KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

3

Új Magyarország FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

III. Megfeleltetések, relációk

1. Bevezetés

Emlékeztetünk arra, hogy az $A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ rendezett párok halmazát az A és B halmazok **Descartes-féle szorzatának** nevezzük. Más szóval az A és B halmazok Descartes-féle szorzata az összes olyan rendezett pár halmaza, amelyek első elemét A-ból második elemét pedig B-ből vesszük.

Definíció Legyen A és B két tetszőleges halmaz. Az A és B halmaz $A \times B$ **Descartes-féle szorzatának** valamely részhalmazát az A-ból B-be történő *megfeleltetésnek* nevezzük.

Ha $A = B$ akkor A-n értelmezett **kétváltozós (binér) relációról** beszélünk. A megfeleltetések jelölésére görög kisbetűket használunk. Jele: $\rho \subseteq A \times B$. Ha például $(a,2) \in \rho$ ezt úgy is jelölhetjük, hogy $a\rho 2$ és úgy mondjuk, hogy a relációban van 2-vel.

MINTAFELADAT

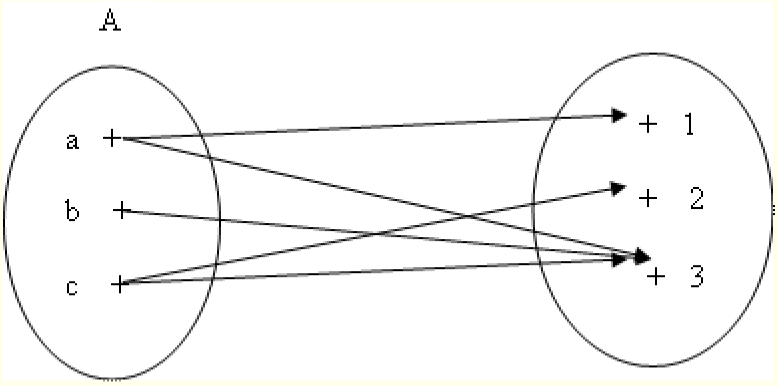
Feladat Legyen $A = \{a,b,c\}$ és $B = \{1,2,3\}$. Határozzuk meg az A és B halmazok Descartes-féle szorzatát.

Ábrázoljuk nyíldiagrammal az $\rho = \{(a,1),(a,3),(b,3),(c,2),(c,3)\}$ relációt.

Megoldás

A és B halmazok Descartes-féle szorzata:

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$. Látszik, hogy $\rho \subseteq A \times B$.



Megfeleltetés ábrázolása nyíldiagrammal.

Az első halmazból akkor mutat egy adott elemből a második halmaz valamely eleméhez nyíl ha reláció van közöttük. Látható, hogy például $a\rho 1$, ami azt jelenti, hogy a relációban van 1-el, azaz nyíl mutat az A halmaz a eleméből a B halmaz 1 eleméhez, stb.

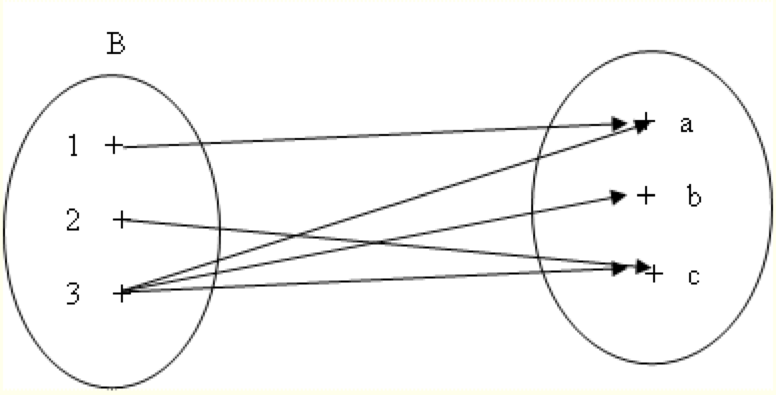
Definíció A $\rho \subseteq A \times B$ megfeleltetés **inverzén** azt a $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ megfeleltetést értjük, amelyre $b\rho^{-1}a$ pontosan akkor áll fenn, ha $a\rho b$ is fennáll.

A ρ megfeleltetés nyíldiagramjából úgy kapjuk meg a ρ^{-1} nyíldiagramját, hogy a nyilak irányát megfordítjuk.

MINTAFELADAT

Feladat Legyen $A=\{a,b,c\}$ és $B=\{1,2,3\}$. Határozzuk meg a $\rho=\{(a,1),(a,3),(b,3),(c,2),(c,3)\}$ reláció ρ^{-1} inverzét. Ábrázoljuk a ρ^{-1} reláció nyíldiagramját.

Megoldás A definíció alapján: $\rho^{-1}=\{(1,a),(3,a),(3,b),(2,c),(3,c)\}$ a megoldás. A ρ^{-1} reláció nyíldiagramját pedig úgy kapjuk, hogy megfordítjuk a nyilak irányát a ρ reláció nyíldiagramján. Lásd az ábrát.



2. Kétváltozós (binér) reláció

Definíció Legyen A tetszőleges halmaz. Az A halmaz $A\times A$ Descartes-féle szorzatának valamely részhalmazát az A-n értelmezett **kétváltozós (binér) relációnak** nevezzük. Jele: $\rho\subseteq A\times A$ Ha $(a,b)\in\rho$ akkor $a\rho b$-t írunk és azt mondjuk, hogy a relációban van b-vel a ρ reláció szerint.

A ρ jelölés helyett gyakran használják a következő szimbólumot: $\sim$.

Példák relációra:

1. A sík háromszögeinek halmazában az egymással *hasonló* háromszögpárok.
2. természetes számok halmazában az *oszthatósági reláció*. Ez azokból az (a,b) számpárokból áll, amelyekre a osztója b-nek.
3. országok közül azoknak az (a,b) ország pároknak a halmaza amelyeknek van közös határa.
4. és $\leq$ $\mathbb{R}$ valós számok halmazán.
5. Az *egyenlőségi reláció* = bármilyen halmazon.
6. $\cong$ *izomorfia* a csoportok esetén.

