Kovács Béla,

Matematika I.

12

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

XII. Sorozatok

1. Sorozat

A **sorozat** a természetes számokon értelmezett *függvény*. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ számok az (a_n) sorozat **elemei**. Az a_n szám a sorozat *n*-edik eleme, de magát a sorozatot is jelölheti.

Csak valós számokból álló sorozatokkal foglalkozunk.

Korlátosság

Az (a_n) sorozat **felülről korlátos**, ha van olyan *K* szám, hogy bármely *n* esetén

$$a_n \leq K.$$

Az (a_n) sorozat **alulról korlátos**, ha van olyan *k* szám, hogy bármely *n* esetén

$$k \leq a_n.$$

Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha *alulról* is és *felülről* is korlátos, azaz ha van olyan *H* szám, hogy bármely *n* esetén

$$|a_n| \leq H.$$

Csökkenő és növekvő sorozatok

Az (a_n) sorozat **növekvő**, ha bármely *n* esetén

$$a_{n+1} \geq a_n,$$

míg **csökkenő**, ha

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

A *növekvő* és *csökkenő* sorozatokat együtt **monoton** sorozatoknak mondjuk.

Ha $a_{n+1} > a_n$, ill. $a_{n+1} < a_n$, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat **szigorúan növekvő**, ill. **szigorúan csökkenő**.

Torlódási pont, határérték

A *t* szám a sorozat **torlódási pontja** (**torlódási helye**), ha *t* akármilyen (kis) környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.

Tétel: Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja (*Bolzano-Weierstrass-tétel*).

A sorozat **határértéke** a véges *A* szám, ha *A*-nak akármilyen (kis) környezete a sorozatnak majdnem minden elemét tartalmazza, azaz véges számú elem kivételével mindegyiket.

Fogalmazhatunk így is:
Az (a_n) sorozat határértéke az *A* szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan *N* természetes szám, hogy minden $n \geq N$ esetén

(1) $$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Az N számot **küszöbszámnak** vagy **küszöbindexnek** nevezzük.

Az (a_n) sorozat határértékének jelölése:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, vagy $\lim a_n = A$, vagy $a_n \to A$.

Egy sorozatot **konvergensnek** mondunk, ha van (véges) határértéke. Ellenkező esetben a sorozat **divergens**.

A *határérték* is torlódási pont.

Ha a sorozat monoton és korlátos, akkor *konvergens*. Ha a sorozat konvergens, akkor *korlátos*.

A sorozat határértéke lehet ∞ is. Az ilyen sorozat *divergens*.

Legyen (a_n) és (b_n) két konvergens sorozat. Ekkor

(2) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,

(3) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$,

(4) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\lim\ a_n}{\lim\ b_n}\right)$, ha $\lim\ b_n \neq 0$.

A határérték kiszámítására gyakran alkalmazható az ún. "**rendőr elv**": Ha $\lim a_n = \lim b_n = A$, és $a_n \le c_n \le b_n$, akkor a (c_n) sorozat konvergens és $\lim c_n = A$.

Néhány nevezetes konvergens sorozat és határérték:

- $\lim c = c$, ahol c állandó;
- $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim q^n = 0$, ha $|q| < 1$;
- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a > 0$; $\lim \sqrt[n]{n} = 1$;
- $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

ANIMÁCIÓ

2. MINTAPÉLDÁK

Megoldások: ⊙ láthatók ○ nem láthatók

1. Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{2n-1}{n+4}$ sorozatot monotonitásra és korlátosságra.

Megoldás. Írjuk fel a sorozat néhány elemét:

$$a_1 = \frac{1}{5},\ a_2 = \frac{3}{6},\ a_3 = \frac{5}{7}, \dots, a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+4} = \frac{2n+1}{n+5}.$$

Innen azt sejtjük, hogy a sorozat talán (szigorúan) növekvő. Ez azonban nem bizonyíték. Azt kell igazolni, hogy $a_{n+1} > a_n$, azaz

$$\frac{2n+1}{n+5} > \frac{2n-1}{n+4}.$$

Néhány átalakítást elvégezve:

$$(2n+1)(n+4) > (2n-1)(n+5)$$

$$2n^2 + 9n + 4 > 2n^2 + 9n - 5 \Rightarrow 4 > -5,$$

ami már nyilvánvaló. Igaz tehát az a feltételezés, hogy $a_{n+1} > a_n$, vagyis a sorozat növekvő.

