KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

4

Új Magyarország FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

IV. Függvények

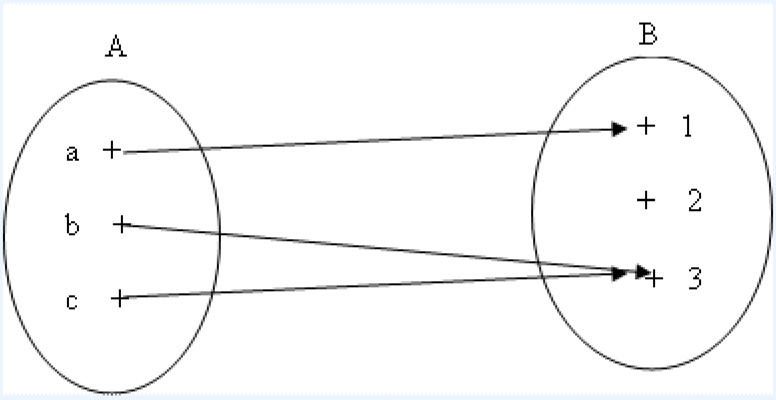
1. Leképezések, függvények

Definíció Legyen X és Y két halmaz. Egy f függvény X-ből Y-ba egy olyan *szabály*, amely minden $x \in X$ elemhez pontosan egy $f(x) \in Y$ elemet rendel hozzá. Az "f egy függvény X-ből Y-ba " helyett az $f : X \to Y$ jelölést használjuk.

PÉLDA

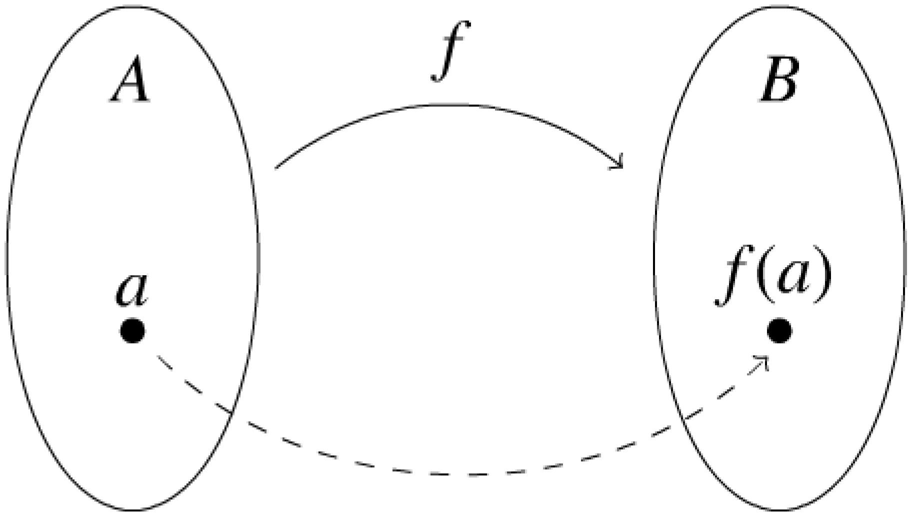
Példa Legyen $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{1, 2, 3\}$. Ekkor a függvény a következő:

$$a \to 1$$
$$b \to 3$$
$$c \to 3.$$



Értelmezési tartomány, értékkészlet

Vegyük észre, hogy az A halmaz (*értelmezési tartomány*) minden eleméhez rendel értéket a B halmazból (*értékkészlet*). A másik fontos észrevétel, hogy pontosan egy értéket rendelünk minden A-beli elemhez és nem többet. Egy **megfeleltetés** tehát emiatt a két tulajdonság miatt lesz **függvény**.



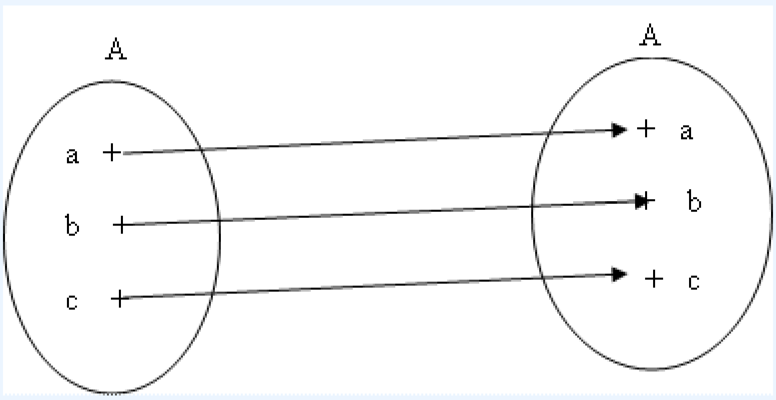
Függvény
f leképezés függvény, amely értelmezési tartománya A, értékkészlete pedig B.

