KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

6

Új Magyarország Fejlesztési Terv

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

VI. Komplex számok

1. A komplex számok halmaza

A **komplex számok** olyan halmazt alkotnak amelyekben elvégezhető az *összeadás* és a *szorzás*, azaz két komplex szám összege és szorzata is komplex szám és ezek a műveletek kielégítik a következő feltételeket:

1. valós szám egyben komplex szám is, és ha α, β két valós szám, akkor ha az összegüket és a szorzatukat kiszámítjuk mint komplex számokét, akkor ugyanazt az eredményt kell kapnunk, mintha valós számokként végeznénk el a műveleteket.
2. egy olyan i -vel jelölt komplex szám, amely teljesíti az $i^2 = -1$ egyenletet.
3. komplex szám egyértelműen felírható az $a + bi$ alakban, ahol a, b valós számok.
4. Az *aritmetika szokásos törvényei*, amelyek az összeadásra és szorzásra vonatkoznak, teljesülnek.

Az alábbiakban felsoroljuk ezeket:

- Ha α, β, γ komplex számok, akkor $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, és $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
- Teljesülnek az $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma)$, és $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$ törvények.
- Teljesülnek az $\alpha\beta = \beta\alpha$, és $(\alpha + \beta = \beta + \alpha$ törvények.
- Ha 1 az egy valós számot jelöli, akkor $1\alpha = \alpha$.
- Ha 0 a nulla valós számot jelöli, akkor $0\alpha = 0$.
- Teljesül a $\alpha + (-1)\alpha = 0$ összefüggés.

A komplex számok **teste** $\mathbb{C}$ az (a, b) rendezett valós számpárokból áll, amelyben az összeadást és a szorzást a következőképpen definiáljuk:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Az hogy teljesülnek az *asszociatív* és *kommutatív törvények* az összeadásra és a szorzásra nézve, valamint hogy teljesül a *disztributivitás* is, egyszerűen következik a valós számok tulajdonságaiból.

Az **additív egységelemet**, vagyis a *zérust* a $(0,0)$ számmal definiáljuk, és az (a,b) additív inverze $(-a,-b)$. A **multiplikatív egység** pedig $(1,0)$. Keressük meg az (a,b) elem multiplikatív inverzét.

Ehhez a $(a,b)(x,y) = (1,0)$, egyenletet kell megoldani, amely a következő egyenletekkel ekvivalens:

$$ax - by = 1$$

$$bx + ay = 0$$

ezeknek a megoldása pedig:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Így a komplex számok testet alkotnak.

Tételezzük fel, hogy az $(a,0)$ alakú komplex számokat megfeleltetjük az a valós számoknak. Ebből az következik, hogy

megfeleltethető

$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0)$ $\qquad a_1+a_2$

összefüggésnek és

$(a_1,0)(a_2,0)=(a_1a_2,0)$ megfelel a_1a_2-nek.

Ebből az következik, hogy $(a,0)$ és a megőrzik az aritmetikai műveleteket, és így nem okoz zavart ha $(a,0)$-át a-val jelöljük. Ebben az értelemben azt állítjuk, hogy az $(a,0)$ alakú komplex számok *izomorfak* a valós számok halmazával, és nem különböztetjük meg őket ezután.

Ennek megfelelően azt is mondhatjuk, hogy $(0,1)$ négyzetgyöke a -1 számnak mivel

$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$

és ezért $(0,1)$ helyett használhatjuk az i jelölést. Vegyük észre, hogy

$a(b,c)=(a,0)(b,c)=(ab,ac),$

és így bármilyen komplex szám felírható a következő alakban:

$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+bi.$

Ezután a jegyzetben az utóbbi jelölést fogjuk használni.

Egyenlőség

Tekintsünk két komplex számot: $a+ib=c+id$, akkor

$$a-c=id-ib=i(d-b)$$

és, négyzetre emelve mind a két oldalt:

$$(a-c)^2=-(d-b)^2.$$

Mivel bármilyen valós szám négyzete mindig pozitív, az utóbbi egyenlet bal oldal pozitív, a jobb oldala pedig negatív. Miután csak a nulla szám lehet egyszerre negatív is és pozitív is, így azt kapjuk, hogy $a-c=0=d-b$, és $a=c$ valamint $b=d$.

