$$

Ha az *n* elem között pontosan *r* -féle különböző elem van úgy, hogy az egymással megegyező elemek száma rendre $k_1, k_2, \ldots, k_r$, akkor az ismétléses permutációk száma:

(3) $$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r} := \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!}, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n.$$

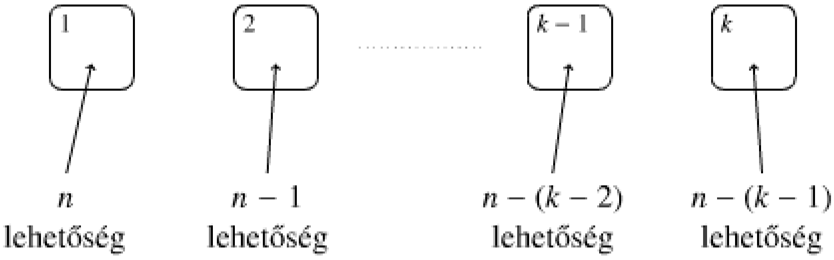
Variáció

n különböző elem **k-adosztályú (ismétlés nélküli) variációinak** a száma:

(4) $$k \le n.$$

$$V_n^{\,k} := \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1),$$

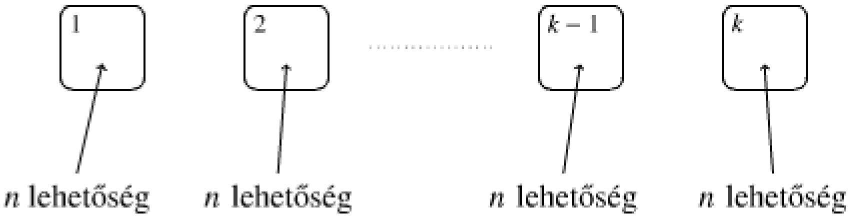
Ennyiféleképpen lehet *n* különböző elem közül *k* elemet kiválasztani, ha a kiválasztott elemek sorrendje is számít.



Ismétlés nélküli variáció
Az első, második, ..., k-dik helyekre választható elemek számát összeszorozva kapjuk az eredményt.

A **k-adosztályú ismétléses variációk** száma:

(5)
$$V_n^{\,k,\text{ism.}} := n^k .$$



Ismétléses variáció
A k-tagú sorozat minden elemére n-féleképpen tudunk választani.

Vegyük észre, hogy az ismétlés nélküli permutációk az *n*=*k* speciális esetei az ismétlés nélküli variációnak.

Kombináció

n különböző elem *k* -adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációinak a száma:

(6)
$$C_n^{\,k} := \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}, \quad k \le n .$$

Ennyiféleképpen lehet *n* különböző elem közül *k* elemet kiválasztani, ha a kiválasztás sorrendje nem számít.

A $C_n^{\,k} := \binom{n}{k}$ számokat (olv. "*en alatt a ká*") szokás **binomiális együtthatóknak** is nevezni.

A **k-adosztályú ismétléses kombinációk** száma:

(7)
$$C_n^{\,k,\text{ism.}} := \binom{n+k-1}{k}$$

		Ismétlés	
		nem lehetséges	lehetséges
Sorrend	számít	V_k^n ismétlés nélküli variáció	$V_k^{n,(ism)}$ ismétléses variáció
	nem számít	C_k^n ismétlés nélküli kombináció	$C_k^{n,(ism)}$ ismétléses kombináció

A variáció és a kombináció különböző esetei [i]

A binomiális tétel

Legyen *n* természetes szám, *a, b* pedig tetszőleges komplex számok. Ekkor

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n . \tag{8}$$

Két nevezetes összefüggés:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} , \tag{9}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} . \tag{10}$$

2. Mintapéldák

Megoldások: ⊙ láthatók ○ nem láthatók

1. Az *a, b, c* elemek permutációi:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

2. 6 elem permutációinak száma:

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

3. Egy 10 főből álló társaság hányféle sorrendben ülhet le

a) egy egyenes asztal mellé egy sorba,

b) egy kerek asztal köré?