Az identikus függvény

Definíció: Legyen $X = Y$ és $f : X \to X$ pedig úgy definiáljuk, hogy $f(x) = x$ minden $x \in X$ esetén. Az identikus függvényt X-en I_X-el vagy $I : X \to X$ módon szokás jelölni.

PÉLDA

Példa Legyen $A = \{a, b, c\}$. Ekkor az identikus függvény: $I : A \to A$ azt jelenti, hogy
$a \to a$
$b \to b$
$c \to c$.



Identikus függvény

A konstans függvény

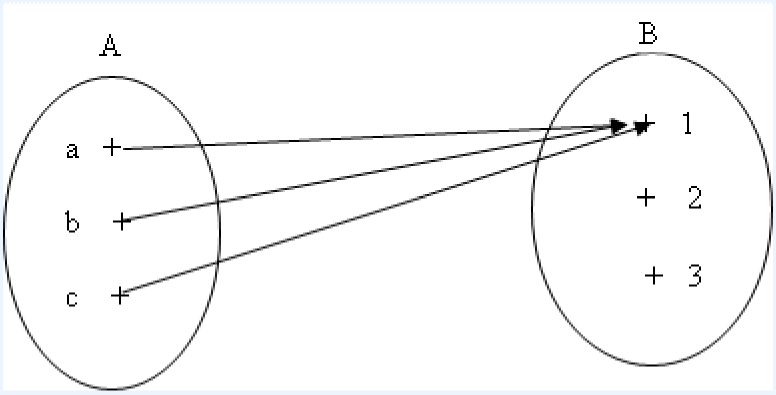
A konstans függvény: Legyen $y_0 \in Y$. Definiáljunk egy $f : X \to Y$ függvényt úgy, hogy legyen $f(x) = y_0$ minden $x \in X$ esetén.

PÉLDA

Példa Legyen $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{1,2,3\}$. Ekkor a konstans függvény a következő:

$a \to 1$
$b \to 1$
$c \to 1$.

Vegyük észre, hogy az A halmaz (*értelmezési tartomány*) minden eleméhez ugyanazt az értéket rendeli a B halmazból.



Konstans függvény

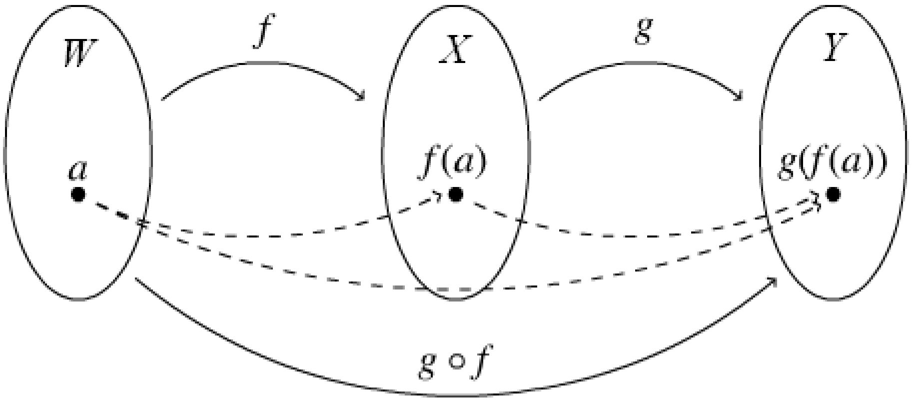
Szűkítés, beágyazás

Szűkítés: Adott $f : X \to Y$ függvény és az X egy nem üres S részhalmazára definiáljuk az $f \mid S : S \to Y$ függvényt az $(f \mid S)(s) = f(s)$ képlettel minden $s \in S$ elemre.

Beágyazás: Ha S egy nem üres részhalmaza X-nek, akkor definiáljunk egy beágyazást $i : S \to X$ úgy, hogy $i(s) = s$ minden $s \in S$. Megjegyezzük, hogy a beágyazás az *identikus függvény* szűkítése.

Összetett függvény

Összetett függvény: Adott $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y$ függvények esetén definiáljuk a $g \circ f : W \to Y$ **összetett függvényt** az $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ összefüggés felhasználásával.