Az $a+ib$ komplex szám estén a és b valós számok, a-t valós résznek és b-t pedig képzetes résznek nevezzük. Így amikor egyenlővé teszünk két komplex számot, akkor meg kell egyezniük a komplex számok valós részének és a képzetes részének is. Ez pedig két valós egyenlet lesz, egyetlenegy komplex helyett.

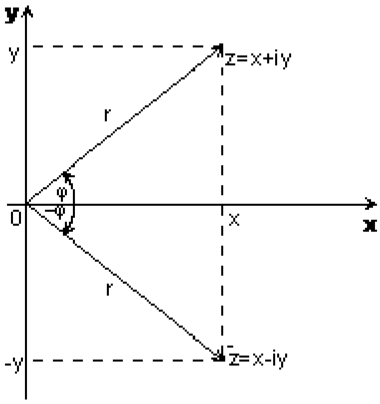
Ezt az eljárást úgy nevezzük, hogy két komplex szám valós és képzetes részét egyenlővé tesszük. Ez azért hasznos mert egy $\mathbb{C}$-beli komplex egyenlet helyett két egyenletet kapunk az $\mathbb{R}$ valós számok halmazában.

2. Műveletek és alapfogalmak összefoglalása

Jelölés Ha $z=x+iy$, ahol $x,y\in R$, akkor $\mathrm{Re}(z)=x$ és $\mathrm{Im}(z)=y$.

Tehát komplex számok a valós számokból alkotott (x,y) alakú rendezett számpárok. A továbbiakban az (x,y) számpáros felírás helyett az $x+iy$ írásmódot használjuk. Az $i=0+1i$ komplex szám neve **képzetes egység**, amelyre $i^2=-1$ (azaz $i=\sqrt{-1}$). Szokás azt mondani, hogy *x* a komplex szám *valós része*, *y* pedig a *képzetes* (*imaginárius*) része.

A $z=x+iy$ komplex számot a Descartes-féle koordinátarendszerben a $P(x,y)$ ponthoz húzható helyvektorral ábrázoljuk (1.8. ábra).



1.8. ábra

Ennek a vektornak a hossza a komplex szám **abszolút értéke**, amely

(1) $$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

módon számítható. A φ szög a komplex szám **arkusza**, amely megállapodás szerint $-\pi < \varphi \leq \pi$, vagy $0 \leq \varphi < 2\pi$. A következő egyenletekből számítható:

(2) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

A $z = x + iy$ ún. **algebrai alakban** megadott komplex szám felírható **trigonometrikus alakban** vagy **exponenciális alakban** is, azaz

(3) $$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

A $\bar{z} = x - iy$ komplex szám a *z* **konjugáltja** (1.8. ábra).

Összeg, különbség

Két komplex szám *egyenlő*, ha valós részük is egyenlő és képzetes részük is egyenlő.

A z_1 és z_2 komplex számok **összege**, ill. **különbsége**

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$, ill.

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

Szorzás

A z_1 és z_2 komplex számok **szorzata**

$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

A szorzást tehát a többtagúak szorzási osztálya szerint kell elvégezni, csak figyelembe kell venni, hogy $i^2 = -1$.

A szorzat trigonometrikus és exponenciális alakja:

(4) $$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

ahol r_1, illetve r_2 a z_1, ill z_2 abszolút értéke, φ_1, ill. φ_2 pedig a szöge.

Osztás

Az **osztást** algebrai alakban célszerű az alábbi módon elvégezni:

(5) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}.$$

Ugyanez trigonometrikus, ill. exponenciális alakban:

(6) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

ANIMÁCIÓ

Hatványozás

A komplex szám pozitív egész kitevőre való **hatványozása** algebrai alakban lehetséges a binomiális tétellel, trigonometrikus alakban pedig az ún. *Moivre-képlettel*:

(7) $$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}.$$

Megjegyezzük, hogy $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \ldots$.

Gyökvonás

Komplex számnak *n* darab **n -edik gyöke** van. A **gyökvonás**:

(8) $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

A *komplex számok*, akárcsak a valós számok, *számtestet* alkotnak.

