KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

9

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

IX. Mátrixok

1. Mátrix fogalma, tulajdonságai

A **mátrix** egy téglalap alakú táblázat, melyben az adatok, a mátrix **elemei**, sorokban és oszlopokban vannak elhelyezve. Az

(1)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{(m,n)}$$

mátrixnak *m* **sora** és *n* **oszlopa** van. Ezért szokás azt $m \times n$ tipusú mátrixnak mondani. Az *i* -edik sor *k* -adik eleme a_{ik} .

Az *n* sorból és az *n* oszlopból álló mátrix neve **n-edrendű négyzetes** (vagy **kvadratikus**) mátrix.

A kvadratikus mátrix $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemei alkotják a mátrix **főátlóját**.

Ha a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, a mátrix **transzponáltját** kapjuk. Jelölése **A*** vagy $\mathbf{A}^T$.

Az **A** kvadratikus mátrix **szimmetrikus**, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, azaz ha $a_{ik} = a_{ki}$; **ferdén szimmetrikus**, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$, azaz ha $a_{ik} = -a_{ki} \quad (a_{ii} = 0)$.

Ha a **D** kvadratikus mátrix főátlóján kívüli valamennyi eleme nulla, akkor **D átlós** (**diagonális**) mátrix.

Ha egy diagonális mátrix főátlójában álló valamennyi elem 1, akkor annak neve **egységmátrix**. Jele **E**.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A csupa nulla elemből álló mátrixot **zérusmátrixnak** (**nullamátrixnak**) nevezzük.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az egyetlen oszlopból, ill. egyetlen sorból álló mátrix neve **oszlopmátrix** (vagy **oszlopvektor**), ill. **sormátrix**, (vagy **sorvektor**). Ezeket általában kisbetűvel (pl. **a**, **b**) jelöljük.

Két mátrix egyenlő, ha mindkettő ugyanolyan tipusú, és a megfelelő helyeken álló elemeik egyenlők, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, ha $a_{ik} = b_{ik}$.

2. Műveletek mátrixokkal

Az **A** és **B** mátrixok **összege** $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, ha $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

Az **A** mátrix és a λ szám szorzata $\lambda\mathbf{A} = \mathbf{C}$, ha $c_{ik} = \lambda\, a_{ik}$.

Minden négyzetes **A** mátrix előállítható $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{F}$ alakban, ahol **S** szimmetrikus, **F** pedig ferdén szimmetrikus mátrix, és

, .

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)$$

Minden mátrix valójában egymás alá (fölé) írt sorvektorokból és egymás mellé írt oszlopvektorokból áll. Legyen az **A** mátrix *i* -edik sora, ill. a **B** mátrix *k* -adik oszlopa

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip})$, ill. $\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{bmatrix}$.

Ekkor az **A** és **B** mátrix **szorzata** $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, ha

(2) $$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk} .$$

Innen látható, hogy az **AB** mátrixszorzat csak akkor értelmezhető, ha a bal oldali **A** mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora van a jobb oldali **B** mátrixnak. Tehát az $\mathbf{A}_{(m,p)}$ és $\mathbf{B}_{(p,n)}$ mátrixok **AB** szorzata értelmezhető. Az eredménymátrix $m \times n$ tipusú lesz. Az is látható, hogy $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Az eredménymátrix c_{ik} eleme pedig nem más, mint az **A** mátrix *i* -edik sorának és a **B** mátrix *k* -adik oszlopának skaláris szorzata.

Ha **A** négyzetes mátrix és **E**, ill. **0** vele azonos rendű egységmátrix, ill. zérusmátrix, akkor

(3) $$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}, \text{ ill. } \mathbf{A0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0} .$$

3. Mátrixok inverze és rangja

Mátrix inverze

Az **A** négyzetes mátrix **inverzén** olyan, $\mathbf{A}^{-1}$ -gyel jelölt mátrixot értünk, amelyre

(4) $$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} ,$$

ahol **E** az **A** -val megegyező rendű egységmátrix.

