KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

8

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

VIII. Vektorok

1. Vektor

Vektoron irányított szakaszt értünk. Jelölése: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ stb.

Vektorok hossza

A vektor **abszolút értéke** az irányított szakasz hossza. Ha a vektor hossza egységnyi, akkor azt **egységvektornak** nevezzük.

Az **a** vektor egységvektora:

(1) $$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ vektorok lineáris kombinációja:

(2) $$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_r\mathbf{a}_r,$$

ahol $k_1, k_2, \ldots, k_r$ valós számok.

Bázisvektor, helyvektor, nullavektor

A tér minden **v** vektora felírható

(3) $$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

módon, ahol $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok, amelyek a térbeli derékszögű koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamosak. Ezeket **bázisvektoroknak** nevezzük. A v_1, v_2, v_3 számok a **v** vektor **koordinátái**. Ennek megfelelően a **v** vektor felírható

(4) $$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

alakban is. Ezért a vektor értelmezhető rendezett számhármasként is. A (3) és (4) megadás ugyanazt jelenti.

A $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektor mint irányított szakasz úgy képzelhető el, hogy a szakasz kezdőpontja az origó, végpontja pedig a $P(v_1, v_2, v_3)$ pont. Ekkor **v** neve **helyvektor**.

A **v** vektor abszolút értéke

(5) $$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorok koordinátás alakja:

$$\mathbf{i} = (1; 0; 0), \quad \mathbf{j} = (0; 1; 0), \quad \mathbf{k} = (0; 0; 1).$$

A $(0; 0; 0)$ vektor neve **nullavektor** (**zérusvektor**). Jele **0**.

Két vektor egyenlő, ha koordinátáik rendre egyenlők.

Legyen $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=b_1,b_2,b_3)$. Ekkor

$\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$,

$k\,\mathbf{a}=(k\,a_1,k\,a_2,k\,a_3)$, k tetszőleges szám.

A skalárszorzat

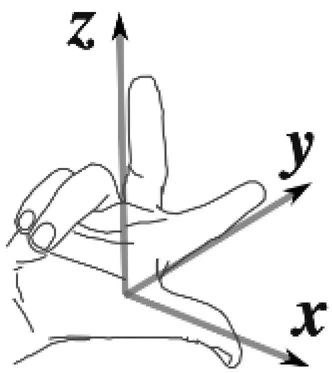
Az **a** és **b** vektorok **skaláris szorzatának** értelmezése és kiszámítási módja:

(6) $$\mathbf{a}\,\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

ahol φ a két vektor által közrezárt szög. Innen látható, hogy ha a két vektor merőleges egymásra, akkor skaláris szorzatuk nulla (mert $\cos 90^\circ=0$). A skaláris szorzat eredménye egy szám (skalár). A (6) értelmezésből látható, hogy

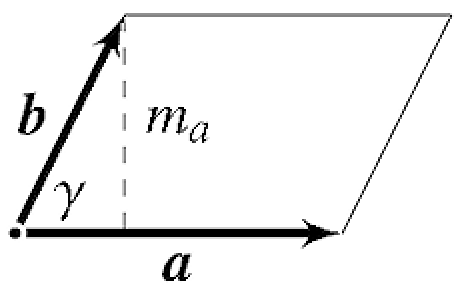
(7) $$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}.$$

Az **a** és **b** vektorok $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ **vektorális szorzata** olyan vektor, amely merőleges mind az **a** mind a **b** vektorra, hossza $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\varphi$, továbbá $\mathbf{a},\mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben *jobbsodrású rendszert* alkotnak.



Egy térbeli vektorhármas kétféle rendszert alkothat: jobbsodrásút vagy balsodrásút.

A vektorális szorzat eredménye vektor. Abszolút értéke az **a** és **b** vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő.



A vektorális szorzat
*Abszolút értéke az **a** és **b** vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő.*

Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorális szorzat kiszámítása az

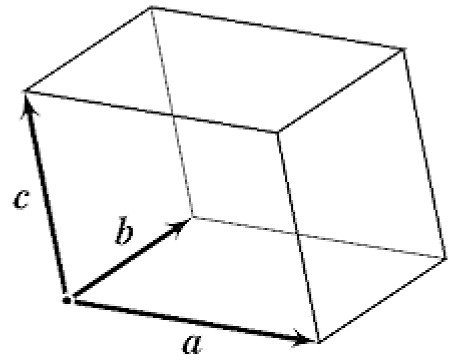
(8) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

módon történhet.