PÉLDA

Példa Legyen $W = \{a, b, c, d\}$, $X = \{e, f, h\}$ és $Y = \{u, v, w, z\}$ halmazok. Ekkor legyen adott két függvény: $f : W \to X$-et az alábbiak definiálják:

$a \to e$
$b \to f$
$c \to e$
$d \to h$

és

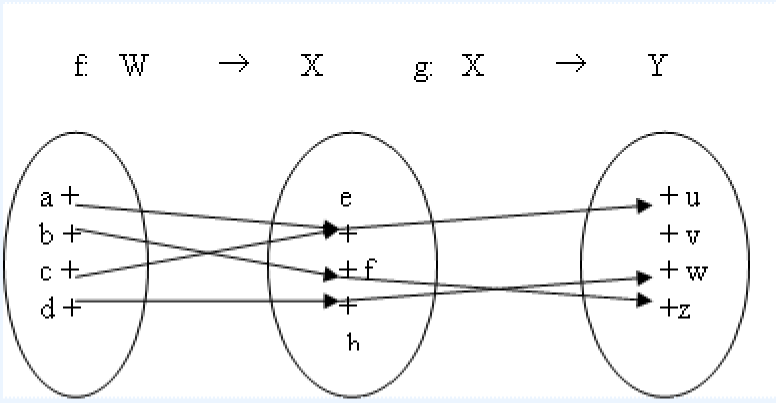
$g : X \to Y -$et pedig a következő összefüggések:

$e \to u$
$f \to z$
$h \to w$.

Ekkor a $g \circ f : W \to Y$ összetett függvényt a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ összefüggés felhasználásával nyerjük:

$a \to u$
$b \to z$
$c \to u$
$d \to w$

Ennek az összetett függvénynek az *értelmezési tartománya* a W halmaz. Például f az $a -$hoz $e -$t rendeli és g pedig $e -$hez $u -$t. Így a $g \circ f : W \to Y$ összetett függvény $a -$hoz $u -$t. stb. Lásd az ábrát.



Tétel (az **összetett függvény asszociatív törvénye**) Ha $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} Y$ összetett függvények, akkor $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Ezért felírható a $h \circ g \circ f$ formában.

2. Szürjektív, injektív és bijektív függvények

Szürjektív függvény

Definíció Legyen $f : X \to Y$ egy függvény.

Ha $T \subset Y$, akkor T teljes inverz képe az X-nek $f^{-1}(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$ részhalmaza.

Ha $S \subset X$, akkor az S képe az Y halmaznak a következő részhalmaza: $f(S) = \{f(s) : s \in S\} = \{y \in Y : \exists s \in S$ amelyre $f(s) = y\}$.

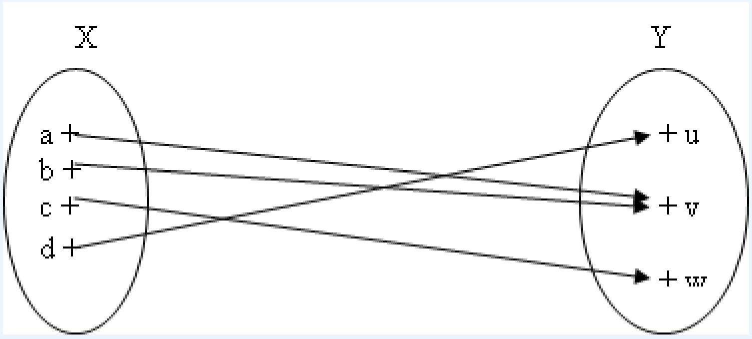
Az f függvény képe az X képe: $f(X) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in Y : \exists x \in X$ amelyre $f(x) = y\}$.

Az $f : X \to Y$ függvény **szürjektív** (vagy *onto* [1]), ha az *f* képe megegyezik az értékkészlettel $f(X) = Y$, azaz ha minden $y \in Y$ esetén $f^{-1}(y)$ egy nem üres részhalmaza $X-$ nek.

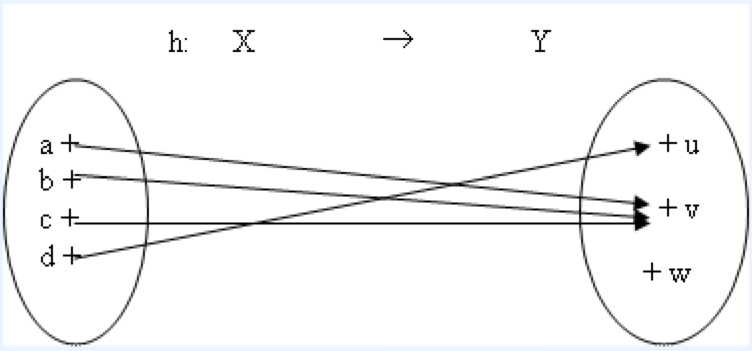
PÉLDA

Példa Legyen $X = \{a, b, c, d\}$ és $Y = \{u, v, w\}$ halmazok. Ekkor legyen adott egy szürjektív függvény: $f : X \to Y$ et az alábbiak definiálják:

$a \to v$
$b \to v$
$c \to w$
$d \to u$



Szürjektív függvény

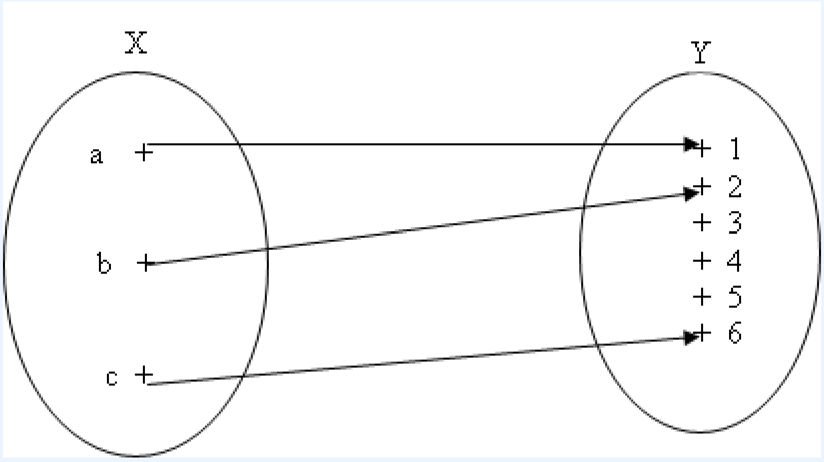


Példa nem szürjektív függvényre:
Az utóbbi $h : X \to Y$ függvény nem szürjektív, mert w -hez nincs A -nak olyan eleme amelyhez h -t rendelné.

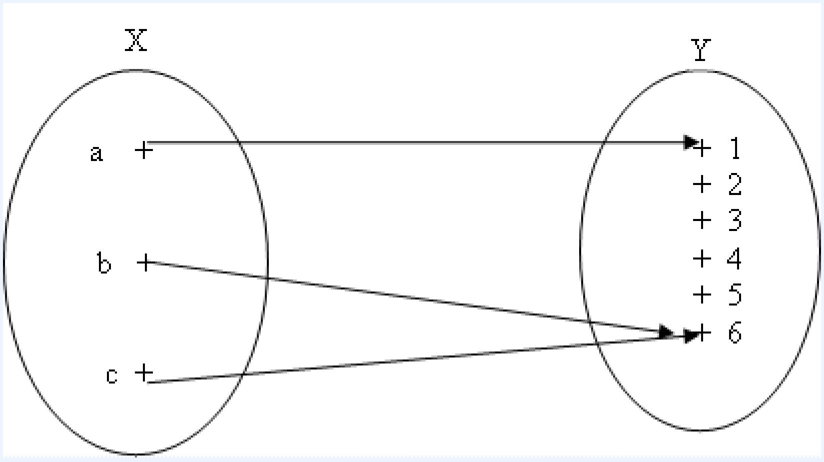
Injektív függvény

Az $f : X \to Y$ függvény **injektív**, ha $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, azaz, ha x_1 és x_2 különböző elemei $X-$ nek, akkor $f(x_1)$ és $f(x_2)$ is különböző elemei lesznek Y -nak.

PÉLDA



Példa injektív függvényre

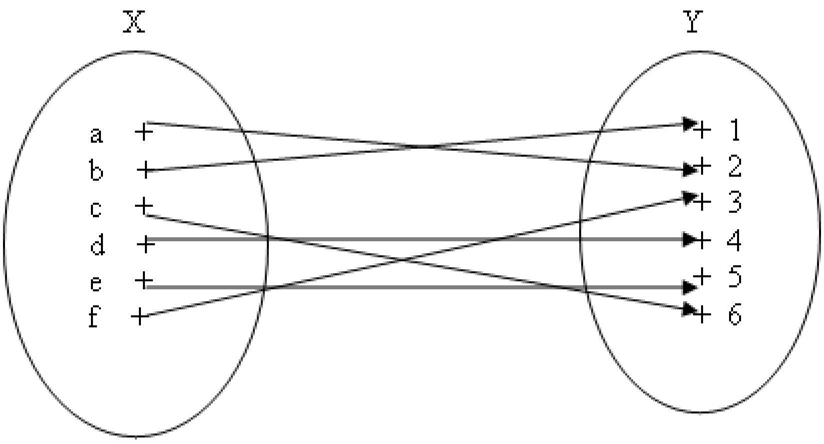


Példa nem injektív függvényre:

Bijekció

Az $f:X\to Y$ függvény **bijekció** ha f *szürjektív* és *injektív*. Ebben az esetben, létezik az $f^{-1}:Y\to X$ **inverz függvény**, amelyre $f^{-1}\circ f=I_x:X\to X$ és $f\circ f^{-1}=I_y:Y\to Y$ teljesülnek.

Megjegyezzük, hogy az $f^{-1}:Y\to X$ függvény is *bijekció* és $(f^{-1})^{-1}=f$.



A **bijekció** olyan függvény a két halmaz elemei között, amelyben minden Y-beli elemnek pontosan egy őse van. Szokták még a bijektív leképezést **kölcsönösen egyértelmű ráképezésnek** is mondani.