ANIMÁCIÓ

3. A KVATERNIÓK

Definíció A **kvaterniók halmaza** egy olyan $(\mathbb{H},+,\cdot)$ két művelettel ellátott halmaz, ahol

$$\mathbb{H}=\mathbb{R}^4=\{(a,b,c,d):a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

és az összeadás valamint szorzás műveletét az alábbiak definiálják:

$$(x,y,z,w)+(a,b,c,d)=(x+a,y+b,z+c,w+d)$$

$$(x,y,z,w)(a,b,c,d)=(xa-yb-zc-wd,xb+ya+zd-wc,$$

$$xc-yd+za+wb,xd-yc-zb+wa)$$

ahol $x,y,z,w,a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Az összeadás és a szorzás a valós számnégyesen belül a jobb oldalon az $\mathbb{R}$ valós számok közötti közönséges összeadást és szorzást jelenti.

Legyen:

$$1=(1,0,0,0)$$

$$i=(0,1,0,0)$$

$$j=(0,0,1,0)$$

$$k=(0,0,0,1)$$

Megjegyezzük, hogy kissé pongyolán 1-el jelöljük mind az $1=(1,0,0,0)$ vektort mind pedig az 1 valós számot. Az $\{1,i,j,k\}$ vektort a lineáris algebrában az $\mathbb{R}^4$ bázisának nevezzük. Ez azt jelenti, hogy definiálva van az $a\in\mathbb{R}$ és $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$ között egy skalár és vektor közötti művelet

$$a(x,y,z,w)=(ax,ay,az,aw),$$

és a $q=(x,y,z,w)$ kvaternió egyértelműen felírható a következő formában

$$q=x1+yi+zj+wk.$$

Ha pedig bevezetjük az $x=x1$ egyszerűsítést akkor a következőt kapjuk:

$$q=x+yi+zj+wk.$$

Az összeadás ebben az esetben az
$$(x+yi+zj+wk)+(a+bi+cj+dk)=(x+a)+(y+b)i+(z+c)j+(w+d)k$$
alakban írható.

Az $1, i, j, k$ báziselemek szorzata az:
$1q=q1=q$ minden $q \in H$ esetén,
$i^2=j^2=k^2=-1,$
$ij=-ji=k,$
$jk=-kj=i,$
$ki=-ik=j$
egyenletekkel definiálható.

Használjuk fel ezeket az összefüggéseket, a disztributív törvényt és azt a tényt, hogy ha q_1 és q_2 tetszőleges kvaterniók, és $a \in \mathbb{R}$ akkor
$$a(q_1q_2)=(aq_1)q_2=q_1(aq_2),$$
teljesül, ezután könnyen kiszámítható két kvaternió $q_1=x+yi+zj+wk$ és $q_2=a+bi+cj+dk$ szorzata.

Ha $\alpha=a+bi+cj+dk$ ahol $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ definiáljuk az $\overline{\alpha}=a-bi-cj-dk$ mennyiséget, ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy
$$\alpha\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\alpha=a^2+b^2+c^2+d^2 \in R.$$

Ekkor, ha $\alpha \neq 0,$ akkor α-nak létezik inverze úgy, hogy
$$\alpha^{-1}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^{-1}\overline{\alpha}.$$

Így tehát $\mathbb{H}$ egy *ferdetest* (azt mondjuk, hogy $\mathbb{H}$ egy *division algebra* az $\mathbb{R}$ felett), azaz nem kommutatív test.

Megjegyezzük, hogy minden eddigi megállapítás igaz marad, ha $\mathbb{R}$ helyett bármilyen másik testet helyettesítünk be, olyat amelyre érvényes a
$$(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$$
implikáció, (vagy ezzel ekvivalens módon -1 nem egyenlő két négyzetszám összegével).

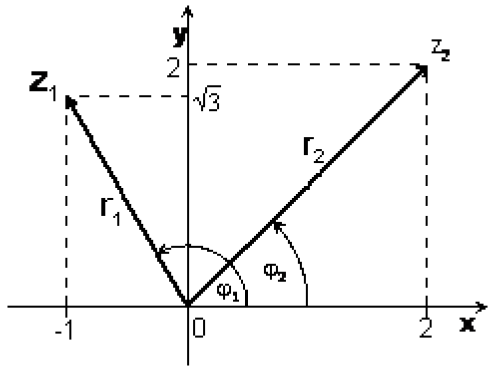
Például, a "*racionális kvaterniók*" $a+bi+cj+dk$ ahol $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ egy 4-dimenziós *division* $\mathbb{Q}$-algebra.

4. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ○ nem láthatók

- **1.** Írjuk fel a $z_1=-1+\sqrt{3}i$ és $z_2=2+2i$ komplex számokat trigonometrikus és exponenciális alakban, majd számítsuk ki a z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$ összeget, különbséget, szorzatot és hányadost.