Az **a**, **b** és **c** **vegyes szorzata**:

(9) $$\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

A vegyes szorzat értéke egy szám (skalár), amelynek abszolút értéke a három vektor által kifeszített hasáb térfogatával egyenlő.



Vektorok vegyes szorzata
Abszolút értéke a három vektor által kifeszített hasáb térfogatával egyenlő.

Ha a három vektor egy síkban van, akkor vegyes szorzatuk nulla (a hasáb térfogata nulla).

Egyenes vektoregyenlete

Legyen $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tetszőleges vektor, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pedig az origóból a $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pontba mutató vektor (helyvektor). A P_0 pontra illeszkedő, a **v** vektorral párhuzamos **egyenes egyenlete** (vektoregyenlete):

(10) $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty .$$

A **v** vektor neve **irányvektor**.

Ugyanennek az egyenesnek **skaláris egyenletrendszere**

(11) $$x = x_0 + t v_1,$$
$$y = y_0 + t v_2,$$
$$z = z_0 + t v_3,$$

míg a *t* paramétert nem tartalmazó egyenletrendszere:

(12)

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}, \quad v_1 v_2 v_3 \neq 0.$$

Sik vektoregyenlete

Legyen $\mathbf{n}=(A,B,C)$ tetszőleges vektor. A P_0 pontra illeszkedő, az **n** vektorra merőleges **sík egyenlete** (vektoregyenlete)

(13) $$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{n}=0,$$

ahol $\mathbf{r}_0$ a P_0 pont helyvektora.

Az **n** vektor neve **normálvektor**.

Ha a (13) egyenletben szereplő **r** vektor koordinátái x,y,z, akkor a skaláris szorzás elvégzése után a **sík általános egyenletéhez** jutunk:

(14) $$Ax+By+Cz-D=0,$$

ahol $D=\mathbf{r}_0\,\mathbf{n}=Ax_0+By_0+Cz_0$.

A sík **Hesse-féle normálegyenlete**:

(15) $$\frac{A}{|\mathbf{n}|}x+\frac{B}{|\mathbf{n}|}y+\frac{C}{|\mathbf{n}|}z-\frac{D}{|\mathbf{n}|}=0.$$

Itt $D/|\mathbf{n}|$ a síknak az origótól való előjeles távolsága.

A $P_1(x_1,y_1,z_1)$ és $P_2(x_2,y_2,z_2)$ pontok **távolsága**

(16) $$d:=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Az **a** vektornak a **b** vektorra eső vetületvektora:

(17) $$\left(\mathbf{a}\,\mathbf{b}^0\right)\mathbf{b}^0=\frac{1}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b})\mathbf{b}$$

(ha a vetítés a **b** vektorra merőlegesen történik).

n-dimenziós vektorok

Az eddig megismert térbeli, azaz háromdimenziós vektor általánosítható az *n*-dimenziós esetre. Az $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ rendezett szám-*n*-est **n-dimenziós vektornak** nevezzük. Az $a_1,a_2,\dots,a_n$ számok a vektor koordinátái. A vektoroknak ebben a halmazában az összeadást, a számmal való szorzást (így a kivonást is) és a skaláris szorzást ugyanúgy értelmezzük, mint a háromdimenziós vektorok körében. A vektorális szorzást itt nem értelmezzük.

Az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_r$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha a

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\dots+k_r\mathbf{a}_r=\mathbf{0}$$

egyenlőség csak a $k_1=k_2=\dots=k_r=0$ értékekkel teljesül. Ellenkező esetben a vektorok **lineárisan függők**.

Az n-dimenziós térben legfeljebb n, a háromdimenziós térben legfeljebb három lineárisan független vektor adható meg.