Relációk szorzata

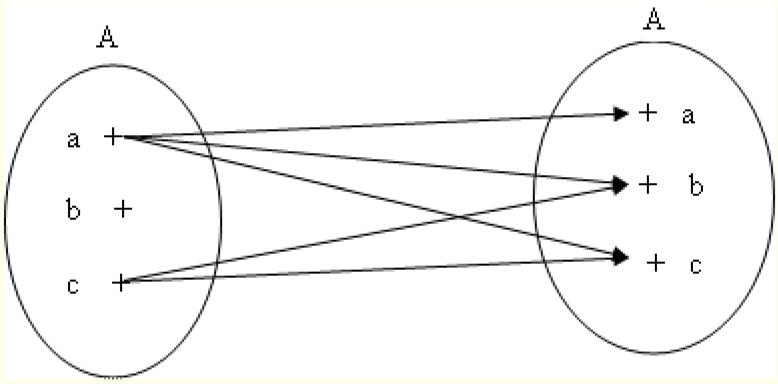
MINTAFELADAT

Feladat Legyen $A=\{a,b,c\}$. Határozzuk meg az A halmaz $A\times A$ Descartes-féle szorzatát. Ábrázoljuk nyíldiagrammal az $\rho=\{(a,a),(a,b),(a,c),(c,b),(c,c)\}$ relációt.

Megoldás

A halmaz $A\times A$ Descartes-féle szorzata:

$A\times A=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$. Látszik, hogy $\rho\subseteq A\times A$



Megfeleltetés ábrázolása nyíldiagrammal

A halmaz egy adott eleméből akkor mutat egy másik elemhez nyíl ha reláció van közöttük. Látható, hogy például $a\rho a$, ami azt jelenti, hogy a relációban van a-val, azaz nyíl mutat az A halmaz a eleméből a A halmaz a eleméhez, stb.

Definíció A $\rho_1 \subseteq A \times B$ és $\rho_2 \subseteq C \times D$ relációk **szorzata** alatt azt a $\rho_1\rho_2 \subseteq A \times D$ relációt értjük, amely azoknak az $(a,d) \in A \times D$ elemeknek az összessége, amelyek esetében létezik olyan $c \in B \bigcap C$, hogy $a\rho_1 c$ és $c\rho_2 d$ teljesülnek.

MINTAFELADAT

Feladat Legyen $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,3,4\}$ és adott két megfeleltetés: $\rho_1 \subseteq A \times B$ és $\rho_2 \subseteq B \times C$, ahol

$\rho_1 = \{(1,3),(2,3),(1,2)\} \subseteq A \times B$

$\rho_2 = \{(3,1),(1,4),(3,4)\} \subseteq B \times C.$

Határozzuk meg az $A \times B$ Descartes-féle szorzatot. Állítsuk elő a $\rho_1\rho_2, \rho_2\rho_1, \rho_1^{-1}, \rho_2^{-1}, (\rho_2\rho_1)^{-1}$ megfeleltetéseket.

Megoldás

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$$

$$\rho_1\rho_2 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,4)\}$$

$$\rho_2\rho_1 = \{(3,3),(3,2)\}$$

$$\rho_1^{-1} = \{(3,1),(3,2),(2,1)\}$$

$$\rho_2^{-1} = \{(1,3),(4,1),(4,3)\}$$

$$(\rho_2\rho_1)^{-1} = \{(3,3),(2,3)\}$$

$$(\rho_1\rho_2)^{-1} = \{(1,1),(4,1),(1,2),(4,2)\}$$

Definíció Legyen A tetszőleges halmaz. Adott egy A-n értelmezett reláció $\rho \subseteq A \times A$.

Ekkor:

1. ρ *reflexív* ha minden $a \in A$ esetén $a\rho a$.
2. ρ *tranzitív* ha $a\rho b$ és $b\rho c$ akkor $a\rho c$ minden $a,b,c \in A$ esetén.

3. ρ *szimmetrikus* ha $a\rho b$ akkor $b\rho a$ minden $a,b \in A$ esetén.

4. ρ *antiszimmetrikus* ha $a\rho b$ és $b\rho a$ akkor $a = b$ minden $a,b \in A$ esetén.

PÉLDA

Példa Vizsgáljuk meg a $\mathbb{N}$ természetes számok halmazában az oszthatósági relációt. Ez azokból az (a,b) számpárokból áll, amelyekre a osztója $b-$nek. Például $4\rho 8$ hiszen a 4 osztója 8-nak. Ez a reláció *reflexív*, mert minden természetes szám osztója önmagának $4\rho 4$.

Az oszthatósági reláció *tranzitív* is hiszen ha *a* osztója *b*-nek és *b* osztója *c*-nek, akkor *a* is osztója *c*-nek. Ezt a következőképpen látjuk be: ha *a* osztója *b*-nek, akkor létezik olyan pozitív egész *k* szám, amelyre $b = ka$ és ugyanígy, ha *b* osztója *c*-nek, akkor létezik olyan pozitív egész *n* szám, amelyre $c = nb$. A két egyenletből $c = (nk)a$ egyenletet kapjuk, ami tehát azt jelenti, ez a reláció tranzitív.

Az oszthatósági reláció *nem szimmetrikus*. Erre elég egy ellenpéldát mutatni. Például $2\rho 8$, de nyilvánvaló, hogy 8 nem osztója 2-nek. Könnyen belátható, hogy ez a reláció antiszimmetrikus.

Előrendezési reláció

Definíció Legyen A tetszőleges halmaz. Egy A-n értelmezett reláció $\rho \subseteq A \times A$ **előrendezési reláció** ha ρ reflexív és tranzitív.

Egység reláció

Definíció Legyen A tetszőleges halmaz. Egy A-n értelmezett reláció $\rho_A \subseteq A \times A$ **egység reláció** ha minden $a \in A$ saját magával relációban van, de más elemekkel nem.

PÉLDA

Példa Legyen $A = \{1,2,3,4\}$, ekkor $\rho_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

Relációk metszete

Definíció Legyen A tetszőleges halmaz. Egy A-n értelmezett két reláció $\rho_1 \subseteq A \times A$ és $\rho_2 \subseteq A \times A$ **metszete** alatt azt a $\rho \subseteq A \times A$ relációt értjük amelyre $\rho = \rho_1 \cap \rho_2$.

PÉLDA

Példa Legyen $A = \{1,2,3,4\}$, és

$$\rho_1 = \{(1,4),(2,3),(3,3),(4,1),(1,1),(1,2),(3,1),(4,4)\}$$

$$\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

adott relációk, ekkor ezek metszete $\rho = \rho_1 \cap \rho_2$:

$$\rho = \{(1,1),(3,3),(4,4),(1,1),(4,1),(2,3)\}.$$

Részreláció

Definíció Legyen A tetszőleges halmaz és A-n értelmezett két reláció $\rho_1 \subseteq A \times A$ és $\rho_2 \subseteq A \times A$. Azt mondjuk, hogy $\rho_1 \subseteq A \times A$ **részrelációja** $\rho_2 \subseteq A \times A$-nek, jele: $\rho_1 \subseteq \rho_2$ ha $a\rho_1 b \Rightarrow a\rho_2 b$. Azaz ha *a* relációban van *b*-vel ρ_1 szerint, akkor relációban vannak ρ_2 szerint is.

