KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

11

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

XI. Lineáris egyenletrendszerek

1. Lineáris egyenletrendszer

A **lineáris egyenletrendszer** általános alakja:

(1)
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Ugyanez mátrix alakban:

(2)
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ahol *x* az ismeretleneket tartalmazó vektor, *b* adott vektor.

Ha az egyenletrendszer *A* mátrixát kiegészítjük a *b oszlopvektorral* , az egyenletrendszer *B bővített mátrixát* kapjuk.

Homogenitás

Az egyenletrendszer **homogén**, ha $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, ellenkező esetben **inhomogén**.

2. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

A lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha mátrixának rangja megegyezik bővített mátrixának rangjával. Egyértelmű megoldás pedig akkor és csak akkor van, ha bővített mátrixának rangja egyenlő az ismeretlenek számával.

A lineáris egyenletrendszernek vagy egyetlen megoldása van, vagy végtelen sok megoldása van, vagy nincs megoldása.

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerben legyen $n = m$, és $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ekkor a megoldás:

1. Az **inverz mátrix** felhasználásával:

(3)
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b};$$

2. A **Cramer-szabállyal** [1]:

(4)
$$x_1 = \frac{D_1}{\det \mathbf{A}}, \ x_2 = \frac{D_2}{\det \mathbf{A}}, \ldots, \ x_n = \frac{D_n}{\det \mathbf{A}},$$

ahol $D_1, D_1, \ldots, D_n$ a módosított determinánsok, azaz D_i a $\det \mathbf{A}$ determinánsból úgy származtatható, hogy annak *i* -edik oszlopa helyére a jobb oldali (b) oszlopot írjuk ;

$$(i=1,2,\ldots,n)$$

3. A **Gauss-féle eliminációs módszerrel** [2] úgy kapható meg, hogy az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésével az egyenletrendszer mátrixát *háromszögmátrixszá*, vagy *átlós mátrixszá* (esetleg *egységmátrixszá*) alakítjuk;

4. **Bázisvektorcserével** a *b* vektort *A* oszlopvektorainak *lineáris kombinációjaként* írjuk fel.

Ha az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszerben $n\neq m$, akkor általában a Gauss-féle eliminációs módszert, vagy a bázisvektorcsere módszerét használjuk, de esetleg alkalmazható a Cramer-szabály is.

Megjegyezzük, hogy a homogén $(\mathbf{Ax}=\mathbf{0})$ egyenletrendszer mindig megoldható. Triviális megoldása: $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0$. Az esetleges nemtriviális megoldást a fenti módszerek valamelyikével határozzuk meg.

3. Mintapéldák

Megoldások: ⊙ láthatók ◯ nem láthatók

1. Az

$$\begin{aligned} x+5y&=0\\ 2x+3y&=-7\\ -x+y&=6 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $x=-5$, $y=1$.

Ugyanis az egyenletrendszer mátrixa ill. bővített mátrixa

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&5\\2&3\\-1&1\end{bmatrix},\ \text{ill.}\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&5&0\\2&3&-7\\-1&1&6\end{bmatrix},$$

és $r(\mathbf{A})=2$, ill. $r(\mathbf{B})=2$. Mivel a bővített mátrix rangja és az ismeretlenek száma egyenlő (2), ezért egyértelmű (azaz egyetlen) megoldás van. Az $r(\mathbf{B})=2$ onnan látható, hogy $\det\mathbf{B}=0$ és $1\cdot3-2\cdot5=-7\neq0$.

2. Az

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x-y-3z&=8 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van: $x=z+4$, $y=-2z-4$, ahol *z* tetszőleges szám.

3. A

$$\begin{aligned} 2x-y+3z&=4\\ -4x+2y-6z&=6 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása.

Ugyanis a második egyenlet bal oldala az első egyenlet bal oldalának minusz kétszerese. A jobb oldalakra ez nem áll, így ez az egyenletrendszer ellentmondó.

4. Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 &= 2 . \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Megoldás. Itt $n = m = 3$. Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4+10) + 4 \cdot (12-5) + 3 \cdot (-6+1) = 25 \cdot$$

Mivel $\det \mathbf{A} \neq 0$, ezért egyértelmű megoldás van.

A módosított determinánsok:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -25, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 25 \cdot$$

Tehát a megoldás: $x_1 = \dfrac{D_1}{\det \mathbf{A}} = -1$; $x_2 = \dfrac{D_2}{\det \mathbf{A}} = 0$; $x_3 = \dfrac{D_3}{\det \mathbf{A}} = 1$.