Bázistranszformáció

Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *bázisvektorokat* jelölje most $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. De nemcsak ez a vektorhármas választható bázisnak, hanem minden olyan vektorhármas, amely lineárisan független vektorokból áll (azaz nincsenek egy síkban). Legyen például három ilyen vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Ekkor a tér bármelyik **v** vektora előállítható ezek lineáris kombinációjaként is, azaz

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_2 = v_1^*\mathbf{a}_1 + v_2^*\mathbf{a}_2 + v_3^*\mathbf{a}_3$$

módon. Ez azt jelenti, hogy egyik bázisból át tudunk térni egy másik bázisba. Ez úgy történik, hogy az eredeti bázis vektorait egyenként kicseréljük a másik bázis vektoraira. Ezt az eljárást **bázistranszformációnak** nevezzük. Ennek lényege a következő:

Legyen $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3.$$

Itt mindegyik vektor az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisban van felírva. Cseréljük ki az $\mathbf{e}_1$ vektort az $\mathbf{a}_2$ vektorral. Szokás azt is mondani, hogy vonjuk be a bázisba az $\mathbf{a}_2$ vektort az $\mathbf{e}_1$ vektor helyett és írjuk fel a **b** vektort ebben az $\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ új bázisban. Ehhez fejezzük ki a második egyenletből $\mathbf{e}_1$-et:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{a_{12}}\left(\mathbf{a}_2 - a_{22}\mathbf{e}_2 - a_{32}\mathbf{e}_3\right), \quad a_{12} \neq 0.$$

Helyettesítsük ezt be a **b** vektorba $\mathbf{e}_1$ helyébe. Ekkor

$$\mathbf{b} = \frac{b_1}{a_{12}}\left(\mathbf{a}_2 - a_{22}\mathbf{e}_2 - a_{32}\mathbf{e}_3\right) + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 = \tag{18}$$

$$= \frac{b_1}{a_{12}}\mathbf{a}_2 + \left(b_2 - \frac{b_1}{a_{12}}a_{22}\right)\mathbf{e}_2 + \left(b_3 - \frac{b_1}{a_{12}}a_{32}\right)\mathbf{e}_3.$$

Innen a **b** vektor új koordinátái leolvashatók.

Ez a csere nyilván csak akkor hajtható végre, ha $a_{12} \neq 0$.

Ezután kicseréljük az $\mathbf{e}_2$, majd az $\mathbf{e}_3$ vektort, ha az egyáltalán lehetséges. A feladatot célszerű táblázatosan megoldani.

2. Mintapéldák

Megoldások: ⊙ láthatók ○ nem láthatók

1. Legyen $\mathbf{a} = (3; -8; 10)$, $\mathbf{b} = (-3; 4; 0)$.

Ekkor

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{173}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3; -8; 10) + (-3; 4; 0) = (0; -4; 10),$$

$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(6;-12;10)$, $\quad 5\mathbf{a}=5(3;-8;10)=(15;-40;50)$,

$5\mathbf{a}+2\mathbf{b}=(15;-40;50)+(-6;8;0)=(9;-32;50)$,

$$\mathbf{a}^0=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{1}{\sqrt{173}}(3;-8;10)=\left(\frac{3}{\sqrt{173}};\frac{-8}{\sqrt{173}};\frac{10}{\sqrt{173}}\right).$$

2. Legyen $\mathbf{a}=(-2;\sqrt{3};3)$, $\mathbf{b}=(1;-2\sqrt{3};2)$. Számítsuk ki

a) a két vektor skaláris szorzatát;

b) a két vektor által közrezárt szöget;

c) az **a** vektor és a koordinátatengelyek által közrezárt szögeket.

Megoldás

Használjuk a (6) formulát:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}=(-2;\sqrt{3};3)\,(1;-2\sqrt{3};2)=-2-6+6=-2;$$

A (7) képlet alapján: $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{16}\sqrt{17}}=\dfrac{-1}{4\sqrt{17}}=-0{,}06063$.

Innen $\varphi\approx 93{,}4762^{\circ}$.

c) Az a vektor egységvektora: $\mathbf{a}^0=\left(-\dfrac{2}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4}\right)$. Ennek koordinátái rendre az x,y,z tengelyekkel közrezárt szögek koszinuszai (az ún. iránykoszinuszok), azaz

$$\cos\alpha=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{4},\quad \cos\gamma=\frac{3}{4}.$$

Tehát a szögek: $\alpha=120^{\circ}$, $\beta\approx 64{,}34^{\circ}$, $\gamma\approx 41{,}41^{\circ}$.

3. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{u}=(120;50;-20)$ és $\mathbf{v}=(50;0;300)$ vektorok merőlegesek egymásra.

Megoldás. $\mathbf{uv}=(120;50;-20)(50;0;300)=6000+0-6000=0$. Mivel a két vektor skaláris szorzata nulla, ezért merőlegesek egymásra.