A sorozat korlátos is. Ugyanis alulról korlátos, mert minden eleme pozitív, ezért a 0 szám egy alsó korlát. Felülről is korlátos, mert például $K = 3$ egy felső korlát, vagyis a sorozat minden eleme kisebb mint 3. Ez így látható be:

$$\frac{2n-1}{n+4} < 3 \Rightarrow 2n-1 < 3(n+4) \Rightarrow n > -13.$$

Ez pedig nyilvánvaló, mert *n* természetes szám. Tehát a sorozat korlátos.

2. A $b_n = (-1)^n\left(2+\frac{1}{n}\right)$ sorozat néhány eleme:

$$b_1 = -3,\ b_2 = \frac{5}{2},\ b_3 = -\frac{7}{3},\ b_n = \frac{9}{4},\ \dots .$$

Látható, hogy a sorozat nem monoton. Viszont korlátos, mert

$$|b_n| < 4 \Rightarrow \left|(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}\right)\right| < 4 \Rightarrow 1\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) < 4 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} < 2 \Rightarrow n > \frac{1}{2}.$$

Ez nyílvánvalóan igaz, mert *n* természetes szám.

3. Az $a_n = 2^n$ sorozat nem korlátos (alulról korlátos, de felülről nem), viszont növekvő, hiszen $2^{n+1} > 2^n$.

4. Az **1.** mintapéldában igazoltuk, hogy az $a_n = \frac{2n-1}{n+4}$ sorozat növekvő (tehát monoton) és korlátos. Ezért konvergens is.

5. A $b_n = n^2$ sorozat nem korlátos, ezért divergens.

6. Igazoljuk, hogy az $a_n = \frac{2n-1}{n+4}$ sorozat határértéke 2.

Megoldás. Azt kell igazolni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén van olyan *N* természetes szám, hogy

$\left|\frac{2n-1}{n+4} - 2\right| < \varepsilon$, ha $n \geq N$.

Rendezve, átalakítva:

$$\left|\frac{2n-1-2n-8}{n+4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-9}{n+4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{9}{\varepsilon} < n+4,$$

vagyis $n > \frac{9}{\varepsilon} - 4$ esetén teljesül az (1) egyenlőség. Tehát a határérték 2. Ha például $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$, akkor $n > 9000 - 4 = 8996$. A küszöbindex $N = 8997$. Ez azt jelenti, hogy a 8997. elemtől kezdve, a sorozat elemei a határérték 10^{-3} sugarú környezetébe esnek.

Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

7. $a_n = \frac{3n-2}{2n+1}$;

8. $a_n = \frac{5n+2}{n^2-3n+10}$;

9. $a_n = \frac{n^2-3n+10}{5n+2}$;

10. $a_n = \frac{\cos n\pi}{n}$;

11. $a_n = 1 - \frac{\sin n\pi}{n}$;

12. $a_n = n + \frac{1}{n}$;

13. $a_n = \left(1 + \frac{0{,}5}{n}\right)^n$;

14. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$;

15. $a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$;

16. $a_n = \frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{8n+3}$;

17. $a_n = \sqrt{2n-3}-\sqrt{n-1}$.

Megoldások. A példák megoldása során a sorozat *n*–edik elemét (a_n-et) alkalmas módon átalakítjuk. Például ha a_n racionális tört (a **7.**, **8.** és **9.** példa esetén), akkor célszerű mind a számlálót mind a nevezőt elosztani *n*–nel (esetleg *n* magasabb hatványával). Ezután az így átalakított sorozat határértékét számítjuk ki.

7. $\lim \frac{3n-2}{2n+1} = \lim \frac{3-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\left(3-\frac{2}{n}\right)}{\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3-0}{2+0} = \frac{3}{2}$;

8. $\lim \frac{5n+2}{n^2-3n+10} = \lim \frac{\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}} = \frac{0+0}{1-0+0} = 0$;

9. $\lim \frac{n^2-3n+10}{5n+2} = \lim \frac{n-3+\frac{10}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \frac{\lim(n-3)+0}{5+0} = \infty$;

10. $\cos n\pi$ értéke 1 vagy -1 attól függően, hogy *n* páros vagy páratlan. Ennek

következtében $\lim \frac{\cos n\pi}{n} = 0$;

11. $\lim\left(1-\frac{\sin n\pi}{n}\right) = \lim(1-0) = 1$;

12. $\lim\left(n+\frac{1}{n}\right) = \lim n + \lim \frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty$;

13. Használjuk fel azt, hogy $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Így $\lim\left(1+\frac{0{,}5}{n}\right)^n = e^{0{,}5} = \sqrt{e}$;

14. $\lim\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}\cdot e = 1$;

15. $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = \infty$; mert $\left(2+\frac{1}{n}\right)^n > 2^n$ és $2^n \to \infty$;