Az inverzmátrix csak akkor létezik, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ekkor az **A** mátrix **reguláris**. Ellenkező esetben **szinguláris**.

Igazolható, hogy

(5) $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11}\ A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}\ A_{2n} \cdots A_{nn} \end{bmatrix},$$

ahol A_{ik} , az **A** mátrix a_{ik} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.

Megjegyezzük, hogy az inverzmátrix más módon is előállítható (például bázistranszformációval, l. a **8.** mintapéldát).

Mátrix rangja

Mátrix rangja egyenlő a mátrix lineárisan független sorvektorainak vagy oszlopvektorainak számával.

Egy másik értelmezés: *Mátrix rangján* a mátrixból kiválasztható, nem zérus értékű determinánsok rendszámának maximumát értjük.

Egy mátrixnak annyi lineárisan független oszlopvektora (vagy sorvektora) van, ahány közülük a *bázistranszformáció* során bevihető a bázisba. Ez lehetőséget ad a rang meghatározására.

Ha valamely λ számra és **s** vektorra $\mathbf{As} = \lambda\mathbf{s}$, akkor λ az **A** mátrix **sajátértéke**, **s** pedig a λ sajátértékhez tartozó **sajátvektora**. A λ sajátérték meghatározása a

(6)
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásaként kapható.

4. Mintapéldák

Megoldások: ⊙ láthatók ○ nem láthatók

1. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

A és **B** másodrendű kvadratikus (négyzetes) mátrixok.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 8 & 13 \end{bmatrix};\ \mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ -10 & -3 \end{bmatrix}.$$

A és **C** nem adható össze, mert különböző méretűek.

$$5\mathbf{C} = 5\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 & -10 \\ 50 & 35 & 30 \end{bmatrix}.$$

2. Írjuk fel az **A** mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegként, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Alkalmazzuk az $\mathbf{A} = \mathbf{S}+\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)$ felbontást. Mivel

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 8 & 0 & 10 \\ -5 & 3 & 9 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\mathbf{A}+\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & 14 & -1 \\ 14 & 0 & 13 \\ -1 & 13 & 18 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}-\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & -7 \\ 9 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezeket felhasználva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -0{,}5 \\ 7 & 0 & 6{,}5 \\ -0{,}5 & 6{,}5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4{,}5 \\ -1 & 0 & -3{,}5 \\ 4{,}5 & 3{,}5 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Egy harmadrendű átlós mátrix, a harmadrendű egységmátrix és a harmadrendű nullamátrix:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

HIÁNYOS FELADAT

4.

HIÁNYOS FELADAT

Megoldás

Az alábbi szorzás elvégezhető, mert az **A** mátrix 3×4 tipusú (méretű), a **B** pedig 4×2 tipusú (a két belső méret (4) megegyezik), az eredmény pedig 3×2 tipusú (méretű) lesz.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 27 \\ -5 & 29 \\ 19 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Például c_{21} az **A** mátrix második sorának és a **B** mátrix első oszlopának a skaláris

szorzata, azaz

$$c_{21} = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 = -5.$$

Hasonlóan például

$$c_{32} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 5.$$

5. Számítsuk ki az **Ab**, $\mathbf{c}^*\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^*$ **Ab** és $\mathbf{s}^*\mathbf{b}$ szorzatokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 7 \cdot 11 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 11 \\ -2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 1 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83 \\ -16 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}^*\mathbf{b} = [4, \ -2, \ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 11 = 35.$$

Itt $\mathbf{c}^*$ a c oszlopvektor transzponáltja, ezért az sorvektor. Az eredmény egy szám.

$$\mathbf{c}^*\mathbf{Ab} = \mathbf{c}^*(\mathbf{Ab}) = [4, \quad -2, \quad 3]\begin{bmatrix}83\\-16\\-2\end{bmatrix} = 4\cdot 83 - 2\cdot(-16) + 3\cdot(-2) = 358\cdot$$

Az eredmény itt is szám.

$$\mathbf{s}^*\mathbf{b} = [1, \quad 1, \quad 1]\begin{bmatrix}3\\5\\11\end{bmatrix} = 1\cdot 3 + 1\cdot 5 + 1\cdot 11 = 19\cdot$$

Az $\mathbf{s}^*$ -gal való szorzás tehát összegzi a b vektor koordinátáit.