- **4.** Számítsuk ki az $\mathbf{a}=(2;-1;5)$ és $\mathbf{b}=(0;3;2)$ vektorok vektorális szorzatát, majd a két vektor által kifeszített paralelogramma területét.

Megoldás

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&-1&5\\0&3&2\end{vmatrix}=\mathbf{i}(-2-15)-\mathbf{j}(4-0)+\mathbf{k}(6+0)=-17\mathbf{i}-4\mathbf{j}+6\mathbf{k}=(-17;4;6).$$

A paralelogramma területe: $T=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\sqrt{(-17)^2+(-4)^2+6^2}=\sqrt{341}$.

- **5.** Számítsuk ki az $\mathbf{a}=(3;0;-2)$, $\mathbf{b}=(2;1;4)$, $\mathbf{c}=(1;-1;2)$ vektorok vegyes szorzatát. Mekkora a három vektor által kifeszített hasáb térfogata ?

Megoldás. Az $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}$ vegyes szorzatot előbb kiszámítjuk az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ értelmezés alapján:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (2; -16; 3)$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (2; -16; 3)\,(1; -1; 2) = 2 + 16 + 6 = 24.$$

Most kiszámítjuk determinánssal:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2+4) - 0 - 2(-2-1) = 18 + 6 = 24.$$

A hasáb térfogata a vegyes szorzat abszolút értéke: $V = |24| = 24$.

- **6.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0\,(5; 2; -6)$ pontra és párhuzamos a $\mathbf{v} = (4; -1; 3)$ vektorral.

Megoldás. A (10) képlet szerint az egyenes vektoregyenlete:

$\mathbf{r} = (5; 2; -6) + t(4; -1; 3)$, azaz $(x, y, z) = (5; 2; -6) + t(4; -1; 3)$.

Innen, a megfelelő koordináták egyenlőségéből felírható az egyenes (11) alakú skaláris egyenletrendszere:

$x = 5 + 4t,$

$y = 2 - t,$

$z = -6 + 3t.$

Mindhárom egyenletből kifejezve a *t* paramétert és azokat egyenlővé téve egymással, adódik az egyenes (12) alakú egyenletrendszere:

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+6}{3}.$$

- **7.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P_1\,(2; -4; 1)$ és $P_2\,(3; -2; 6)$ pontokra.

Megoldás. Jelen esetben az egyenes irányvektora a

$\mathbf{v} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (3; -2; 6) - (2; -4; 1) = (1; 2; 5)$ vektor, míg $\mathbf{r}_0$ vektornak választhatjuk akár az $\mathbf{r}_1$, akár az $\mathbf{r}_2$ vektort. Legyen $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = (2; -4; 1)$. Így az egyenes (11) alakú egyenlete (egyenletrendszere):

$x = 2 + t,$

$y = -4 + 2t,$

$z = 1 + 5t.$

- **8.** Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0\,(5; -3; 8)$ pontra és merőleges az $\mathbf{n} = (4; -5; 2)$ vektorra. Mekkora a sík és az origó távolsága ?

Megoldás. Jelen esetben $\mathbf{r}_0 = (5; -3; 8)$. A sík (14) alakú egyenlete:

$4x - 5y + 2z - (4\cdot 5 - 5\cdot(-3) + 2\cdot 8) = 0$, azaz

$4x - 5y + 2z - 51 = 0$.

A normálvektor abszolút értéke: $|\mathbf{n}| = \sqrt{45}$.

A sík origótól való távolsága: $\frac{|D|}{|n|} = \frac{|-51|}{\sqrt{45}} = \frac{51}{\sqrt{45}}$.

- **9.** Írjuk fel a $P_1(2; 1; 3)$, $P_2(-1; 3; 4)$, $P_3(2; 0; 1)$ pontokra illeszkedő sík egyenletét.