Megoldás. Mindenekelőtt ábrázoljuk a két komplex számot (1. 9. ábra). Az abszolút értékek:
$$r_1=|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=2,$$
$$r_2=|z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$



1.9. ábra

A szögek: $\cos\varphi_1 = \frac{-1}{2}$, $\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $\varphi_1 = 120^o$, azaz $\frac{2\pi}{3}$, $\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ahonnan $\varphi_2 = 45^o$, azaz $\frac{\pi}{4}$.

A két komplex szám algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakja:

$$z_1 = -1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$z_2 = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Megjegyezzük, hogy a trigonometrikus alaknál a szögeket fokokban is használhatjuk. Például

$$z_1 = -1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos 120^o + i\sin 120^o\right).$$

A kijelölt műveletek:

$$z_1 + z_2 = (-1+\sqrt{3}\,i) + (2+2i) = 1 + (\sqrt{3}+2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (-1+\sqrt{3}\,i) - (2+2i) = -3 + (\sqrt{3}-2)i,$$

$$z_1 z_2 = (-1+\sqrt{3}\,i)(2+2i) = -2-2i+2\sqrt{3}\,i+2\sqrt{3}\,i^2 = -2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2+2i}\cdot\frac{2-2i}{2-2i} = \frac{-2+2i+2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2}{4+4} = \frac{-2+2\sqrt{3}+(2+2\sqrt{3})i}{8} =$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{3}}{8} + \frac{2+2\sqrt{3}}{8}i = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{3}) + \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)i.$$

Az osztásnál felhasználtuk az (5) képletet, vagyis a tört számlálóját és nevezőjét szoroztuk a nevező konjugáltjával.

A szorzást és az osztást végezzük el a trigonometrikus alak felhasználásával. A (4) és (6) képlet szerint (fokokat használva):

$$z_1 z_2 = 2\cdot 2\sqrt{2}\left[\cos(120^o+45^o)+i\sin(120^o+45^o)\right] = 4\sqrt{2}(\cos 165^o + i\sin 165^o),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\left[\cos(120^o-45^o)+i\sin(120^o-45^o)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 75^o + i\sin 75^o).$$

Az exponenciális alaknál használjunk radiánt. Ekkor

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

- **2.** A $z_1 = -1+\sqrt{3}\,i$ -nek megfelelő vektort forgassunk el 45^o -kal és nyújtsuk meg háromszorosára. Írjuk fel az ennek megfelelő komplex számot.

Megoldás. A z_1 komplex számot meg kell szorozni egy olyan z_2 komplex számmal, amelynek abszolút értéke 3, szöge pedig 45^o. Célszerű tehát a trigonometrikus alakot használni. Az előző példa adatait is felhasználva:

$$w = z_1 z_2 = 2(\cos 120^o + i \sin 120^o) \cdot 3(\cos 45^o + i \sin 45^o) =$$
$$= 6(\cos 165^o + i \sin 165^o) \cdot$$

- **3.** Írjuk fel a $z_1 = 8(\cos 225^o + i \sin 225^o)$ és $z_2 = 5(\cos 270^o + i \sin 270^o)$ komplex számokat algebrai alakban.

Megoldás. Végezzük el a kijelölt szorzásokat:

$$z_1 = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\, i\,; \qquad z_2 = 5(0 - 1 \cdot i) = 0 - 5i = -5i \cdot$$

- **4.** Írjuk fel az alábbi speciális helyzetű komplex számokat trigonometrikus alakban: $z_1 = 3$, $z_2 = i$, $z_3 = 2i$, $z_4 = -2$, $z_5 = -i$.

Megoldás. Az 1.10. ábráról mind az öt komplex szám abszolút értéke és szöge leolvasható. Így