5. Oldjuk meg az előző feladatot a inverzmátrix segítségével.

Megoldás. Az egyenletrendszer mátrixa és az előjeles aldeterminánsok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_{11} = 6 & A_{21} = 10 & A_{31} = -17 \\ A_{12} = -7 & A_{22} = 5 & A_{32} = -\ 1 \\ A_{13} = -5 & A_{23} = 0 & A_{33} = 10 \end{matrix} .$$

Az inverzmátrix: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{25} \begin{bmatrix} 6 & 10 & -17 \\ -7 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

A megoldás a (3) képlet szerint:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 6 & 10 & -17 \\ -7 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 6+20-51 \\ -7+10-\ 3 \\ -5+\ 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Innen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Gauss-féle eliminációs módszerrel:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= -7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 11 , \\ 3x_1 + \ x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Úgy alakítjuk át az egyenletrendszert, hogy annak mátrixa ún. felső háromszög mátrix legyen, vagyis olyan, amelynek a főátló alatti elemi nullák. Első lépésben vonjuk ki az első egyenlet négyszeresét a második egyenletből, majd az első egyenlet háromszorosát a harmadik egyenletből. Az így átalakított új egyenletrendszer és mátrixa:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 - \ 3x_3 &= -7 \\ 0x_1 + 3x_2 + 14x_3 &= 39, \\ 0x_1 + \ \ x_2 + \ 7x_3 &= 20 \end{aligned} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Most cseréljük fel a második és harmadik egyenletet, majd a harmadik egyenletből vonjuk ki a második egyenlet háromszorosát. Az új egyenletrendszer és mátrixa:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 - 3x_3 &= -7 \\ 0x_1 + \ \ x_2 + 7x_3 &= 20 \\ 0x_1 + 0x_2 - 7x_3 &= -21 \end{aligned} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Innen kiolvasható, hogy $x_3 = 3$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$.

Az átalakítás történhet úgy is, hogy az egyenletrendszer mátrixa átlósmátrix legyen.

Az egyenletrendszerek mellett felírtuk azok mátrixát is.

7. Oldjuk meg bázistranszformációval az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 17. \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer felírható

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \text{ azaz } \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 = \mathbf{b}$$

alakban, ahol $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ az egyenletrendszer mátrixának oszlopvektorai, **b** pedig a jobb oldali vektor. Ez a felírás azt jelenti, hogy az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint a **b** vektort előállítani az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ez pedig bázistranszformációval végrehajtható az alábbi módon.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b		$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b
$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$	(1) 2 3 3 1 4 2 5 2	141718	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$	1 2 30 (-5) - 50 1 -4	1425- 10

Induláskor $\mathbf{b} = 14\mathbf{e}_1 + 17\mathbf{e}_2 + 18\mathbf{e}_3$. Az első lépésben az $\mathbf{e}_1$ vektort kicseréljük az $\mathbf{a}_1$ vektorral. Ezután $\mathbf{b} = 14\mathbf{a}_1 + 25\mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3$.

	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b		$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b
$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{e}_3$	1 0 1 0 1 10 0 -5	45-15	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	1 0 00 1 00 0 1	123

A következő lépésben az $\mathbf{e}_2$-t cseréljük ki az $\mathbf{a}_2$ vektorral. Ezután $\mathbf{b} = 4\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 15\ \mathbf{e}_3$.

Végül az $\mathbf{e}_3$ vektor helyett bevonjuk a bázisba az $\mathbf{a}_3$ vektort. Ezután a csere után $\mathbf{b} = 1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$. Figyelembe véve, hogy $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$, érvényes az

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = 1\cdot\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3.$$

Innen pedig $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Ez a megoldás.

Megjegyezzük, hogy az eljárás kissé lerövidíthető. Ugyanis amikor az $\mathbf{e}_1$ vektort kicseréltük az $\mathbf{a}_1$ vektorral, akkor az $\mathbf{a}_1$ koordinátái az 1, 0, 0 számok lesznek és ezek a további cserék során nem változnak, így $\mathbf{a}_1$ oszlopát a továbbiakban nem kell kiírni. Ugyanez a helyzet a többi cserénél is. Ez a rövidebb táblázatsor jelen esetben a következő:

$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b	$\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$	b	$\mathbf{a}_3$	b	b	
(1) 2 3 3 1 4 2 5 2	141718	2 3 (-5) - 5 1 -4	1425- 10	11(-5)	45-15	123	

Innen látható, hogy
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$,
$x_3 = 3$.