Megoldás. Először meghatározzuk a sík normálvektorát. Ez nyilván merőleges mind az $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ vektorra, mind az $(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$ -vektorra. Így

$$\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = (-3; 2; 1) \times (0; -1; -2) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-4+1) - \mathbf{j}(6-0) + \mathbf{k}(3-0) = -3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (-3; -6; 3).$$

P_0 pontnak választhatjuk a P_1, P_2, P_3 pontok bármelyikét. Legyen ez most a P_1 pont, azaz legyen $\mathbf{r}_0 = (2; 1; 3)$. Így a sík (14) alakú egyenlete:

$$-3x - 6y + 3z - (-6 - 6 + 9) = 0.$$

Célszerű (-3) -mal osztani az egyenlet mindkét oldalát. Végül a sík egyenlete:

$$x + 2y - z - 1 = 0.$$

- **10.** Írjuk fel a $8x - 4y + 5z - 20 = 0$ sík egyik normálvektorát. Mekkora az origó és a sík távolsága?

Megoldás. Egyik normálvektor koordinátái az egyenlet x, y, z változóinak együtthatói, azaz $\mathbf{n} = (8; -4; 5)$. De normálvektor ennek akárhányszorosa, a $k\mathbf{n}$ vektor is, mert az állandóval való szorzás nem változtat a merőlegességen. Az origó és a sík távolsága: $20 / |\mathbf{n}| = 20 / 105$.

11. Számítsuk ki a $P_1(8; 2; -5)$ és $P_2(-1; 3; 0)$ pontok távolságát.

Megoldás. A (16) képlet szerint

$$d = \sqrt{(-1-8)^2 + (3-2)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{107}.$$

12. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (-3; 5; 1)$ vektornak a $\mathbf{b} = (2; 1; -4)$ vektorra eső vetületvektorát.

Megoldás. A (17) képletet használjuk.

$$\frac{1}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{ab})\mathbf{b} = \frac{1}{21}(-6 + 5 - 4)(2; 1; -4) = \frac{-5}{21}(2; 1; -4).$$

13. Legyenek $\mathbf{a} = (6; -1; 4; 9)$ és $\mathbf{b} = (3; 2; -1; 5)$ négydimenziós vektorok.

Ekkor

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (6;-1;4;9)+(3;2;-1;5) = (9;1;3;14)$,

$3\mathbf{a}+2\mathbf{b} = 3(6;-1;4;9)+2(3;2;-1;5) = (24;1;10;37)$,

$\mathbf{ab} = (6;-1;4;9)(3;2;-1;5) = 18-2-4+45 = 57$,

$|\mathbf{a}| = \sqrt{36+1+16+81} = \sqrt{134}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{9+4+1+25} = \sqrt{39}$.

- **14.** Határozzuk meg az $\mathbf{r} = (1;-3;5)+t(2;-1;1)$ egyenes és a $3x+y-2z-2=0$ sík döféspontját.

Megoldás. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$x = 1+2t$, $y = -3-t$, $z = 5+t$,

és most legyen *t* a döféspontohoz tartozó paraméter. A döféspont rajta van az egyenesen is és a síkon is. Ezért, ha annak $x = 1+2t$, $y = -3-t$, $z = 5+t$ koordinátáit behelyettesítjük a sík egyenletébe, az egyenlőség változatlanul fennáll. Tehát

$3(1+2t)-3-t-2(5+t)-2 = 0$, azaz $3t = 12$.

Innen $t = 4$. Ezt visszahelyettesítve az egyenes egyenletrendszerébe, a döféspont koordinátáit kapjuk:

$x = 1+8 = 9$, $y = -3-4 = -7$, $z = 5+4 = 9$.

Tehát a döféspont: $M(9;-7;9)$.

15. Számítsuk ki a $P_1 = (3;1;-2)$ pont és a $2x-4y+5z-10=0$ sík távolságát.

Megoldás. A síknak az origótól való (előjeles) távolsága: $D/|\mathbf{n}| = 10/\sqrt{45}$. A P_1

ponthoz tartozó $\mathbf{r_1} = (3;1;-2)$ vektornak a sík normálvektorára eső vetületének (előjeles) hossza: $\mathbf{r_1}\mathbf{n}^0 = (\mathbf{r_1}\mathbf{n})/|\mathbf{n}| = (6-4-10)\sqrt{45} = -8/\sqrt{45}$. A sík és pont távolsága e két távolság különbségének abszolút értéke, azaz $10/\sqrt{45}-(-8\sqrt{45}) = 18/\sqrt{45} = 6\sqrt{5}$.

- **16.** Számítsuk ki $4x + 7y + 11z - 8 = 0$ és a $11x-4y+7z-5=0$ síkok által közrezárt szöget.