PÉLDA

Példa Legyen $A = \{1,2,3,4\}$, és

$\rho_1 = \{(1,1),(2,3),(3,3),(4,1)\}$

$\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

ekkor könnyen ellenőrizhetjük, hogy $\rho_1 \subseteq \rho_2$.

Összefoglalás

Megtanultuk, hogy mit jelent egy ρ **reláció inverze** ρ^{-1}, **relációk szorzata** $\rho\rho$, és az **egységreláció** ρ_A. Ezeknek a fogalmaknak a segítségével szükséges és elégséges feltételt tudunk kimondani arra nézve, hogy egy reláció mikor rendelkezik a fenti 1) (*reflexív*), 2) (*tranzitív*), 3) (*szimmetrikus*), vagy 4) (*antiszimmetrikus*) tulajdonságok valamelyikével.

Állítás Legyen A tetszőleges halmaz. Adott egy A-n értelmezett reláció $\rho \subseteq A \times A$. Ekkor

ρ *reflexív* akkor és csak akkor ha $\rho_A \subseteq \rho$.

ρ *tranzitív* akkor és csak akkor ha $\rho\rho \subseteq \rho$.

ρ *szimmetrikus* akkor és csak akkor ha $\rho^{-1} = \rho$.

ρ *antiszimmetrikus* akkor és csak akkor ha $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \rho_A$.

Bizonyítás Mind a négy állítás $\Leftrightarrow$ *ekvivalenciát* jelent, tehát mind a két irányban kell bizonyítani.

1) $\Rightarrow$ Tételezzük fel, hogy ρ reflexív; ez azt jelenti, hogy minden $a \in A$ esetén $a\rho a$. Emellett egy A-n értelmezett reláció akkor $\rho_A \subseteq A \times A$ egység reláció ha minden $a \in A$ sajátmagával relációban van, de más elemekkel nem. Innen azonnal következik, hogy $\rho_A \subseteq \rho$.

$\Leftarrow$ Tételezzük fel, hogy ρ relációra igaz $\rho_A \subseteq \rho$. Ez azt jelenti, hogy minden $a \in A$-ra $a\rho a$ teljesül, tehát ρ reflexív.

2) $\Rightarrow$ Tételezzük fel, hogy ρ tranzitív. Teljesüljön az *a* és *b* elemekre az $a(\rho\rho)b$ feltétel. A relációk szorzatának értelmezése alapján van olyan $c \in A$ amelyre $a\rho c$ és $c\rho b$ teljesülnek. A ρ reláció tranzitivitása miatt $a\rho b$ is teljesül. Tehát $a(\rho\rho)b \Rightarrow a\rho b$, ami azt jelenti, hogy $\rho\rho \subseteq \rho$.

$\Leftarrow$ Fordítva, tételezzük fel, hogy $\rho\rho \subseteq \rho$. Teljesüljenek az $a\rho b$ és $b\rho c$ relációk $a,b,c \in A$ esetén. A $\rho\rho$ reláció szorzás értelmezése miatt $a\rho\rho c$ teljesül hiszen relációk szorzata alatt azt a relációt értjük, amely azoknak az (a,c) elemeknek az összessége, amelyek esetében létezik olyan $b \in A$, hogy $a\rho b$ és $b\rho c$ teljesülnek. Ugyanakkor $\rho\rho \subseteq \rho$ miatt $a\rho\rho c \Rightarrow a\rho c$. Végül azt kaptuk, hogy ha $a\rho b$ és $b\rho c$ relációk teljesülnek $a,b,c \in A$ esetén, akkor $a\rho c$. Ez pedi éppen azt jelenti, hogy ρ tranzitív.

3) $\Rightarrow$ Tételezzük fel, hogy ρ szimmetrikus. Ez azt jelenti, hogy ha $a\rho b$ akkor $b\rho a$ minden $a,b \in A$ esetén. A $\rho \subseteq A \times A$ reláció inverzén azt a $\rho^{-1} \subseteq A \times A$ relációt értjük, amelyre $b\rho^{-1}a$ pontosan akkor áll fenn, ha $a\rho b$ is fennáll. Látszik tehát, hogy egy ρ reláció ρ^{-1} inverzét úgy kapjuk meg, hogy *a* és *b* elemeket felcseréljük. A szimmetria tulajdonság miatt azonban, ha a ρ reláció minden egyes (a,b) elempárjával ezt megcsináljuk, akkor a ρ^{-1} relációt kapjuk meg, tehát $\rho^{-1} = \rho$.

$\Leftarrow$ Tételezzük fel, hogy $\rho^{-1} = \rho$. Válasszuk ki ekkor a $\rho \subseteq A \times A$ reláció egy tetszőleges (a,b)

elempárját: $a\rho b$. Cseréljük fel a két elemet ekkor a (b,a) párhoz jutunk. Mivel $b\rho^{-1}a$ teljesül, azaz $(b,a)\in\rho^{-1}\Rightarrow(b,a)\in\rho$ hiszen $\rho^{-1}=\rho$. Tehát a $\rho\subseteq A\times A$ reláció szimmetrikus.

4) $\Longrightarrow$ Tételezzük fel, hogy ρ antiszimmetrikus. Ez azt jelenti, hogy ha $a\rho b$ és $b\rho a$ akkor $a=b$ minden $a,b\in A$ esetén. Emlékeztetünk arra, hogy A-n értelmezett reláció $\rho_A\subseteq A\times A$ egység reláció azt jelenti, hogy minden $a\in A$ sajátmagával relációban van, de más elemekkel nem. Válasszuk ki ekkor a $\rho\subseteq A\times A$ reláció egy olyan (a,b) elempárját, amely benne van $\rho^{-1}\subseteq A\times A$ -ben is azaz $(a,b)\in\rho\bigcap\rho^{-1}$. Ez azt jelenti, hogy (a,b) -vel együtt (b,a) is eleme ennek az utóbbi halmaznak: $(b,a)\in\rho\bigcap\rho^{-1}$. Az antiszimmetria miatt $a=b$, azaz $(a,a)\in\rho\bigcap\rho^{-1}$. Innen már azonnal következik $\rho\bigcap\rho^{-1}\subseteq\rho_A$.