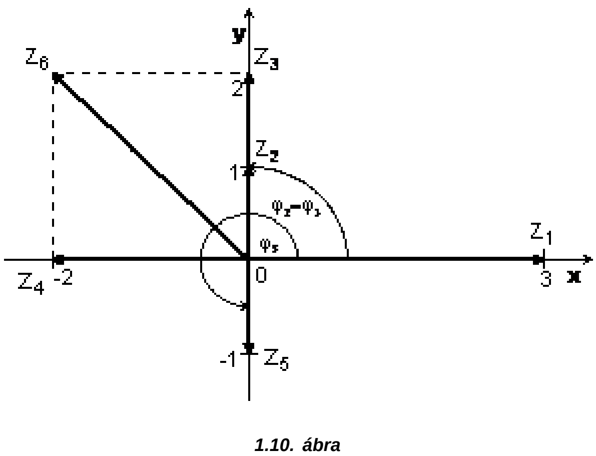
$$z_1 = 3 = 3 + 0i = 3(\cos 0^o + i \sin 0^o),$$

$$z_2 = i = 0 + i = 1(\cos 90^o + i \sin 90^o),$$

$$z_3 = 2i = 0 + 2i = 2(\cos 90^o + i \sin 90^o),$$

$$z_4 = -2 = -2 + 0i = 2(\cos 180^o + i \sin 180^o),$$

$$z_5 = -i = 0 - i = 1(\cos 270^o + i \sin 270^o) \cdot$$



1.10. ábra

5. Számítsuk ki az alábbi hatványokat:

$$i^{73},\ (1+i)^4,\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{181},\ 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)^{42}.$$

Megoldás. $i^{73} = i^{72}\cdot i = (i^2)^{36}\cdot i = (-1)^{36}\cdot i = 1\cdot i = i$;

$(1+i)^4 =$ (a binomiális tétellel) $= 1 + \binom{4}{1}i + \binom{4}{2}i^2 + \binom{4}{3}i^3 + \binom{4}{4}i^4 =$

$= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$,

$(1+i)^4 =$ (egyszerűbben) $= \left[(1+i)^2\right]^2 = (1+2i+i^2)^2 = (1+2i-1)^2 =$

$= (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

$(1+i)^4 =$ (*a Moivre-képlettel*) $= \sqrt{2}^4(\cos 4\cdot 45^\circ + i\sin 4\cdot 45^\circ) =$

$= 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(-1+0i) = -4$. Itt felhasználtuk, hogy $1+i$ abszolút értéke $\sqrt{2}$, szöge pedig 45°;

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{181} = (r = 1,\ \varphi = \frac{4\pi}{3}$, a (7) képlet szerint) =

$= 1^{181}\left(\cos 181\cdot\frac{4\pi}{3} + i\sin 181\cdot\frac{4\pi}{3}\right) =$

$= \cos\left(180\cdot\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(180\cdot\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right) =$

$= \cos\left(120\cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(120\cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} =$

$= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)^{42} = 2(\cos 42\cdot 20^\circ + i\sin 42\cdot 20^\circ) =$

$= 2(\cos 840^\circ + i\sin 840^\circ) = 2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = -1+\sqrt{3}i$.

6. Számítsuk ki $\sqrt[6]{32(-\sqrt{3}-i)}$ értékeit.

Megoldás. $r = \left|32(-\sqrt{3}-i)\right| = 32\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 32\sqrt{3+1} = 64$.

$\cos\varphi = \frac{-32\sqrt{3}}{64} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 210^\circ.$

A (8) formulát használva:

$$w = \sqrt[6]{32(-\sqrt{3}+i)} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{210^\circ + k360^\circ}{6} + i\sin\frac{210^\circ + k360^\circ}{6}\right),\ k = 0,1,2,3,4,5.$$

Kiszámítjuk *w* értékeit a $k = 0,1,2,3,4,5$ esetekre:

$k = 0 \Rightarrow w_1 = 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)$, $k = 1 \Rightarrow w_2 = 2(\cos 95^\circ + i\sin 95^\circ)$,

$k = 2 \Rightarrow w_2 = 2(\cos 155^\circ + i\sin 155^\circ)$, $k = 3 \Rightarrow w_3 = 2(\cos 215^\circ + i\sin 215^\circ)$,

$k = 4 \Rightarrow w_5 = 2(\cos 275^\circ + i\sin 275^\circ)$, $k = 5 \Rightarrow w_6 = 2(\cos 335^\circ + i\sin 335^\circ)$.

7. Oldjuk meg az $x^3 + 8 = 0$ egyenletet.

Megoldás. $x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-8+0i}$. Tehát a -8 komplex számból kell harmadik gyököt vonni. Ennek abszolút értéke 8, szöge pedig 180°. A (8) képlet szerint

$$x = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{180^\circ + k360^\circ}{3} + i\sin\frac{180^\circ + k360^\circ}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

A gyökök: $x_1 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$,

$x_2 = 2(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 2(-1 + 0i) = -2$,

$x_3 = 2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$.