A bijekció két ok miatt nagyon fontos függvény:

1. egyik ok az, hogy akkor és csak akkor létezik az $f : X \to Y$ függvénynek $f^{-1} : Y \to X$ **inverz függvénye**, ha f *bijektív*.
2. másik ok pedig az, hogy ha X és Y halmazok *véges halmazok*, akkor pontosan ugyanannyi elemük van.

   Abban az esetben pedig, ha X és Y nem véges halmazok (azaz végtelen halmazok) és elemeik között létezik egy bijektív függvény, akkor azt mondjuk, hogy X-nek és Y-nak ugyanaz a **számossága**. Ezt a kérdést a későbbiekben részletesebben is megvizsgáljuk.

PÉLDA

További példák

1) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amit az $f(x) = \sin(x)$ definiál, se nem szürjektív se nem injektív.

2) Az $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ függvény, amit az $f(x) = \sin(x)$ definiál, szürjektív, de nem injektív.

3) Az $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ függvény amit az $f(x) = \sin(x)$ definiál injektív de nem szürjektív.

4) Az $f : [0, \pi/2] \to [0,1]$ függvény amit az $f(x) = \sin(x)$ definiál bijekció. ($f^{-1}(x)$ inverzet arcsin (x) jelöli.)

5) Az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ függvény definiáló $f(x) = e^x$ exponenciális függvény bijektív. ($f^{-1}(x)$ inverz függvénye pedig nem más mint az $\ln(x)$ természetes alapú logaritmus függvény.)

Megjegyzés: Nincs értelme olyan megállapításnak, hogy "$\sin(x)$ függvény". Egy függvény csak akkor van definiálva, ha megadjuk az *értelmezési tartományát* és az *értékkészletét*.

MINTAFELADAT

Feladat Adott a következő $\rho \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ megfeleltetés: $(\frac{m}{n}, m+n) \in \rho$ ahol $m, n \in \mathbb{Z}$ és $n \neq 0$.

Függvény-e ez a megfeleltetés?

Megoldás Nem függvény, mert $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ értékhez nemcsak $5 \in \mathbb{Z}$ tartozik, hanem például 15 is, mivel $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

3. Halmazok számossága

Két különböző A és B halmaz esetén felvetődik az a kérdés, hogy melyiknek van több eleme, azaz melyiknek nagyobb a **számossága**.

Ez a kérdés véges halmazok esetén könnyen megválaszolható. A kérdés akkor izgalmas ha a vizsgált halmazoknak *végtelen sok eleme* van.

Definíció Az A és B halmazokról azt mondjuk, hogy *egyenlő számosságúak*, más szóval *ekvivalensek*, ha létezik egy $f : A \to B$ *bijektív* függvény. Jele: $A \sim B$. Ezt úgy olvassuk, hogy A ekvivalens B-vel.

Tétel A halmazok ekvivalenciája *ekvivalencia reláció*.

Bizonyítás

1) Az $A \sim A$ reflexivitás nyilvánvalóan teljesül, hiszen ha az A halmaz minden eleméhez önmagát rendeljük, azaz $f : A \rightarrow A$-et úgy definiáljuk, hogy $f(x) = x$ minden $x \in A$ esetén, akkor az identikus függvényt kapjuk A-n (jele: $I_A : A \rightarrow A$) ami nyilvánvalóan bijekció.

2) Az $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ szimmetria tulajdonság pedig abból következik, hogy ha létezik egy $f : A \rightarrow B$ bijektív függvény, akkor ennek létezik $f^{-1} : B \rightarrow A$ inverz függvénye, ami szintén bijekció lesz.

3) Legyen A, B és C olyan halmazok amelyekre $A \sim B$ és $B \sim C$ teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy léteznek $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ bijektív függvények. Ekkor az $g \circ f : A \rightarrow C$ összetett függvényről könnyen belátható, bijektív függvény, így $A \sim C$. Tehát a halmazok ekvivalenciája tranzitív is.

Véges halmazok

Definíció Az A halmazt **véges halmaznak** nevezzük, ha $A = \phi$ vagy pedig ha van olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, amelyre $A \sim \{1,2,3,\ldots,n\}$. Ellenkező esetben $A -$ t végtelen halmaznak nevezzük. Ha tehát az A véges halmaz nem üres, akkor létezik egy $f : \{1,2,\ldots,n\} \rightarrow A$ bijektív függvény, ami egyenértékű azzal, hogy A felírható $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ alakban, tehát $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$.

A definíció alapján nyilvánvaló a következő állítás:

Állítás Ha az A véges és $A \sim B$, akkor B is véges és ugyanannyi eleme van mint $A -$ nak.

Végtelen halmazok

Tétel A pozitív egészek halmaza végtelen.