Megoldás. A keresett szög a két normálvektor által közrezárt szög. A két normálvektor: $\mathbf{n}_1 = (4;7;11)$, $\mathbf{n}_2 = (11;-4;7)$. Az általuk közrezárt szög koszinusza:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{44-28+77}{\sqrt{186}\sqrt{186}} = \frac{93}{186} = \frac{1}{2},$$

tehát a keresett szög 60^o.

- **17.** Számítsuk ki az $\mathbf{r} = (7;0;2)+t(1;-4;2)$ és $\mathbf{r} = (3;5;-4)+t(-2;1;3)$ egyenesek szögét.

Megoldás. Két egyenes szögén, az irányvektoruk által közrezárt szöget értjük. E két vektor: $\mathbf{v}_1 = (1;-4;2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-2;1;3)$, a közrezárt szög koszinusza

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{-2-4+6}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

- **18.** Számítsuk ki az $\mathbf{r} = (3;1;-7)+t(2;1;-2)$ egyenes és az $x+2y+z=0$ sík szögét.

Megoldás. Egyenes és sík szöge a sík normálvektora és az egyenes által közrezárt hegyes szög pótszögével egyenlő. Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (2;1;-2)$, a sík normálvektora pedig $\mathbf{n} =$ (1; 2; 1). E két vektor által közrezárt φ szög koszinusza

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|} = \frac{2+2-2}{\sqrt{9}\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} \Rightarrow \varphi \approx 74{,}21^\circ.$$

Ennek pótszöge $15{,}79^\circ$.

- **19.** Határozzuk meg az $x+2y-3z+4=0$ és a $2x-y+z-1=0$ síkok metszésvonalának egyenletét.

Megoldás. A metszésvonal rajta van mindkét síkon, és ezért merőleges mindkét sík normálvektorára. A két normálvektor: $\mathbf{n}_1$ = (1; 2; -3) és $\mathbf{n}_2$= (2; -1; 1), így a metszésvonal irányvektora

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1;-7;-5).$$

A metszésvonal egy pontjának egyik koordinátáját tetszőlegesen vehetjük fel. Legyen ez

z = 0. Ezt behelyettesítve a síkok egyenletébe, a másik két koordinátára az

x + 2y + 4 = 0, $2x-y-1=0$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldása: $x=-2/5$, $y=-9/5$. A metszésvonal egyik pontja tehát a $P_0(-2/5;\,-9/5;\,0)$ pont. Így a metszésvonal egyenlete:

$$\mathbf{r} = (-2/5;\,-9/5;\,0)+t(-1;-7;-5).$$

20. Legyen $\mathbf{b} = (8;22;12)$, $\mathbf{a}_1 = (2;6;0)$, $\mathbf{a}_2 = (6;15;9)$, $\mathbf{a}_3 = (0;-2;3)$.

Mindegyik vektor az $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ bázisban van megadva. Térjünk át az $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ bázisról az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ bázisra, és írjuk fel mindegyik vektor koordinátáit az új bázisban (az $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ vektorokét is).

Megoldás. Az adatokat célszerűen az alábbi táblázatban rögzítjük:

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	(2) 6 0	8	1 0 0
$\mathbf{e}_2$	6 15 -2	22	0 1 0
$\mathbf{e}_3$	0 9 3	12	0 0 1

A vektorok koordinátáit a táblázat oszlopaiba írtuk. Például $\mathbf{a}_2 = 6\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3$.

Elsőként cseréljük ki az $\mathbf{e}_1$ vektort az $\mathbf{a}_1$ vektorral. A csere lehetséges, mert a megfelelő **pivotelem (generáló elem)** nem nulla (2). Azt zárójelbe tettük. A (18) képletet használjuk. Soronként számolunk. Osszuk el a pivotsort (most az első sort) a pivotelemmel (2 -vel). Ezzel megkapjuk az osztott pivotsort.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_1$	1 3 0	4	0,5 0 0
$\mathbf{e}_2$	0 -3 -2	-2	-3 1 0
$\mathbf{e}_3$	0 9 (3)	12	0 0 1

Az új második sort úgy kapjuk, hogy a régi második sorból (az aktuális sorból) vonjuk ki az osztott pivotsor hatszorosát. Ezzel azt érjük el, hogy a pivotelem alatt az új táblázatban $6-6$, azaz nulla áll.

