KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

10

Új Magyarország FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

X. Determinánsok

1. Determináns értelmezése, tulajdonságai

A **másodrendű determináns** értelmezése:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

A **harmadrendű determináns** értelmezése és annak első sor szerinti kifejtése:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

A kifejtésnél fellépő másodrendű determinánsok a harmadrendű determináns **aldeterminánsai**. Itt az a_{ik} elemhez tartozó aldeterminánst meg kell szorozni $(-1)^{i+k}$ -val (**sakktáblázat-szabály**).

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Sakktábla-szabály (aldeterminánsok előjelezése)

Minden elem kap egy előjelet, a bal felső pozitívat, a többi elem pedig sakktáblaszerűen pozitívat vagy negatívat. A kifejtéskor az adott elem sorát és oszlopát is kitakarjuk, így kapunk egy aldeterminánst. Ha egy sor szerint fejtünk ki, akkor a sor minden elemével tesszük meg ezt és vesszük az előjeles összeget. Ha oszlop szerint fejtünk ki, akkor az oszlop minden tagján hajtjuk végre a műveletet.

A determináns bármelyik sora vagy oszlopa szerint kifejthető.

PÉLDA

Példa Determináns kifejtése

2. sor szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. sor szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1. oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2. oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

A magasabbrendű determináns kifejtése hasonlóképpen történik. E kifejtéssel az *n* -edrendű determináns ($n-1$)-edrendű aldeterminánsok segítségével írható fel. Az a_{ik} elemhez tartozó aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az eredeti determinánsból töröljük *i*-edik sort és a *k*-adik oszlopot.

Determinánsok tulajdonságai

A determináns néhány tulajdonsága:

1. Ha valamelyik sor (vagy oszlop) mindegyik eleme zérus, akkor a determináns értéke is zérus.
2. Ha a determináns egyik sorához (oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorát (oszlopát) vagy annak többszörösét, akkor a determináns értéke nem változik meg.
3. Ha a determináns két sora (oszlopa) egyenlő, akkor a determináns értéke zérus.
4. Ha a determináns két sorát (oszlopát) felcseréljük, a determináns értéke előjelet vált.
5. Ha a determináns egyik sorának (oszlopának) minden elemét ugyanazzal a számmal szorozzuk, akkor a determináns értéke ugyanannyiszorosra változik.

2. Mintapéldák

Megoldások: ⊙ láthatók ○ nem láthatók

1. $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$

$$= 9\cdot 6 - 4\cdot(-5) = 54 + 20 = 74$$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$

$$= 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2(30-2) + 3(6+8) + 0 = 98;$$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Itt az első sor háromszorosát kivontuk a harmadik sorból, aminek következtében a harmadik sor mindegyik eleme nulla, így a determináns értéke is nulla.

4. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 52 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\begin{vmatrix} 4 & 52 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)(4\cdot 5 - 0) = 3\cdot(-1)\cdot 4\cdot 5 = -60.$$

az első oszlop szerint kifejtve, majd a keletkező aldeterminánst ismét az első oszlop szerint kifejtve stb.

5. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 7 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

= 0,

mert az első és harmadik sor egyenlő.

6. Állapítsuk meg az **A** mátrix rangját, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Meg kell állapítani a mátrixból kiválasztható, zérustól különböző, legmagasabbrendű determináns rendszámát. A kiválasztható harmadrendű determinánsok mindegyike zérus értékű (mert az első és harmadik sor egyenlő). Viszont van zérustól különböző értékű másodrendű determináns a mátrixban. Például

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 0 = 6 \neq 0.$$

Tehát a mátrix rangja: $r(\mathbf{A}) = 2$.

3. Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét, valamelyik sor vagy oszlop szerint kifejtve azokat:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 15 \end{vmatrix}$;

b) ;

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét, felhasználva ehhez a determináns tulajdonságait:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ 3a & 3b \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 9 & 11 & 25 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & x & y & z \\ 0 & b & u & v \\ 0 & 0 & c & w \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 9 & 12 \\ 5 & 11 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 14 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát:

a) **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$;

b) **B** = $5\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$;

c) **C** = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. A negyedrendű kvadratikus **A**, ill. **B** mátrix determinánsának értéke det**A** = 12, ill. det**B** = 5. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsának értékét:

a) 2**A**;

b) 8**B**;

c) **AB**;

d) **A**^{2} ;

e) **AA***;

f) **AB***.

5. Legyen det**A** = 120. Állapítsa meg a **B** mátrix determinánsának értékét, ha **B** úgy származtatható az **A** mátrixból, hogy annak

a) első és második sorát (vagy oszlopát) felcseréljük;

b) bármelyik két sorát (vagy oszlopát) felcseréljük;

c) első és második sorát (vagy oszlopát) felcseréljük, majd ennek az új mátrixnak a második sorát (vagy oszlopát) a harmadik sorral (vagy oszloppal) felcseréljük.

6. Legyen **A** harmadrendű, ferdén szimmetrikus mátrix. Számítsa ki det**A** értékét.

7. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} 1 & i & i^2 \\ 0 & i & -i \\ i^3 & 1 & 0 \end{vmatrix} (i^2 = -1)$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2x \\ 1 & y & 2y \\ 1 & z & 2z \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}$.

8. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}5x \end{vmatrix} = 0$;

b) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$.

9. Állapítsa meg az **A** mátrix rangját, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 0 \end{bmatrix}.$$