6. Az egységmátrix inverze önmaga, azaz $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}\cdot$

Ugyanis a (3) és (4) szerint

$$\mathbf{EE}^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot$$

7. Állítsuk elő az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\1 & 3 & 1\\5 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

mátrix inverzét, majd győződjünk meg az előállítás helyességéről.

Megoldás. Az (5) formulát használjuk. Előbb számítsuk ki az **A** mátrix determinánsát.

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\1 & 3 & 1\\5 & 3 & 4\end{vmatrix} = 3(12-3) - 2(4-5) + 2(3-15) = 5\cdot$$

Mivel a determináns értéke nem nulla, ezért létezik inverz (a mátrix reguláris).

Az adjungált mátrix elemei, vagyis az a_{ik} elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok:

$$A_{11} = \begin{vmatrix}3 & 1\\3 & 4\end{vmatrix} = 9,\; A_{21} = -\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 4\end{vmatrix} = -2,\; A_{31} = \begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix}1 & 1\\5 & 4\end{vmatrix} = 1,\; A_{22} = \begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{vmatrix} = 2,\; A_{32} = -\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix}1 & 3\\5 & 3\end{vmatrix} = -12,\; A_{23} = -\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{vmatrix} = 1,\; A_{33} = \begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} = 7.$$

Tehát az inverzmátrix:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}9 & -2 & -4\\1 & 2 & -1\\-12 & 1 & 7\end{bmatrix}.$$

Most győződjünk meg a megoldás helyességéről, vagyis arról, hogy teljesül-e az $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ egyenlőség. Csak az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ egyenlőséget igazoljuk:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 27-2-20 & 18-6-12 & 18-2-16 \\ 3+2-5 & 2+6-3 & 2+2-4 \\ -36+1+35 & -24+3+21 & -24+1+28 \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{E}.$$

8. Állítsuk elő az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét bázistranszformációval.

Megoldás. Igazolható, hogy az **E** egységmátrix oszlopvektorainak az **A** reguláris mátrix oszlopvektoraira mint bázisra vonatkozó koordinátáiból alkotott mátrix az **A** mátrix inverze.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$	(1) 1 2 1 2 1 0 1 1	1 0 0 0 1 0 1 0 1

Ez azt jelenti, hogy kiindulva a fenti táblából, a bázistranszformációt elvégezve, az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ oszlopai az **A** $^{-1}$ inverzmátrix oszlopai lesznek. Először cseréljük ki az $\mathbf{e}_1$ vektort az $\mathbf{a}_1$ vektorral, majd az $\mathbf{e}_2$ vektort az $\mathbf{a}_2$ vektorral:

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$		$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$	1 1 2 0 (1) -1 0 1 1	1 0 0 -1 1 0 0 0 1	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{e}_3$	1 0 30 1 -1 0 0 (2)	2 -1 0 -1 1 0 1 -1 1

Végül az $\mathbf{e}_3$ és $\mathbf{a}_3$ cseréjekor az alábbi táblát kapjuk.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	1 0 0 0 1 0 0 0 1	1/2 1/2 -3/2 -1/2 1/2 1/2 1/2 -1/2 1/2