$\Longleftarrow$ Tételezzük fel, hogy a $\rho\subseteq A\times A$ relációra igaz az, hogy $\rho\bigcap\rho^{-1}\subseteq\rho_A$. Azt kell belátnunk, hogy ha $a\rho b$ és $b\rho a$ akkor $a=b$ minden $a,b\in A$ esetén. Ha tehát $a\rho b$ és $b\rho a$ igazak, mivel egyik a másiknak éppen az inverze, emiatt $(a,b)\in\rho\bigcap\rho^{-1}$ igaz. Azonban a $\rho\bigcap\rho^{-1}\subseteq\rho_A$ feltétel miatt: $(a,b)\in\rho_A$ is teljesül, de ez csak úgy lehetséges, hogy $a=b$ minden $a,b\in A$ esetén.

Állítás Legyen A tetszőleges halmaz. Az A halmazon csak egyetlen egy olyan reláció értelmezhető amely reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus, ez pedig az egységreláció.

Bizonyítás Könnyen ellenőrizhető, hogy a ρ_A egységreláció valóban teljesíti mind a három fenti tulajdonságot. Megmutatjuk, hogy ezenkívül nincs más reláció a fenti tulajdonságokkal. Legyen ρ egy reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus reláció. Emlékeztetünk ez előző tételre, mely szerint ρ reflexív $\Leftrightarrow$ $\rho_A\subseteq\rho$, ρ szimmetrikus $\Leftrightarrow$ $\rho^{-1}=\rho$ és ρ antiszimmetrikus $\Leftrightarrow$ $\rho\bigcap\rho^{-1}\subseteq\rho_A$. A szimmetria és az antiszimmetria együttes alkalmazása azt jelenti, hogy $(\rho^{-1}=\rho$ és $\rho\bigcap\rho^{-1}\subseteq\rho_A)\Rightarrow\rho\subseteq\rho_A$. Ez utóbbi eredményt összevetve a reflexivitással ekvivalens $\rho_A\subseteq\rho$ összefüggéssel : $\rho_A=\rho$ amit bizonyítani akartunk.

MINTAFELADAT

Feladat Legyen az A = {1,2,3,4} halmaz és a következő bináris relációk:

a) ρ_1 = { (1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4),(4,3) };

b) ρ_2 = { (1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4) }.

Tanulmányozzuk a fenti két reláció tulajdonságait.

Megoldás: Alkalmazzuk azt a korábbi tételt a megoldáshoz, mely szerint

ρ reflexív $\Leftrightarrow$ $\rho_A\subseteq\rho$.

ρ tranzitív $\Leftrightarrow$ $\rho\rho\subseteq\rho$.

ρ szimmetrikus $\Leftrightarrow$ $\rho^{-1}=\rho$.

ρ antiszimmetrikus $\Leftrightarrow$ $\rho\bigcap\rho^{-1}\subseteq\rho_A$.

Ehhez szükség van az alábbi mennyiségekre:

$\rho_A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

$\rho_1^{-1}=\{(2,1),(3,1),(1,2),(1,3),(4,3),(3,4)\}$.

$\rho_2^{-1}=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

$\rho_1\rho_1 = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

$\rho_2\rho_2 = \{(1,2)\}$.

$\rho_1 \cap \rho_1^{-1} = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(4,3),(3,4)\}$.

$\rho_2 \cap \rho_2^{-1} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

A ρ_1 reláció *nem reflexív*, mert $\rho_A \subseteq \rho_1$ nem teljesül ((1,1) nem eleme), *szimmetrikus*, mert $\rho_1^{-1} = \rho_1$ teljesül, *nem tranzitív*, mert $\rho_1\rho_1 \subseteq \rho_1$ nem teljesül ((1,2) és (2,1) eleme, de (1,1) nem).

A ρ_2 reláció *reflexív*, mert $\rho_A \subseteq \rho_2$ teljesül, *nem szimmetrikus* mert $\rho_2^{-1} = \rho_2$ nem teljesül, *tranzitív* mert $\rho_2\rho_2 \subseteq \rho_2$ teljesül.

MINTAFELADAT

Feladat Legyen az *A* halmazon értelmezett ρ reláció. Tagadva a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt értelmező tulajdonságokat, mondjuk meg, milyen esetben

- ρ *nem reflexív*;
- ρ *nem szimmetrikus*;
- ρ *nem tranzitív*.

Megoldás

- ρ *nem reflexív*, ha létezik $x \in A$ úgy, hogy ne érvényesüljön $x\rho x$.
- ρ *nem szimmetrikus*, ha létezik $x, y \in A$, melyre $x\rho y$, de $y\rho x$ nem igaz.
- ρ *nem tranzitív*, ha létezik $x, y, z \in A$ úgy, hogy $x\rho y$, $y\rho z$, de nem teljesül $x\rho z$.

MINTAFELADAT

Feladat Legyen *D* a síkbeli egyenesek halmaza és $\varphi = \{(d_1, d_2) \in D \times D \mid d_1 \perp d_2\}$.

Megoldás A reláció nem reflexív, szimmetrikus, és nem tranzitív.

3. Ekvivalencia reláció

Partíció, blokk

Definíció Egy X halmaz **partíciója** (*osztályozása*) alatt az X részhalmazainak egy olyan Π rendszerét értjük, amely nem tartalmazza az üres halmazt, elemei *páronként diszjunktak* és uniójuk az X halmazt adja meg. A Π elemeit a partíció **blokkjainak** nevezzük.

Például, ha $X = [9] = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ akkor $\Pi = \{\{1,2\},\{3\},\{5,8,9\},\{4,6,7\}\}$ egy partíciója $X-$nek. Tehát ebben az esetben a partíció négy blokkot tartalmaz: $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{5,8,9\}$, és $\{4,6,7\}$.

Megjegyezzük, hogy két különböző blokknak nem lehet közös eleme és minden egyes eleme csak egyetlen egy blokkban

X

szerepelhet.

MINTAFELADAT

Feladat Keressük meg $[4]=\{1,2,3,4\}$ halmaz összes lehetséges partícióját.

Definíció Egy relációt az X halmazon akkor nevezünk **ekvivalencia relációnak**, ha *reflexív*, *szimmetrikus* és *tranzitív*.

PÉLDA

A legismertebb ekvivalencia reláció az *egyenlőség* egy tetszőleges halmazon értelmezve.