Bizonyítás Tételezzük fel az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy a pozitív egészek halmazának számossága véges. Ekkor egy véges sorozatba rendezhetők az elemei: ($a_1, a_2, \ldots, a_n$). Legyen $a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Ekkor $a > a_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Mivel az a egy pozitív egész, amely nem eleme az ($a_1, \ldots, a_n$) sorozatnak, így ellentmondásra jutottunk. Tehát a feltevéssel ellentétben a pozitív egészek halmaza végtelen.

Definíció Az A halmazt **megszámlálhatónak** (vagy **megszámlálhatóan végtelennek**) nevezzük, ha *ekvivalens* az $\mathbb{N}$ természetes számok halmazával, azaz: $A \sim \mathbb{N}$.

Mivel a halmazok ekvivalenciája ekvivalencia reláció, ezért ha egy halmaz ekvivalens egy megszámlálható halmazzal, akkor maga is megszámlálható és az is igaz, hogy bármely két megszámlálható halmaz egymással is ekvivalens.

A definíció alapján tehát ha egy A halmaz megszámlálható számosságú, akkor ez azt jelenti, hogy létezik egy $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ bijektív függvény, azaz ha A felírható az $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ alakban, ahol $a_n = f(n)$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ez utóbbi lényegében arra mutat rá, hogy ha az A halmaz elemei megszámlálhatók, akkor elemei sorozatba rendezhetők. Ezt tétel formájában is megfogalmazzuk.

Tétel Egy végtelen halmaz akkor és csak akkor megszámlálható számosságú, ha elemei sorozatba rendezhetők.

Bizonyítás Ha A végtelen halmaz megszámlálható számosságú, akkor elemei kölcsönösen egyértelmű módon meg van feleltetve $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ természetes számok halmazának. Jelölje a_k az A halmaznak azt az elemét amely a k természetes számhoz van hozzárendelve,

$1 \leftrightarrow a_1$

$2 \leftrightarrow a_2$

$3 \leftrightarrow a_3$

...

$k \leftrightarrow a_k$

...

az így kapott $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots)$ sorozat tartalmazza az A halmaz minden elemét és mindegyiket pontosan egyszer. Tehát az A halmaz valóban felírható az $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sorozat alakjában, ahol $a_n = f(n)$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Másrészt, ha az A halmaz elemei felírhatók az $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots)$ sorozat formájában, akkor az $f : a_k \to k$ leképezés egy bijekció, tehát az A halmaz valóban megszámlálható számosságú.

A véges halmazok is megszámlálhatók abban az értelemben, hogy elemei felírhatók véges sorozat formájában, tehát ők is sorozatba szedhetők (ti. *véges sorozatba*). Ezért az $\mathbb{N}$ természetes számok halmazát, és a vele ekvivalens $A \sim \mathbb{N}$ halmazokat szokás **megszámlálhatóan végtelen** számosságúnak is mondani. A véges halmazokat és megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazokat együtt röviden *megszámlálható halmazoknak* is szokták nevezni.

Tétel Legyen $A \subseteq B$. Ha B véges, akkor A is véges. Ha pedig A végtelen akkor (a kontrapozíció miatt) B is végtelen.

Bizonyítás Tételezzük fel, hogy B véges. Ekkor legyen $(b_1, \ldots, b_n)$ a B elemei véges sorozatba rendezve. Húzzuk át ebben a sorozatban mindazokat az elemeket amelyek nem elemei $A-$ nak. Az így kapott elemek pontosan az A elemei véges sorozatba rendezve. Tehát A is véges.

Tétel A racionális számok halmaza megszámlálható.

Bizonyítás Először megmutatjuk, hogy a pozitív racionális számok halmaza megszámlálható. Legyen n egy pozitív 1-től nagyobb egész szám. Rendezzük a számláló szerint növekvő sorrendbe mindazokat a törteket amelyekben a számláló és a nevező összege éppen n. Például $n = 6$ esetén $\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}$. Kezdjük először $n = 2$ –vel, ekkor $\frac{1}{1}$-et kapunk. Folytatva a megkezdett sort $n = 3$-al az $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$ elemekhez jutunk. Még tovább folytatva a sort $n = 4$-el $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$.

Ezt az eljárást alkalmazva: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}$,.... az összes pozitív racionális szám megjelenik a sorozatban. Végül az összes racionális szám sorba rendezéséhez a 0-át a sor elejére téve, majd a negatív és pozitív racionális számokat felváltva szerepeltetve : 0, $\frac{1}{1}$,-$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$,-$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$,-$\frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}$,-$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$,-$\frac{2}{2}$,.... végtelen sorozatba rendezve megkapjuk a racionális számokat.

Tétel A valós számok halmaza nem megszámlálható.