A következő elem ebben a sorban $15-6\cdot 3=-3$. A következő elem $-2-6\cdot 0=-2$. A következő: $22-6\cdot 4=-2$, a következő: $0-6\cdot 0{,}5=-3$, a következő: $1-6\cdot 0=1$, végül $0-6\cdot 0=0$. A harmadik sor változatlan marad, mert a régi pivotelem alatt eleve nulla áll. Tehát az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bázisban $\mathbf{b}=4\mathbf{a}_1-2\mathbf{e}_2+12\mathbf{e}_3$. Vagy például $\mathbf{a}_2=3\mathbf{a}_1-3\mathbf{e}_2+9\mathbf{e}_3$.

Most cseréljük ki az $\mathbf{e}_3$ vektort az $\mathbf{a}_3$ vektorral. A pivotelemet zárójelbe tettük.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_1$	1 3 0	4	0,5 0 0
$\mathbf{e}_2$	0 (3) 0	6	-3 1 2/3
$\mathbf{a}_3$	0 3 1	4	0 0 1/3

A pivotsort (a harmadik sort) elosztjuk a pivotelemmel, majd átalakítjuk az első és második sort. Az első sor változatlan marad. Az új második sort úgy kapjuk, hogy a régi második sorból (az aktuális sorból) kivonjuk az osztott pivotsor -2 -szeresét, azaz hozzáadjuk a kétszeresét.

A következő lépésben kicseréljük az $\mathbf{e}_2$ vektort az $\mathbf{a}_2$ vektorral. Ennek eredménye az utolsó táblázat.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_1$	1 0 0	-2	3,5 -1 -2/3
$\mathbf{a}_2$	0 1 0	2	-1 1/3 2/9
$\mathbf{a}_3$	0 0 1	-2	3 -1 -1/3

Innen leolvasható, hogy

$$\mathbf{b}=-2\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{e}_1=3{,}5\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{e}_2=-\mathbf{a}_1+\tfrac{1}{3}\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{e}_3=-\tfrac{2}{3}\mathbf{a}_1+\tfrac{2}{9}\mathbf{a}_2-\tfrac{1}{3}\mathbf{a}_3$$

A hosszadalmas számításnak több hasznos mellékterméke van (l. mátrixok, lineáris egyenletrendszerek).

3. Feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, továbbá azt, hogy a háromszög súlyvonalvektorainak összege **0**.

2. Egy paralelogramma egyik csúcsából kiinduló oldalvektorai legyenek **a** és **b**. Írja fel az átlóvektorokat.

3. Két pont helyvektora legyen $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$. Írja fel a két pont által meghatározott szakasz felezőpontjának és a szakaszt 3 egyenlő részre osztó pontoknak a helyvektorait.

4. Legyen $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$, a két vektor által közrezárt szög pedig 60°. Számítsa ki a két vektor skaláris szorzatát.

5. Legyen $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$ és a két vektor merőleges egymásra. Számítsa ki az alábbi mennyiségeket:

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$, $(\mathbf{a}-2\mathbf{b})^2$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})$.

6. Bizonyítsa be, hogy az $\dfrac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektor merőleges **a** -ra.

7. A **c** vektor az **a** és **b** vektorok által kifeszített síkban van. Mennyivel egyenlő az **a b c** vegyes szorzat értéke?

8. Állapítsa meg az alábbi műveletek eredményét:

$\mathbf{a}\times 5\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\,\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{a}$.

9. Számítsa ki az $\mathbf{a} = (2\sqrt{3}; \sqrt{3}; -1)$ vektor abszolút értékét, majd írja fel az $\mathbf{a}^0$ egységvektort. Mekkora szöget zár közre az **a** vektor a koordinátatengelyekkel?

10. Legyen $\mathbf{a} = (-2; 1; 5)$, $\mathbf{b} = (2;\ 0;\ -3)$, $\mathbf{c} = (0;\ 1;\ 2)$. Írja fel az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $2\mathbf{a}-\mathbf{b}+5\mathbf{c}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorokat. Számítsa ki az **a b**, **a c**, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, **a b c** szorzatokat.