- $x=x$ teljesül minden x esetén .[Reflexív]

- Ha $x=y$ akkor $y=x$. [Szimmetria]

- Ha $x=y$ és $y=z$ akkor $x=z$. [Tranzitivitás]

Ekvivalencia osztály

Definíció Ha az X halmazon adott egy *ekvivalencia reláció* és $a\in X$ akkor az

$[a]=\{x\in X \mid x\rho a\}$ [*a*] halmazt az adott ekvivalencia relációhoz tartozó **ekvivalencia osztálynak** nevezzük.

Tétel Ha adott egy ekvivalencia reláció egy *X* halmazon, akkor az összes *ekvivalencia osztály* egy *partíció* lesz az X halmazon. Megfordítva, ha Π egy partíció az X halmazon, akkor ez definiál egy ekvivalencia relációt *X*-en a következő szabály szerint:

$a\rho b \Leftrightarrow a,b\in B$, ahol $B\in\Pi$ egy blokk a partícióban .

MINTAFELADAT

Feladat Legyen *E* = {1,2,3,4} $\subseteq\mathbb{N}$ és a következő módon értelmezett ε bináris reláció az $E\times E-n$: ($x,y)\varepsilon(x',y') \Leftrightarrow xy'=x'y$.

a) Mutassuk ki, hogy ε egy *ekvivalencia reláció*.

b) Határozzuk meg a fenti reláció szerinti *ekvivalencia osztályokat*.

Megoldás:

a) Mivel bármely (*x*,*y*) $\in E\times E$ esetén *xy* = *xy*, következik, hogy (*x*,*y*) $\varepsilon(x,y)$, tehát ε *reflexív*.

(*x*,*y*) $\varepsilon(x',y') \Rightarrow xy'=x'y \Rightarrow x'y=xy' \Rightarrow (x',y')\varepsilon(x,y)$,

tehát a reláció *szimmetrikus*.

Legyen $(x,y)\varepsilon(x',y')$ és $(x',y')\varepsilon(x'',y'')$, azaz $xy'=x'y$ és $x'\ y''=x''y'$.Tagonként összeszorozva a két egyenlőséget, egyszerűsítés után kapjuk, hogy *xy"=x"y,* vagyis (*x*,*y*) $\varepsilon(x'',y'')$, ami azt jelenti, hogy a reláció *tranzitív*. Mivel ε reflexív, szimmetrikus és tranzitív, következik, hogy ekvivalencia reláció.

b) Az ekvivalencia osztályok a következők:

{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)},{(1,2),(2,4)},

{(1,3)},{(1,4)},{(2,1), (4,2)},{(2,3)},

{(3,1)},{(3,2)},{(3,4)},{(4,1)},{(4,3)}.

MINTAFELADAT

Feladat Legyen A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} $\subseteq \mathbb{Z}$ halmazon értelmezzünk egy ρ *bináris relációt* a következőképpen: $a\rho b \Leftrightarrow a-b$ 4-nek többszöröse. Mutassuk meg, hogy ρ egy *ekvivalencia reláció*. Határozzuk meg az *ekvivalencia osztályokat*.

Megoldás

- ρ *reflexív*, mert $a-a=0$ többszöröse 4-nek.

- ρ *tranzitív*, mert $a\rho b \Leftrightarrow a-b=k4$ és $b\rho c \Leftrightarrow b-c=m4$ akkor a két egyenletet összeadva $a-c=(k+m)4$ tehát $a\rho c$.

- ρ *szimmetrikus*, mert $a-b=k4 \Leftrightarrow b-a=(-k)4$.

Tehát ez a reláció ekvivalencia reláció.

Az ekvivalencia osztályok:

$$\bar{1}=\{1,5,9\},\ \bar{2}=\{2,6,10\},\ \bar{3}=\{3,7\},\ \bar{4}=\{4,8\}$$

Ha egy A halmazon adott egy ρ előrendezési reláció, akkor ebből könnyen tudunk készíteni egy ε ekvivalencia relációt. Emlékeztetünk arra, hogy az **előrendezési reláció** *reflexív* és *tranzitív*.

Állítás Ha ρ az A halmazon értelmezett *előrendezési reláció*, akkor $\rho \cap \rho^{-1}$ egy *ekvivalencia reláció* lesz $A-$n.

Bizonyítás Ha ρ reláció reflexív és tranzitív, akkor könnyen belátható, hogy ρ^{-1} is és $\rho \cap \rho^{-1}$ is reflexív és tranzitív. Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\rho \cap \rho^{-1}$ reláció szimmetrikus. Legyen $(a,b) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Ez azt jelenti, hogy $(a,b) \in \rho$ igaz és $(a,b) \in \rho^{-1}$ is igaz. De ha $(a,b) \in \rho^{-1} \Rightarrow (b,a) \in \rho$. Hasonlóan ha $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho^{-1}$. Tehát ez utóbbi két eredményből $(a,b) \in \rho \cap \rho^{-1} \Rightarrow (b,a) \in \rho \cap \rho^{-1}$ következik, vagyis az $\rho \cap \rho^{-1}$ reláció szimmetrikus.

MINTAFELADAT

Feladat Legyen az A = {1,2,3,4} halmaz és adott a következő bináris reláció:

ρ = { (1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4) }.

Tanulmányozzuk a fenti reláció tulajdonságait. Készítsünk ρ -ból egy ekvivalencia relációt.

Megoldás: Alkalmazzuk azt a korábbi tételt a megoldáshoz, mely szerint

- ρ reflexív $\Leftrightarrow$ $\rho_A \subseteq \rho$.

- ρ tranzitív $\Leftrightarrow$ $\rho\rho \subseteq \rho$.

- ρ szimmetrikus $\Leftrightarrow$ $\rho^{-1}=\rho$.

- ρ antiszimmetrikus $\Leftrightarrow$ $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \rho_A$.

Ehhez szükség van az alábbi mennyiségekre:

$\rho_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

$\rho^{-1} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

$\rho\rho = \{(1,2)\}$.

$\rho \cap \rho^{-1} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

A ρ reláció reflexív, mert $\rho_A \subseteq \rho$ teljesül

- nem szimmetrikus mert $\rho^{-1} = \rho$ nem teljesül

- tranzitív mert $\rho\,\rho \subseteq \rho$ teljesül

Tehát a reláció reflexív és tranzitív,tehát előrendezési reláció.

Az előző állítás szerint ha ρ az A halmazon értelmezett előrendezési reláció, akkor $\rho \cap \rho^{-1}$ egy ekvivalencia reláció lesz $A-$n. Tehát $\rho \cap \rho^{-1} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ egy ekvivalencia reláció.