Megoldás

a) Egyenes asztal mellé annyiféleképpen ülhetnek le, ahányféleképpen 10 különböző elem sorbarendezhető, azaz 10! = 3 628 800 - féleképpen.

b) Tekintsünk egy megvalósult sorrendet. Ehhez képest nem keletkezik új sorrend, ha mindenki átül egy hellyel jobbra (vagy balra). Ezért rögzítsük egy személynek a helyét. Ekkor a többiek a megmaradó 9 helyre 9! - féleképpen ülhetnek le. Tehát a 10 fős társaság egy kerek asztal köré 9! = 362 880 - féleképpen ülhet le.

4. Hány permutáció alkotható a MATEMATIKA szó betűiből?

Megoldás. Az elemek (betűk) száma $n = 10$. Ezek közül az *M* betű kétszer, az *A* betű háromszor, a *T* betű kétszer fordul elő, a többiek (E, I, K) egyszer-egyszer. Tehát $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$, $k_5 = 1$, $k_6 = 1$. Az ismétléses permutációk száma tehát, a (3) képlet szerint:

$$P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151\ 200.$$

Megjegyezzük, hogy a nevezőkből az 1! -ok elhagyhatók (ugyanis $1! = 1$), ezért

$$P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151\ 200.$$

5. Az *a, b, c, d* elemek másodosztályú (ismétlés nélküli) variációi:

ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.

6. 5 különböző elem harmadosztályú variációinak száma a (4) képlet szerint:

$$V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60, \text{ vagy } V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

7. Hány ötjegyű szám írható fel a 0, 1, 2 számjegyekkel?

Megoldás. A számjegyek nyilván ismétlődhetnek és azok sorrendje is számít. Ezért a 0, 1, 2 elemek $(n = 3)$ ötödosztályú $(k = 5)$ ismétléses variáció közül azok alkotnak ötjegyű számot, amelyek nem 0 -val kezdődnek. Ezek száma, az (5) képlet kétszeri alkalmazásával

$$V_3^{5,\text{ism}} - V_3^{4,\text{ism}} = 3^5 - 3^4 = 162.$$

De gondolkodhatunk a következőképpen is: Az első helyre csak az 1 vagy a 2 számjegy kerülhet. Ez két lehetőség. A többi helyek mindegyikére a három számjegy bármelyike kerülhet, vagyis mindegyik helyen három lehetőség van. Tehát a lehetőségek száma 2·3·3·3·3 = 162.

- **8**. Egy sakkversenyen 8 sakkozó vesz részt. Mindenki mindenkivel kétszer játszik, a második játszmában fordított színekkel. Hány mérkőzésre kerül sor?

Megoldás. Annyi mérkőzésre kerül sor, ahányféleképpen a 8 versenyző közül kettőt ki lehet választani (egy mérkőzéshez két játékos kell). A sorrendet is figyelembe kell venni, ezért variációról van szó. A (4) képletet használva,

$$V_8^{\,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Tehát 56 mérkőzésre kerül sor.

9. 13 mérkőzést figyelembe véve (elvileg) hányféleképpen tölthető ki egy totószelvény?

Megoldás. Egy mérkőzésre háromféle tippünk lehet: 1, x, 2. Két mérkőzés esetén a lehetséges tippek:

11, 1x, 12, x1, xx, x2, 21, 2x, 22.

Ezek száma $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. Három mérkőzés esetén a tippek száma $9 \cdot 3 = 3^3 = 27$. Minden újabb mérkőzés bekapcsolásával a tippek száma megháromszorozódik. Így 13 mérkőzés esetén 3^{13} lesz ezek száma. Tehát (elvileg) ennyiféleképpen tölthető ki egy totószelvény.

Gondolkodhatunk a következőképpen is: Egy tipposzlop 13 helyének mindegyikére az 1, x, 2 jelek valamelyikét kell beírni. A beírt 13 jel sorrendje is számít. Tehát a lehetséges tippek száma az (5) képlet szerint $(n = 3,\ \ k = 13)$:

$V_3^{\,13,\mathrm{ism}} = 3^{13} =$ 1 594 323.

10. Az *a, b, c, d, e* elemek másodosztályú (ismétlés nélküli) kombinációi:

ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.

- **11**. 90 különböző elem ötödosztályú (ismétlés nélküli) kombinációinak száma a (6) képlet szerint:

$$C_{90}^{\,5} := \binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,(90-5)!} = \frac{90!}{5!\ 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = 43\,949\,268.$$

Ennyiféleképpen lehet egy lottószelvényt kitölteni (elvileg).