16. $\lim \frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{8n+3} = \lim \frac{\sqrt{1+3/n+1/n^2}+1}{8+3/n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$;

Emeljünk ki mindkét tagból $\sqrt{n}$ -et. Ekkor

$$\lim\left(\sqrt{2n-3}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\sqrt{n}\cdot\lim\left(\sqrt{2-\frac{3}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)=\infty.$$

18. Határozzuk meg az $a_n=(-1)^n\dfrac{2n-1}{n+3}$ sorozat torlódási pontjait.

Megoldás. A páros indexű elemek a 2 helyen torlódnak, mert ha *n* páros, akkor $\lim a_n=2$. A páratlan indexű elemek pedig a -2 helyen, mert páratlan *n* esetén $\lim a_n=-2$. Tehát két torlódási hely van, és ezek: $t_1=2$, $t_2=-2$.

19. Vizsgáljuk az $a_n=\dfrac{n+5}{2n+1}$ sorozatot monotonitás, korlátosság, határérték, torlódási pont szempontjából. A sorozat elemei hányadiktól kezdve esnek a határérték 0,01 sugarú környezetébe ? A sorozatnak hány eleme van e környezeten kívül ?

Megoldás. A sorozat első három eleme: $a_1=6/3=2$, $a_2=7/5$, $a_3=8/7$. Ezekből úgy tűnik, hogy a sorozat szigorúan csökkenő, azaz $a_{n+1}<a_n$. Ezt így igazoljuk:

$$\frac{(n+1)+5}{2(n+1)+1}<\frac{n+5}{2n+1}\Rightarrow(n+6)(2n+1)<(n+5)(2n+3).$$

A szorzásokat és összevonásokat elvégezve, a 6 < 15 nyilvánvalóan igaz relációt kapjuk. Tehát helyes az a feltételezés, hogy a sorozat szigorúan csökkenő. Ezzel a monotonitásra történő vizsgálatot befejeztük.

A sorozat felülről korlátos, mert legnagyobb eleme az $a_1=2$ elem. Alulról is korlátos, mert bármely negatív szám (de a 0 is) alsó korlát. Tehát a sorozat korlátos.

A sorozat konvergens, mert monoton és korlátos. Határértéke:

$$\lim\frac{n+5}{2n+1}=\lim\frac{1+\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+0}{2+0}=0{,}5.$$

Mivel a sorozat konvergens, ezért egyetlen torlódási pontja (helye) van, és ez a határérték, azaz *t* = 0,5.

A sorozat *n* -edik eleme akkor esik a 0,5 határérték 0,01 sugarú környezetébe, ha $|a_n-0{,}5|<0{,}01$ egyenlőtlenség teljesül. Jelen esetben, ha

$$\left|\frac{n+5}{2n+1}-0{,}5\right|<0{,}01\Rightarrow\left|\frac{n+5-n-0{,}5}{2n+1}\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow 450<2n+1.$$

Innen *n* > 224,5. Tehát a sorozat elemei a 225. -től kezdve esnek a határérték 0,01 sugarú környezetébe. Ebből az következik, hogy a sorozatnak 224 eleme van e környezeten kívül. Az $\varepsilon=0{,}01$ -hez tartozó küszöbszám (küszöbindex) 225.

3. Feladatok

Vizsgálja a következő sorozatokat. A vizsgálat terjedjen ki a monotonitásra, korlátosságra, határértékre és a torlódási pontra:

1. $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$;

2. $a_n = \dfrac{3n+1}{n+3}$;

3. $a_n = \dfrac{1000n}{n^2+1}$;

4. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

5. $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}$;

6. $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+1}$;

7. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$;

8. $a_n = n \sin\dfrac{1}{n}$;

9. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

10. $a_n = \dfrac{7n+2}{4n-1}$;

11. $a_n = \dfrac{3n^2+2n}{n^2+n-1}$;

12. $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$;

13. $a_n = \dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+1}}{n^2-n+1}$;

14. $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$;

15. $a_n = \sqrt[n]{1{,}1}$;

16. $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n+1}$;

17. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{2n} \cdot \cos\dfrac{1}{n}$;

18. $a_n = (-1)^n \cdot 0{,}99^n$.

Számítsa ki, hogy az alábbi sorozatok elemei hányadiktól kezdve esnek a határérték ε sugarú környezetébe és hány elem esik azon kívülre:

19. $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

20. $a_n = \dfrac{4n+1}{n+3}$, $\varepsilon = 10^{-4}$;

21. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 10^{-6}$;

22. $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$, $\varepsilon = 10^{-1}$.