4. Rendezési reláció

Definíció Egy relációt az X halmazon akkor nevezünk **rendezési relációnak**, ha *reflexív*, *antiszimmetrikus* és *tranzitív*.

Példák rendezési relációra:

- $\leq$ $\mathbb{R}$ valós számok halmazán,
- "osztója" reláció a természetes számok halmazán.

Részbenrendezett halmaz

Definíció Ha *A* nem üres halmaz és $\rho \subseteq A \times A$ reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció az *A* halmazon, akkor az (A,ρ) párt **részbenrendezett halmaznak** nevezzük. Ha a ρ részbenrendezési reláció dichotom, azaz bármely $a,b \in A$ esetén *a* ρ *b* vagy *b* ρ *a* teljesül, akkor (*A;* ρ)-t láncnak vagy **lineárisan rendezett halmaznak**, a ρ relációt pedig **lineáris rendezésnek** nevezzük. Az (*A;* ρ) részbenrendezett halmazt gyakran csak *A* jelöli; a ρ reláció jelölésére többnyire a "$\leq$" vagy a "$\leq_A$" jelölést használjuk. Ha $A=(A;\leq)$ lineárisan rendezett halmaz, és bármely nemüres *B* részhalmaznak van legkisebb eleme – azaz van olyan $b_0 \in B$, hogy minden $x \in B$-re $b_0 \leq x-$, akkor *A*-t **jólrendezett halmaznak** a rajta értelmezett $\leq_A$ relációt pedig **jólrendezésnek** nevezzük.

PÉLDA

Példák

(1) Ha *A* valós számokból álló nemüres halmaz és "$\leq$" a számok körében szokásos "kisebb vagy egyenlő" reláció, akkor $(A;\leq)$ lánc.

(2) *P(A)*-val jelölve A összes részhalmazainak halmazát, azaz az *A* halmaz hatványhalmazát, tetszőleges *A* halmazra $(P(A);\subseteq)$ részbenrendezett halmaz.

(3) N_0-lal jelölve a nemnegatív egész számok halmazát, a $a\,|\,b-$vel pedig azt, hogy az *a* egész szám osztja a *b* egész számot, $(N_0;|)$ részbenrendezett halmaz.

Jelölések

Legyen $A=(A;\leq)$ tetszőleges *részbenrendezett* halmaz, s jelölje *a* és *b* *A* tetszőleges elemét, *U, V* pedig *A* tetszőleges nemüres részhalmazát:

(1) $a < b \overset{def}{\Leftrightarrow} (a \leq b$ és $a \neq b)$;

(2) $a \parallel b \overset{def}{\Leftrightarrow}$ a és b között nincs reláció;

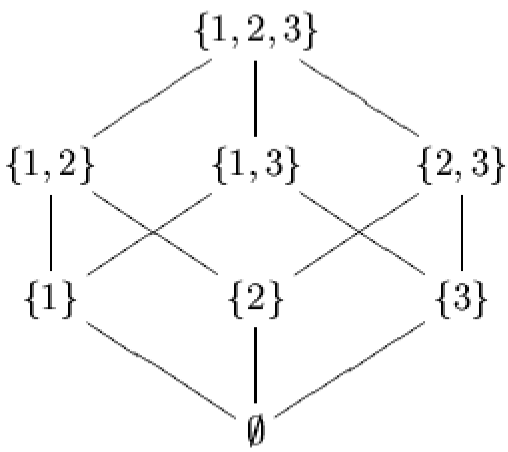
(3) $a \geq b \overset{def}{\Leftrightarrow} b \leq a$;

(4) $a \prec b \overset{def}{\Leftrightarrow} (a < b$ és $(\forall x)(a \leq x \leq b \Rightarrow x \in \{a, b\}))$. Ez esetben azt mondjuk, hogy *b* követi az *a*-t. Az alábbi állítás szerint *véges részbenrendezett* halmaz esetén a "$\prec$" **követési reláció** meghatározza a részbenrendezést.

Állítás. Tetszőleges $P = (P, \leq)$ véges részbenrendezett halmaz *a,b* elemeire $a \prec b$ pontosan akkor teljesül, ha valamely $n \in N_0$ egész számra léteznek $c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b$ elemek úgy, hogy minden *i*-re $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $c_{i-1} \prec c_i$.

Hasse-diagram

Definíció. Az *A részbenrendezett* halmaz **Hasse-diagramján** (röviden diagramján) azt az *irányított gráfot* értjük, amelynek szögpontjai *A* elemei, és $a, b \in A-$ra akkor és csak akkor megy (irányított) él *a*-ból *b*-be, ha $a \prec b$. Az általános megállapodás szerint a gráf éleinek irányát nyíl helyett az jelzi, hogy a végpont a kezdőpontnál magasabban helyezkedik el. Tehát egy *Hasse-diagram* élei (egyenes) szakaszok, és egyik él sem vízszintes.



Részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja [i]

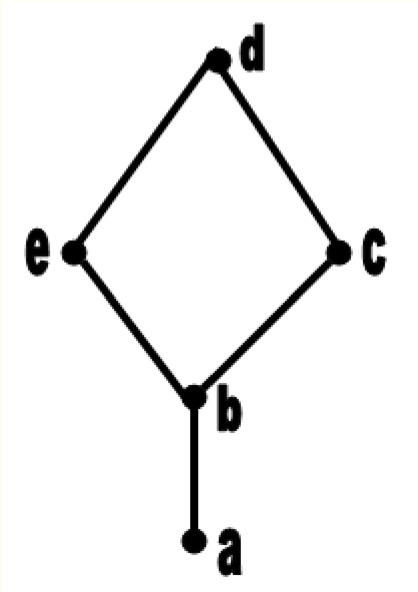
Legnagyobb elem, legkisebb elem

Definíció. Legyen *A* tetszőleges részbenrendezett halmaz, és legyen $a \in A$. Ha bármely $x \in A-$ra $x \leq a$, akkor *a* elemet *A* **legnagyobb elemének** nevezzük. Az $a \in A$ elemet az $(A, \leq)$ részbenrendezett halmaz **maximális elemének** hívjuk, ha nincs $A-$ban olyan x elem amelyre $a < x$. Ugyanezt másképp fogalmazva: $(\forall x \in A)(a \leq x \Rightarrow x = a)$.