Bizonyítás Legyen $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ *és* $0 \leq x < 1\}$. Bebizonyítjuk, hogy az A halmaz nem megszámlálható. Ebből már következik, hogy $\mathbb{R}$ szintén nem megszámlálható. Az A –ban lévő {.1, .01, .001, .0001, . . .} részhalmaz egy-egy értelmű módon (bijektív) megfeleltethető a pozitív egészek halmazának, ezért A végtelen halmaz. Ismeretes, hogy a véges tizedes tört alakban megadható számoknak két végtelen tizedes tört alakjuk van: az egyiknek a jegyei valahonnan kezdve 0-val, a másiké 9-cel egyenlők. (Például .250000... és .2499999... ugyanazt a valós számot jelentik. Minden más valós szám tizedes tört alakja egyértelmű. (Például $\frac{1}{3}$=.3333. . .) Az egyértelműség miatt kössük ki, hogy egyetlen tizedes tört sem tartalmaz valahonnan kezdve csupa kilences számjegyet.

Tételezzük fel, hogy A megszámlálható. Ez azt jelenti, hogy A elemeit végtelen sorozatba tudtuk rendezni, legyen ez a következő:

1. $a_{11}a_{12}\ a_{13}a_{14}\ldots$
2. $a_{21}a_{22}\ a_{23}a_{24}\ldots$
3. $a_{31}a_{32}\ a_{33}a_{34}\ldots$

...

i. $a_{i1}a_{i2}\ a_{i3}a_{i4}\ldots$

...

Az első tag $.a_{11}a_{12}\ a_{13}a_{14}\ldots$, a második tag $.a_{21}a_{22}\ a_{23}a_{24}\ldots$, és így tovább. Ezután megmutatjuk, hogy akárhogyan is van összeállítva a fenti sorozat mindig találunk egy olyan $.b_1b_2\ b_3$ ... végtelen tizedes törtet amely nem szerepel a fenti felírásban. Legyen $b_k\ (k = 1,2,3,\ldots)$ olyan számjegy, amelyre $b_k \neq a_{kk}$ és $b_k \neq 9$. Így $.b_1\ b_2\ b_3\ldots$ az A halmaznak egy olyan eleme amely nem szerepel a fenti sorozatban. Ebből az következik, a feltevéssel ellentétben, hogy A nem megszámlálható.

Definíció Minden X halmazhoz hozzárendelünk egy $|X|$ *szimbólumot* úgy hogy két A és B halmaz esetén $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$ és $|\phi| = 0$ az üres halmaz számossága nulla legyen. $|X|$-et véges vagy végtelen **kardinális számnak** nevezzük aszerint, hogy X véges vagy végtelen halmaz.

4. Következtetések

Amikor egy Q állítást levezetünk, matematikai megfontolásokkal, egy másik P állításból, akkor azt mondjuk, hogy Q következik P -ből, vagy azt, hogy P *implikálja* Q-t. Egy **implikáció** tehát egy "Ha P akkor Q" alakú forma, ahol P és Q **állítások**.

Ebben a jegyzetben a "Ha P akkor Q" helyett gyakran használjuk a $P \Rightarrow Q$ jelölést. A $P \Rightarrow Q$ implikációban P a *hipotézis* és Q pedig a *konklúzió*.

Ha bizonyítani akarjuk $P \Rightarrow Q$ implikáció helyességét, akkor feltételezzük, hogy a P igaz, és használva ezt a feltételt igazoljuk Q-t. Néha könnyebb bizonyítani az előzővel egyenértékű állítást:

Q nem igaz $\Rightarrow P$ nem igaz.

Ezt a $P \Rightarrow Q$ implikáció **kontrapozíciójának** nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a matematikában a $P \Rightarrow Q$ implikációt többféleképpen is kifejezik, ezek mind ugyanazt jelentik:

- Ha P akkor Q.

- P-ből következik Q.
- P implikálja Q-t.
- P elégséges feltétele Q-nak.
- Q szükséges feltétele P-nek.

Ha $P \Rightarrow Q$ és $Q \Rightarrow P$ is teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy P ekvivalens Q-val, vagy másképpen fogalmazva P akkor és csak akkor igaz ha Q igaz, amit $P \Leftrightarrow Q$-val jelölünk.

Egy harmadik megfogalmazás: P szükséges és elégséges feltétele Q-nak. Ha bizonyítani szeretnénk a $P \Leftrightarrow Q$-t, akkor valójában két dolgot kell bizonyítanunk: $P \Rightarrow Q$-t és $Q \Rightarrow P$-t.

5. A természetes számok halmaza

A természetes számok értelmezését öt lépésben végezzük:

I. Legyen adott a halmazok egy olyan rendszere, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

- A halmazrendszerben legyen benne az üres halmaz.
- Ha a halmazrendszer tartalmaz egy H halmazt, akkor tartalmaznia kell a $H \cup \{x\}$ halmazt is, ahol x egy tetszőleges elem.