- **12**. Egy társaságban mindenki mindenkivel egyszer fogott kezet. Összesen 66 kézfogás történt. Hányan voltak a társaságban?

Megoldás. Egy kézfogáshoz két személy szükséges, a személyek sorrendje nem számít. Tehát annyi kézfogás történik, ahányféleképpen két személyt ki lehet választani a társaságból. Ha a személyek száma *n*, akkor a kézfogások száma *n* elem másodosztályú (ismétlés nélküli) kombinációinak számával egyenlő, amely jelen esetben 66. Tehát

$$\binom{n}{2} = 66.$$

Ezt az egyenletet kell megoldani. Átalakítás után

$\dfrac{n(n-1)}{2!} = 66$, azaz $n(n-1) = 132$; $n^2 - n - 132 = 0$.

Csak a pozitív egész megoldás jöhet szóba. Egyszerű próbálgatással, vagy esetleg a másodfokú egyenlet gyökképletének alkalmazásával kapjuk, hogy $n = 12$. Tehát 12 személyből állt a társaság.

- **13**. Négy egyforma játékkockával dobunk. Hányféle módon alakulhat a dobás eredménye? (A kockákat nem különböztetjük meg, így azok sorrendje nem számít.)

Megoldás. Egy dobás eredménye egy számnégyes (a felülre kerülő pontok számát megadó számnégyes).

A dobás eredménye annyiféle lehet, ahányféleképpen az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból (elemekből) négyet ki lehet választani. Sorrend nem számít, ismétlődés lehetséges. Itt tehát ismétléses kombinációról van szó ($n = 6, \quad k = 4$). Ezek száma:

$$C_6^{4^{\text{ism}}} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126.$$

Tehát a dobás eredménye 126 -féleképpen alakulhat.

14. $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 =$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1, \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10.$$

15. A binomiális tételt felhasználva, alakítsuk át az $S := (1+\sqrt{x})^6 + (1-\sqrt{x})^6$ kifejezést.

Megoldás. Használjuk a (8) képletet:

$$S = \binom{6}{0} + \binom{6}{1}\sqrt{x} + \binom{6}{2}\sqrt{x}^2 + \binom{6}{3}\sqrt{x}^3 + \binom{6}{4}\sqrt{x}^4 + \binom{6}{5}\sqrt{x}^5 + \binom{6}{6}\sqrt{x}^6 +$$

$$+ \binom{6}{0} + \binom{6}{1}\left(-\sqrt{x}\right) + \binom{6}{2}\left(-\sqrt{x}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(-\sqrt{x}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(-\sqrt{x}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(-\sqrt{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(-\sqrt{x}\right)^6 =$$

$$= 2\left[\binom{6}{0} + \binom{6}{2}\sqrt{x}^2 + \binom{6}{4}\sqrt{x}^4 \binom{6}{6}\sqrt{x}^6\right] = 2\left(1 + 15x + 15x^2 + x^3\right).$$

16. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Megoldás. Írjuk fel a (8) képletet $a = 1, \quad b = 1$ esetére.

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

17. Bizonyítsuk be, hogy egy *n*-elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

Megoldás. Vegyük sorra a halmaz egyelemű, kételemű, háromelemű, ..., n -elemű részhalmazait. Az egyelemű részhalmazok száma *n*, ami írható $\binom{n}{1}$ alakban is. A kételemű részhalmazok száma annyi, ahányféleképpen két elemet ki lehet választani n elem közül, azaz $\binom{n}{2}$. Hasonlóképpen a háromelemű részhalmazok száma $\binom{n}{3}$, végül az n -elemű részhalmazok száma $\binom{n}{n} = 1$. Ez az egy halmaz maga az eredeti halmaz (egy halmaz önmagának részhalmaza). Az üres halmaz is részhalmaza a halmaznak. "Ennek száma" 1, amit írjunk most $\binom{n}{0}$ alakban. Így a részhalmazok száma:

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$, ami az előző példa eredménye alapján 2^n.

BIBLIOGRÁFIA:

[i] Forrás: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/hu/b/b0/Elemikomb1.png