A fentiekhez hasonlóan ha bármely $x \in A-$ra $a \leq x$, akkor a elemet A **legkisebb elemének** nevezzük. Az $a \in A$ elemet az $(A, \leq)$ részbenrendezett halmaz **minimális elemének** hívjuk, ha nincs $A-$ban olyan x elem amelyre $x < a$. Ugyanezt másképp fogalmazva: $(\forall x \in A)(x \leq a \Rightarrow x = a)$. Az A legnagyobb , illetve legkisebb elemét 1_A vagy 1, illetve 0_A vagy 0 jelöli.

MINTAFELADAT

Példa Legyen adott az $A=\{a,b,c,d,e\}$ halmaz. Az (A,ρ) részbenrendezett halmazt a következőképpen adjuk meg: $a \le b$, $a \le e$, $a \le c$, $a \le d$, $b \le e$, $b \le c$, $b \le d$, $e \le d$, $c \le d$. Rajzoljuk meg ennek a részben rendezett halmaznak a Hasse-féle diagramját. Vizsgáljuk meg a halmazt a kitüntetett elemek szempontjából.



Megoldás Az ábráról leolvasható, hogy a -nak *rákövetkezője* b: $a \prec b$, b -nek pedig rákövetkezője c: $b \prec c$. Az is látható az ábrán, hogy $a \le d \Leftrightarrow a \prec b \prec c \prec d$. Mivel $e \parallel c$, azaz e és c között nincs reláció, tehát (A,ρ) nem lineárisan rendezett. Úgy is mondhatjuk, hogy "$\le$" reláció *nem lineáris rendezés*.

A $d \in A$ elem az A halmaz *legnagyobb eleme*, hiszen minden $x \in A-$ ra $x \le d$. Tehát: $a \le d$, $b \le d$, $e \le d$, $c \le d$ teljesül a halmaz minden elemére. Hasonlóan az $a \in A$ elem az A halmaz *legkisebb eleme*, hiszen minden $x \in A-$ ra $x \ge a$. Tehát itt is igaz az, hogy $a \le b$, $a \le e$, $a \le c$, $a \le d$ igaz minden halmazbeli elemre.

Könnyű belátni, hogy d legnagyobb elem egyben *maximális elem* is, hiszen nincs $A-$ ban olyan x elem amelyre $d < x$ lenne. Hasonlóan a definíció alapján látható, hogy az a legkisebb elem egyben *minimális elem* is.

Infimum, szupremum

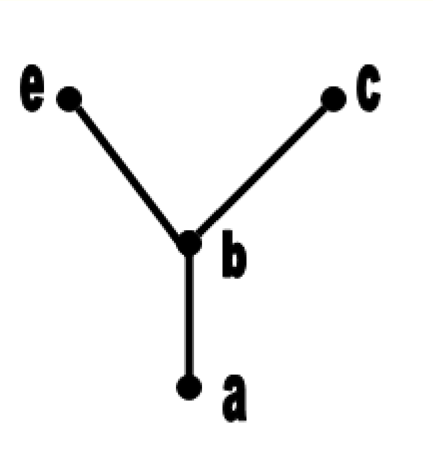
Definíció. Legyen *X* az *A* részbenrendezet halmaz részhalmaza. Az $a \in A$ elemet *X* **legnagyobb alsó korlátjának** vagy **infimumának** nevezzük, ha $(\forall x \in X)(a \le x)$ (azaz *a* alsó korlátja X-nek), és $(\forall b \in A)((\forall x \in X)(b \le x) \Rightarrow b \le a)$ (azaz a minden más alsó korlátnál nagyobb). Ez esetben az $a = \inf X$ jelölést alkalmazzuk. Ehhez hasonlóan az $a \in A$ elemet az *X* részhalmaz **legkisebb felső korlátjának** vagy **szupremumának** nevezzük, ha $(\forall x \in X)(x \le a)$ (azaz a felső korlátja *X*-nek), és $(\forall b \in A)((\forall x \in X)(x \le b) \Rightarrow a \le b)$. Az *X* szupremumát $\sup X$ jelöli.

Háló

Definíció. Ha $(A;\le)$ részbenrendezett halmazt **hálónak** nevezzük, ha *A* bármely kételemű részhalmazának létezik *szupremuma* és *infimuma*. Ha egy *A* részbenrendezett halmaz bármely részhalmazának létezik szupremuma és infimuma, akkor *A*-t **teljes hálónak** nevezzük.

MINTAFELADAT

Példa Legyen adott az $A=\{a,b,c,e\}$ halmaz. Az (A,ρ) részbenrendezett halmazt a következőképpen adjuk meg: $a\le b$, $a\le e$, $a\le c$, $b\le e$, $b\le c$. Rajzoljuk meg ennek a részben rendezett halmaznak a Hasse-féle diagramját. Vizsgáljuk meg a halmazt a kitüntetett elemek szempontjából. Keressük meg az összes kételemű halmaz infinumát és szuprénumát. Háló-e ez a részbenrendezett halmaz?



Megoldás Az (A,ρ) részbenrendezett halmaznak nincs legnagyobb eleme. Például e nem lehet legnagyobb elem mert $e \parallel c$, azaz e és c között nincs is reláció, tehát $c\le e$ nem igaz. A legnagyobb elem definíciója szerint pedig minden $x\in A-$ra $x\le e$-nek teljesülnie kellene, de ez $c-$re nem teljesül. Hasonlóan belátható, hogy c sem lehet legnagyobb eleme (A,ρ)-nak. Az $a\in A$ elem az A halmaz legkisebb eleme, hiszen minden $x\in A-$ra $x\ge a$. A legkisebb elem egyben minimális elem is, nincs $A-$ban olyan x elem amelyre $x<a$ lenne. Az (A,ρ) részbenrendezett halmaznak tehát nincs legnagyobb eleme, de van maximális eleme: az e is és a c is maximális elem. Az e elem teljesíti a maximális elem definícióját, mely szerint nincs $A-$ban olyan x elem amelyre $e<x$ lenne; ugyanez igaz $c-$re is.