PÉLDA

Példa. A halmazrendszer például a következőképpen épülhet fel:

$\{\}$; $\{\} \cup \{a\} = \{a\}$, $\{\} \cup \{k\} = \{k\}$, $\{a\} \cup \{b\} = \{a;b\}$, $\{k\} \cup \{b\} = \{k;b\}$, $\{a;b\} \cup \{c\} = \{a;b;c\}$, $\{k;b\} \cup \{c\} = \{k;b;c\}$,...

Megjegyzés. Belátható, hogy a fenti kritériumoknak megfelelő halmazrendszer végtelen sok véges halmazból fog állni.

II. Az I. pontban előállított halmazrendszeren értelmezzük a következő relációt:

Ha az A és B két halmaz, akkor $A \sim B$ jelentse azt, hogy $|A| = |B|$.

Ez a reláció – mint láttuk – egy *ekvivalencia reláció*, az ekvivalenciarelációk – mint tudjuk – mindig létrehoznak egy *osztályozást*.

Jelen esetben tehát egy osztályba az *egyenlő számosságú* halmazok kerülnek.

III. Vegyünk ki minden osztályból tetszőlegesen egy-egy halmazt:

$$\{\},\quad \{k\},\quad \{a;b\},\quad \{k;b;c\}\ \ldots$$

Ezek az úgynevezett *osztályreprezentások*.

IV. Értelmezzük a következő relációt: Ha A és B két osztályreprezentáns halmaz, akkor $A \rho B$, ha $|A| \lhd |B|$. Ez a reláció *rendezési reláció*. Ennek a relációnak a segítségével az osztályreprezentánsokat sorba rendezzük:

$\{\}$; $\{k\}$, $\{a;b\}$, $\{a;b;c\}$, ...

Definíció Az osztályreprezentánsok rendezett sorozatában található halmazok számosságait **természetes számoknak** nevezzük.

$\{\}$;	nulla	(0)
$\{k\}$,	egy	(1)

$\{a;b\}$,	kettő	(2)
$\{a;b;c\}$,	három	(3)
...	...	...
stb.		

A jól rendezés elve

Z^+ minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme. (Gyakran ezt úgy fejezzük ki, hogy Z^+ jól rendezett.)

A matematikai indukció elve

Tétel A matematikai indukció elve. Legyen $S(n)$ egy olyan matematikai állítás (vagy több állítás) amelyben előfordul az n változó, ami pozitív egész számot jelöl.

a) Ha $S(1)$ igaz; és

b) Ha $S(k)$ igaz (valamilyen adott, de tetszőlegesen választott $k \in Z^+ - ra$), akkor $S(k+1)$ is igaz;

Ekkor $S(n)$ igaz minden $n \in Z^+$ esetén.

Bizonyítás Legyen $S(n)$ egy olyan állítás amely teljesíti az (a) és (b) feltételeket, és legyen $F = \{t \in Z^+ : S(t)$ igaz$\}$. Azt szeretnénk bizonyítani, hogy $F = \varnothing$. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy feltételezzük, hogy $F \neq \varnothing$, ezután ellentmondásra jutunk. Ekkor a jól rendezés elve szerint F minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme m. Mivel $S(1)$ igaz, ebből az következik, hogy $m \neq 1$, tehát $m > 1$, és így $m-1 \in Z^+$. Az $m-1 \notin F$ feltétel pedig azt jelenti, hogy $S(m-1)$ igaz. A (b) feltételt alkalmazva $S((m-1)+1) = S(m)$ igaz, ami ellentmond annak, hogy $m \in F$. Ez az ellentmondás abból származik, hogy $F \neq \varnothing$. Tehát, $F = \varnothing$.

Tétel Minden $n \in Z^+$ esetén $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ igaz.

Bizonyítás n=1 esetén az

$$S(n): \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

állítás $S(1): \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ alakú lesz. Így $S(1)$ teljesül, tehát az indukciós bizonyítás első lépése, vagyis a kiindulási pont, igaz. Tételezzük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra (valamilyen $k \in Z^+$ esetén), és szeretnénk a második indukciós lépést belátni, vagyis ha $S(k)$ igaz, akkor ebből kiindulva $S(k+1)$ is teljesülni fog. (Az $S(k)$ igaz volta a mi indukciós hipotézisünk.) Ahhoz, hogy $S(k+1)$ igaz legyen, azt kell megmutatnunk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

teljesül.

Ez a következőképpen történik:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+\ldots+k+(k+1) = (\sum_{i=1}^{k} i) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1),$$

itt felhasználtuk az $S(k)$ -ról, hogy igaz, a feltevés szerint.

Ugyanakkor:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

átalakítás igazolja a tétel indukciós lépésének ((b) feltétel) helyességét. Következésképpen, a matematikai indukció elve szerint $S(n)$ igaz minden $n \in Z^+$ esetén.

[1] One-to-one (angol)