11. Az $\mathbf{a} = (7; -9; 5)$ és $\mathbf{b} = (2;\ 1;\ z)$ vektorok merőlegesek egymásra. Számítsa ki *z* értékét.

12. Legyen $\mathbf{a} = (-2; \sqrt{3}; 3)$, $\mathbf{b} = (0; -1; -\sqrt{3})$. Számítsa ki a két vektor skaláris szorzatát, vektoriális szorzatát, a két vektor által közrezárt szöget és a két vektor által kifeszített paralelogramma területét. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos mind az **a**, mind a **b** vektorral, és átmegy az origón.

13. Számítsa ki az **a b c** vegyes szorzatot, ha

$\mathbf{a} = (2;-1;1)$, $\mathbf{b} = (3;-1;4)$, $\mathbf{c} = (2;0;5)$.

Számítsa ki a három vektor által kifeszített hasáb térfogatát is!

14. Számítsa ki *x* értékét, ha az $\mathbf{a} = (x; 2; -1)$, $\mathbf{b} = (1;\ -4;\ 2)$, $\mathbf{c} = (2; 1; -1)$ vektorok egy síkba esnek (komplanárisak). Lineárisan függetlenek-e ekkor a vektorok?

15. Számítsa ki az $A(2;\ 4;\ 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(5;\ 1;\ 2)$ háromszög területét.

16. Számítsa ki az $A(2;\ 4;\ 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(5;\ 1;\ 2)$, $D(1;\ 1;\ 4)$ pontok által kifeszített gúla térfogatát.

17. Számítsa ki az $\mathbf{a} = (2; -1; 5)$ vektornak a $\mathbf{b} = (1;\ 2;\ -2;)$ vektorra eső

vetületvektorát. Írja fel az erre merőleges vetületvektort is.

18. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0(2; -4; 1)$ ponton és párhuzamos a $\mathbf{v} = (1; 2; 4)$ vektorral. Számítsa ki ennek az egyenesnek az origótól való távolságát.

19. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $x+y-z+2=0$ síkkal is és a $2x-y+3z=0$ síkkal is, és átmegy az origón.

20. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0(1; 4; -1)$ pontra, és merőleges az $\mathbf{r} = (1; 0; 0)+t(3; -1; 6)$ egyenesre. Számítsa ki a síknak az origótól való távolságát.

21. Írja fel $P_1(2;3;1)$, $P_2(-4;2;-5)$, P_3(0; 1; 0) pontokra illeszkedő sík egyenletét.

22. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0(3;8;-4)$ pontra és az $\mathbf{r}=(1;3;-5)+t(3;2;-1)$ egyenesre.

23. Állapítsa meg, hogy a $P_1(5;5;0)$, $P_2(2;3;5)$, P_3(1; 1; 1) pontok közül melyik illeszkedik az $\mathbf{r}=(1;-1;2)+t(2;3;-1)$ egyenesre, ill. a $2x-y+z-6=0$ síkra.

24. Írja fel az $\mathbf{r}=(7;-9;12)+t(5;3;-\sqrt{2})$ egyenes skaláris egyenletrendszerét, majd a *t* paramétert nem tartalmazó egyenletrendszerét. Vegyen fel ezen az egyenesen két pontot úgy, hogy távolságuk 12 legyen.

25. Határozza meg *u* és *v* értékét, úgy, hogy a $2x+uy+3z-5=0$ és $vx-6y-6z-2=0$ síkok párhuzamosak legyenek. Számítsa ki ekkor a két sík távolságát.

26. Határozza meg a $6x+10y+15z-30=0$ síknak a koordinátatengelyekkel való döféspontjait és a koordinátasíkokkal való metszésvonalait. Számítsa ki annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet ez a sík a koordinátatengelyekkel alkot.

27. Határozza meg az $x+2y-3z+4=0$ és $2x-y+z-1=0$ síkok metszésvonalának egyenletét.

28. Legyen $\mathbf{a}_1=(6;4;-1)$, $\mathbf{a}_2=(2;0;3)$, $\mathbf{a}_3=(4;1;2)$, $\mathbf{b}=(30,13,5)$. Mindegyik vektor az $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ bázisban van megadva. Írja fel a **b** vektort az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként.

29. Oldja meg az előbbi feladatot, ha $\mathbf{a}_1=(6;4;10)$, $\mathbf{a}_2=(2;0;2)$, $\mathbf{a}_3=(4;1;5)$, $\mathbf{b}=(30,13,43)$.

30. Oldja meg az előző feladatot, ha $\mathbf{b}=(30,13,5)$.