Az $\mathbf{A}^{-1}$ inverzmátrix a tábla jobb oldali részében jelent meg. Elemei az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ egységvektorok új koordinátái. Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Állapítsuk meg az **A** mátrix rangját, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Azt kell megállapítani, hogy az **A** mátrixnak hány lineárisan független oszlopvektora van. Annyi, ahány közülük a bázistranszformáció során kicserélhető (bevihető a bázisba). Végezzük el a bázistranszformációt.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ $\mathbf{a}_4$		$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ $\mathbf{a}_4$		$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ $\mathbf{a}_4$
$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$ $\mathbf{e}_4$	(1) 1 2 1 0 -1 1 0 2 0 3 -1 1 2 -1 -1	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$ $\mathbf{e}_4$	1 1 2 1 0 (-1) 1 0 0 -2 -1 -3 0 1 -3 -2	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{e}_3$ $\mathbf{e}_4$	1 0 3 1 0 1 -1 0 0 0 (-3) -3 0 0 -2 -2

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ $\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ $\mathbf{e}_4$	1 0 0 -2 0 1 0 10 0 1 10 0 0 0

Látható, hogy az $\mathbf{a}_4$ vektor már nem vihető be a bázisba. Tehát 3 vektor vihető be a bázisba, így a mátrix rangja: $r(\mathbf{A}) = 3$.

10. Állapítsuk meg az **A** és **B** mátrix rangját, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & 8 & 12 \\ 3 & -9 & -16 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Most a mátrixból kiválasztható, nem zérus értékű determinánsok rendszámát vizsgáljuk. Először a lehető legnagyobb rendszámú determinánst vizsgáljuk.

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 2 = 30 \neq 0.$$

Ez a legmagasabbrendű, nem zérus értékű determináns harmadrendű, ezért $r(\mathbf{A}) = 3$.

$$\det\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & 8 & 12 \\ 3 & -9 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Itt az első és második sor összegét hozzáadtuk a harmadik sorhoz. Ez a harmadrendű determináns zérus értékű, ezért **B** rangja kisebb mint 3. Nézzük meg, hogy van-e a mátrixban másodrendű, nem zérus értékű determináns. A bal felső sarokdetermináns

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 16+5 = 21 \neq 0.$$

Ez másodrendű, tehát $r(\mathbf{B}) = 2$.

11. Határozzuk meg az **A** mátrix sajátértékeit, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. A (6) karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{, azaz } \lambda^2 + 3\lambda - 18 = 0.$$

Ennek gyökei a sajátértékek: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -6$.

5. Feladatok

1. Számítsa ki a **C** = 3**A** – 5**B** mátrixot, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Számítsa ki az **AB** szorzatot, ha

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix};$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$

3. Bontsa fel az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 6 & 8\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére.

4. Számítsa ki az **AA*** szorzatot, ha $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\-1 & 4 & 7\end{bmatrix}$.

5. Számítsa ki az $\mathbf{A^2}$, $\mathbf{B^2}$ és $\mathbf{C^2}$ mátrixot, ha

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\-2 & 3\end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\1 & -3 & -5\\-1 & 3 & 5\end{bmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-3 & 3 & -3\\-4 & 4 & -4\end{bmatrix}$.

6. Számítsa ki az **A, B** és **C** mátrix inverzét, ha

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\-2 & 3\end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\4 & 3 & 1\\3 & 4 & 1\end{bmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 12\end{bmatrix}$.

7. Határozza meg az **A** mátrixot, ha inverze:

$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

8. Állapítsa meg az **A**, **B** és **C** mátrix rangját, ha

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\0 & 0 & 5\\6 & 4 & 10\end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\2 & 5 & -1\\5 & 6 & 3\end{bmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 2 & 2\\2 & 2 & 2 & 2 & 2\\5 & 5 & 5 & 5 & 5\end{bmatrix}$.

Hány lineárisan független sora (sorvektora), ill. szlopa (oszlopvektopra) van az **A**, **B** és **C** mátrixnak?

9. Határozza meg az **A** és **B** mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & 0\\16 & 1\end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

10. Számítsa ki az $\mathbf{a}\,\mathbf{b}^*$, $\mathbf{a}^*\mathbf{b}$ és **Ax** szorzatokat, ha

$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}5\\-8\\10\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\6\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 2\\4 & 5 & 1\\3 & 0 & -8\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

11. Oldja meg az **AX** = **B** egyenletet, ha **X** négyzetes mátrix, és

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 9\end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.