Keressük meg az $\{a,b\}$ kételemű halmaz felső korlátjait: $a\le b, a\le e, a\le c$ és $b\le b, b\le e, b\le c$ relációk alapján látszik, hogy a közös felső korlátok halmaza: $\{b,e,c\}$ azaz azok az elemek, amelyek relációban vannak mind az a és mind a b elemmel (ennek a ˝kisebb vagy egyenlő"jel $\le$ felel meg). A táblázatba beírtuk ezeket az elemeket a felső korlátokhoz. Ezután válasszuk ki a felső korlátok közül a legkisebbet: ez nyilván a b elem hiszen $b\le e, b\le c$ teljesülnek. Tehát az $\{a,b\}$ kételemű halmaz legkisebb felső korlátja a b. Ennek a jelölése: $\sup\{a,b\}=b$. Látható, hogy ha a két elem relációban van egymással, akkor a szuprénum a nagyobbik elemmel egyenlő. Ha a két elem nincs relációban, akkor is létezhet infinum vagy szuprénum, de ebben az esetben egy harmadik elemmel lesz egyenlő. Például e és c nincsenek relációban, mégis a legnagyobb alsó korlát létezik és egyenlő $b-$vel: $\inf\{e,c\}=b$. Lásd a táblázatot.

Az összes kételemű halmaz és ezek szuprénuma és infinuma:

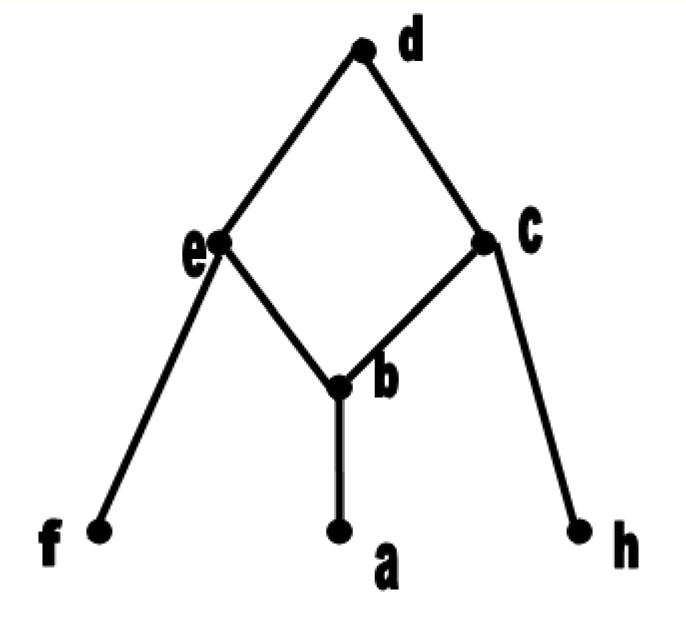
	felső korlátok	alsó korlátok	infinum	szuprénum
$\{a,b\}$	b,e,c	a	a	b
$\{a,e\}$	e	a	a	e
$\{a,c\}$	c	a	a	c
$\{b,e\}$	e	a,b	b	e
$\{b,c\}$	c	a,b	b	c

$\{e,c\}$	nincs	a,b	b	nincs

Az (A,ρ) részbenrendezett halmaznak nem *háló*. Háló akkor lenne, ha bármely kételemű részhalmazának volna *szupremuma* és *infimuma*. Az $\{e,c\}$ kételemű halmaznak nincs szuprénuma.

MINTAFELADAT

Példa Az alábbi részben rendezett halmaznak nincs legkisebb eleme, de van három minimális eleme is. Ez a részben rendezett halmaz sem *háló* hiszen például az $\{a,h\}$ elemeknek nincs *infinuma*.



Megjegyzés:

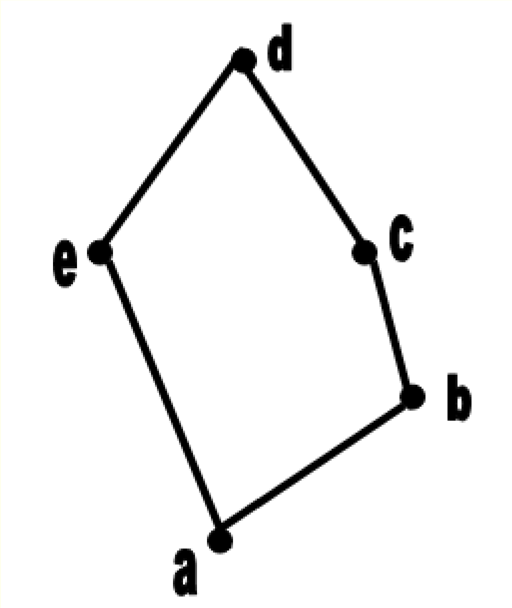
1. belátható, hogy ha egyáltalán létezik egy (A,ρ) részbenrendezett halmaznak legnagyobb eleme akkor *egy* létezik és nem több. Ugyanez igaz a legkisebb elemre is.
2. és minimális elemből több is létezhet (lásd az előző feladatokat), de az is lehetséges, hogy egy sem. Például a természetes számok halmaza a szokásos számok közötti $\leq$ reláció tekintetében háló, de nincs legnagyobb eleme.

MINTAFELADAT

Példa Legyen adott az $A=\{a,b,c,d,e\}$ halmaz. Az (A,ρ) részbenrendezett halmazt a következőképpen adjuk meg:
$a\leq b,\ a\leq e,\ a\leq c,\ a\leq d,\ b\leq d,\ e\leq d,\ c\leq d,\ b\leq c.$
Rajzoljuk meg ennek a részben rendezett halmaznak a Hasse-féle diagramját. Vizsgáljuk meg a halmazt a kitüntetett elemek szempontjából. Keressük meg az összes kételemű halmaz infinumát és szuprénumát. Háló-e ez a részbenrendezett halmaz?

Megoldás Az (A,ρ) részbenrendezett halmaz legnagyobb eleme d legkisebb eleme a. A halmaz maximális eleme d minimális eleme a. Néhány elempár szuprénuma és infinuma a következő:
$\sup\{a,b\}=b,\ \sup\{a,e\}=e,\ \sup\{a,c\}=c,\ \sup\{a,d\}=d,\ \sup\{b,e\}=d,\ \sup\{e,c\}=d,$
$\inf\{a,b\}=a,\ \inf\{a,e\}=a,\ \inf\{e,c\}=a,\ \inf\{a,d\}=a,\ \inf\{b,e\}=a,\ \inf\{e,c\}=a.$

Tehát az (A,ρ) részbenrendezett halmaz háló, mert bármely kéelemű részhalmazának létezik infinuma is és szuprénuma is. Könnyen belátható az is, hogy teljes háló, mert a halmaz bármely részhalmazának létezik szupremuma és infimuma. Ez abból származik, hogy egy részbenrendezett halmazban minden kételemű részhalmaznak van szuprénuma és infinuma, akkor bármely nemüres véges részhalmazának is van. Azaz minden véges háló egyben teljes háló is.



BIBLIOGRÁFIA:

[i] Forrás: http://planetmath.org/ (Creative Commons Share Alike)