8. Oldjuk meg bázistranszformációval az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= 14 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= 18. \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 + 14x_4 &= 32 \end{aligned}$$

Megoldás. Használjuk a rövidebb táblázatokat:

$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ $\mathbf{a}_4$	b	$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_3$ $\mathbf{a}_4$	b	$\mathbf{a}_3$ $\mathbf{a}_4$	b
4 (-1) 5 8 3 -2 - 4 6 7 -3 1 14	141832	-4 -5 -8(-5) -14 - 10 -5 -14 -10	-14- 10-10	31/5 014/5 2 0 0	-620

A pivotelemek (generáló elemek) zárójelbe tételéből látható, hogy az első lépésben az $\mathbf{e}_1$ vektort az $\mathbf{a}_2$ vektorral cseréltük ki, míg a második lépésben az $\mathbf{e}_2$ vektort az $\mathbf{a}_1$ vektorral. További csere nem lehetséges. Innen leolvasható, hogy $\mathbf{b} = -6\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = 31/5\cdot\mathbf{a}_2 + 14/5\cdot\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 0\cdot\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1$. Ugyanakkor $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_0$, azaz

$$\mathbf{b} = \left(x_1 + \frac{14}{5}x_3 + 2x_4\right)\mathbf{a}_1 + \left(x_2 + \frac{31}{5}x_3 + 0\cdot x_4\right)\mathbf{a}_2.$$

A **b** vektor kétféle előállítását összehasonlítva, a megoldás:

$x_1 = 2 - \frac{14}{5}x_3 - 2x_4$, $x_2 = -6 - \frac{31}{5}x_3$, x_3 és x_4 tetszőleges. Ez az eredmény formálisan kiolvasható a táblázatból is.

A transzformáció eredményeként az is megállapítható, hogy az egyenletrendszer mátrixának rangja 2, mert 2 vektort lehetett a bázisba bevonni.

9. Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket.

a) $\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$.

Megoldás

a) A triviális megoldás: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Az egyenletrendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2-7) - 5\cdot(4+3) - 2\cdot(-28+6) = 0,$$

ezért van nemtriviális megoldás is. Látható, hogy a harmadik egyenlet az első és a második egyenlet összege. Ezért ezt a harmadik egyenletet mint fölöslegest, hagyjuk el. A maradék két egyenletet rendezzük át a következőképpen:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 2x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 &= -x_3 \end{aligned}.$$

Ezt az egyenletet oldjuk meg például a Cramer-szabállyal:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 22,\quad D_1 = \begin{vmatrix} 2x_3 & 5 \\ -x_3 & 2 \end{vmatrix} = 9x_3,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2x_3 \\ -4 & -x_3 \end{vmatrix} = 7x_3.$$

A megoldás: $x_1 = \dfrac{9x_3}{22}$, $x_2 = \dfrac{7x_3}{22}$, x_3 tetszőleges.

b) A triviális megoldás: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Az egyenletrendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2-1) + 4(-5+2) = -15 \neq 0,$$

tehát csak a triviális megoldás létezik.

10. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 &= 7 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás. Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1\cdot(-5\lambda+12) - 3(2\lambda-18) - 1\cdot(-4+15) = \\ &= -11\lambda + 55 = -11(\lambda-5). \end{aligned}$$

Egyértelmű megoldás van, ha $-11(\lambda-5) \neq 0$, azaz $\lambda \neq 5$. Oldjuk meg ekkor az egyenletrendszert például a Cramer-szabállyal:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -5 & 6 \\ 7 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = -25\lambda + 125 = -25(\lambda - 5),\; D_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \mathbf{5},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0;\; x_1 = \frac{25}{11},\; x_2 = \frac{-1}{11},\; x_3 = 0,\; \lambda \neq 5.$$

Ha $\lambda = 5$, akkor az egyenletrendszer determinánsa 0. Ebben az esetben a harmadik egyenlet az első két egyenlet összege, tehát az fölösleges. Azt elhagyva, kis rendezés után az

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 2 + x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 5 - 6x_3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek determinánsa és a módosított determinánsok:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -11,\; D_1 = \begin{vmatrix} 2 + x_3 & 3 \\ 5 - 6x_3 & -5 \end{vmatrix} = 13x_3 - 25,\; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 + x_3 \\ 2 & 5 - 6x_3 \end{vmatrix} = 1 - 8x_3.$$

A megoldás: $x_1 = \dfrac{13x_3 - 25}{-11}$, $x_2 = \dfrac{1 - 8x_3}{-11}$, x_3 tetszőleges.