8. Oldjuk meg az $ix^4 + x = 0$ egyenletet.

Megoldás. A bal oldalon *x* -et kiemelve, az $x(ix^3 + 1) = 0$ egyenletet kapjuk. Innen az egyik gyök $x_1 = 0$. Az $ix^3 + 1 = 0$ egyenletből $ix^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{-i}{-1} = i$, ahonnan $x = \sqrt[3]{i}$. Mivel $|i| = 1$, *i* szöge pedig 90°, ezért a (8) képlet szerint

$$x = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{90^\circ + k360^\circ}{3} + i\sin\frac{90^\circ + k360^\circ}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$k = 0 \Rightarrow x_2 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

$k = 1 \Rightarrow x_3 = \cos 150^\circ + i\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

$k = 2 \Rightarrow x_4 = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ = 0 - i = -i$,

Tehát az egyenlet gyökei: $0,\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -i$.

5. Feladatok

1. Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakban a $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -10^3 i$, $z_4 = 1{,}5$, $z_5 = -0{,}8$ komplex számokat.

2. Írja fel algebrai alakban a $z_1 = 6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$, $z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, $z_3 = 10^{-1}(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_4 = 4e^{i4\pi/3}$ komplex számokat.

3. Számítsa ki a $z_1 + z_2$ összeget és a $z_1 z_2$ szorzatot, ha

a) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 + i$

b) $z_1 = \overline{2+i}$; $z_2 = 2 - i$

c) $z_1 = a + ib$; $z_2 = a - ib$

4. Számítsa ki az alábbi szorzatokat:

a) $2i(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$;

b) $4e^{i2\pi/3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1-i)$.

5. A $z = 3 - 2i$ komplex számnak megfelelő vektort forgassa el 120° –kal, és nyújtsa meg kétszeresére. Írja fel az így keletkezett vektort mint komplex számot.

6. Mit jelent geometriailag az, ha a *z* komplex számot szorozzuk az i, $-2i$, i^2, $1+i$, $3e^{i\pi/10}$ komplex számok valamelyikével?

7. Végezze el a következő osztásokat:

a) $\frac{3+7i}{2-5i}$;

b) $\frac{1}{1+i}$;

c) $\frac{\overline{1+i}}{1-i}$;

d) $\frac{6(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ)}{3(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)}$;

e) $\frac{e^{i3\pi/4}}{1+i}$;

f) $\frac{e^{i\pi/2}}{i}$;

g) $\frac{2+i}{1+i+2i^2}$;

h) $\frac{i(1+e^{i\pi})(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)}{(6+5i)(18i+7)}$.

8. Végezze el a következő hatványozásokat:

a) $(-1+i)^6$;

b) $\left(\frac{2e^{i3\pi/4}}{1+i}\right)^{16}$;

c) $\left[i(-1-i)\right]^{8}$;

d) $\left[\overline{(2-2\sqrt{3}i)}\,\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{12}$;

e) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$;

f) $(i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+\ldots+i^{132}+i^{133})^{1003}$.

9. Legyen $z=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$. Számítsa ki az alábbiakat:

a) $\frac{1}{z}$;

b) $z^6+z^{12}+z^{18}+z^{24}$;

c) $\sqrt[4]{z}$.

10. Végezze el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}$;

b) $\sqrt[4]{i}$;

c) $\sqrt[6]{1}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$;

e) $\sqrt{-4}$;

f) $\sqrt[3]{i(1+i)}$;

g) $\sqrt[5]{\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ}$;

h) $\sqrt[4]{ie^{i\pi/4}(1+i)^2}$.

11. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^2-6x+25=0$;

b) $x^3+x=0$;

c) $x^2-x+0{,}2536=0$;

d) $x^2+(1-2i)x-2i=0$;

e) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$;

f) $z^5-81iz=0$;

g) $z^6=1$;

h) $(1+i)z^4=1-i$.

12. Egy szabályos háromszög két csúcsa a $z_1=1$ és $z_2=2+i$ pontban van. Határozza meg a harmadik csúcsot.

13. Egy szabályos *n* –szög két szomszédos csúcsa a z_1 és z_2 pontokban van. Határozza meg a következő csúcsot.

14. Fejezze ki a $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 3\varphi$ és $\sin 4\varphi$ függvényeket $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$ függvényeként.