Az egyenletrendszer rövidebben megoldható például a Gauss-féle eliminációs módszerrel. Ekkor az átalakítások után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ -11x_2 + 8x_3 &= 1 \\ (\lambda - 5)x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ebből a megoldás: Ha $\lambda \neq 5$, akkor $x_3 = 0$, $x_2 = \dfrac{-1}{11}$, $x_1 = \dfrac{25}{11}$. Ha $\lambda = 5$, akkor x_3 tetszőleges, $x_2 = \dfrac{1 - 8x_3}{-11}$, $x_1 = \dfrac{13x_3 - 25}{-11}$.

4. Feladatok

Vizsgálja meg, hogy megoldhatók-e az alábbi egyenletrendszerek. Ha igen, akkor oldja meg azokat:

1. $$\begin{aligned} 3x - 5y &= -1 \\ x + 2y &= 7; \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 6x + 4y &= 9 \\ 3x + 2y &= 6; \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2ix - y &= 0 \\ 4x + 3y &= 12 - 8i; \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} (1+i)x + iy &= 1 + 2i \\ x + 3y &= 7 + 2i; \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0; \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} 2x + 5y - z &= 7 \\ 3x - 4y - 3z &= 1 \\ x + 14y + z &= 2; \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} ix + y + z &= 2 - 4i \\ x + iy + z &= 0 \\ x + y + iz &= 0; \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -14 \\ 3y + 2z &= 0 \\ 5z &= 30; \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 5 \\ x - 2y - 5z &= 3 \\ x + 5y + 12z &= -1; \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4; \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ x - y - z + u &= 0 \\ -x + y + 2z - 2u &= 0{,}5; \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x - 2z + u &= -4 \\ 2y - 2z - v &= -2 \\ 2x + 2y - 3z + u - 2v &= -7. \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 &= 0; \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x - 8y &= 3 \\ 2x + y &= 1 \\ 4x + 7y &= -4. \end{aligned}$$

15. Oldja meg az **Ax** = **b** egyenletet, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket. Vizsgálja meg, hogy l milyen értékénél van egyértelmű megoldás, végtelen sok megoldás, ill. nincs megoldás:

16. $$\begin{aligned} \lambda x-5y+8z&=7\\ 3x+6y-7z&=12\\ x-16y+23z&=\lambda; \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} \lambda x+y+z&=1\\ x+\lambda y+z&=\lambda\\ x+y+\lambda z&=\lambda^2. \end{aligned}$$

Oldja meg a következő homogén egyenletrendszereket:

18. $$\begin{aligned} x+5y-10z&=0\\ 2x-3y+6z&=0\\ 3x+2y-4z&=0; \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 2x-y+z&=0\\ -x-y+3z&=0; \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} 5x-2y+z&=0\\ x+y-6z&=0\\ 3x\qquad+4z&=0\\ -y+2z&=0; \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ ix\qquad+iz&=0\\ (1+i)x+y+2iz&=0. \end{aligned}$$

Milyen l érték esetén van a triviálistól különböző megoldása az alábbi egyenletrendszereknek:

22. $$\begin{aligned} x+5y-3z&=0\\ -x+2\lambda y+3z&=0\\ 3x-y+5z&=0; \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} \lambda x+8y-8z&=0\\ (\lambda+1)x+\lambda y+z&=0\\ (\lambda+9)x+9y+\lambda z&=0; \end{aligned}$$

Oldja meg bázisvektor cserével az alábbi egyenletrendszereket:

24. $$\begin{aligned} 2x-4y+3z&=1\\ 2y-z&=2\\ 4x-4y+5z&=10; \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} 4x_1-x_2+5x_3+8x_4&=14\\ 3x_1-2x_2-4x_3+6x_4&=18\\ 7x_1-3x_2+x_3+14x_4&=32; \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x - \ \ y + \ \ z &= 4 \\ x + 2y + \ \ z &= 13 \\ 2x + 4y + 2z &= 26 \\ 4x + 5y + 4z &= 43; \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} 2x + \ \ y - 3z &= 8 \\ x - 2y + 5z &= 1 \\ 3x - \ \ y + 2z &= 6. \end{aligned}$$

Oldja meg a Gauss-féle eliminációs módszerrel a következő egyenletrendszereket:

28.
$$\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 11 \\ 3x + \ \ y - 2z &= -1 \\ -x \qquad + 3z &= \ \ 7; \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} 2x - \ \ 6y + 2z &= 7 \\ 3x - 10y + 4z &= 2 \\ 5x - 16y + 6z &= 9. \end{aligned}$$

[1] *Gabriel Cramer* (1704 – 1752) svájci matematikus nyomán.

[2] *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855) német matematikus nyomán.