KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

14

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

XIV. Nevezetes görbék

1. Az egyenes egyenlete

A $P_1(x_1,y_1)$ és $P_2(x_2,y_2)$ pontokon átmenő **egyenes** egyenlete:

(1)

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad x_2\neq x_1.$$

Az $m:=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ hányados neve **iránytényező** (**iránytangens**, **meredekség**).

A $P_1(x_1,y_1)$ ponton átmenő, *m iránytangensű* egyenes egyenlete:

(1/a)

$$y-y_1=m(x-x_1),$$

amely kis átrendezéssel $y=mx+b$ alakban is felírható. Az egyenes az *y* tengelyt az $y=b$ helyen metszi.

Az egyenes általános egyenlete:

(2)

$$Ax+By-C=0.$$

Az *x*, ill. *y tengellyel párhuzamos egyenes* egyenlete

$y=b$, ill. $x=a$.

Az egyenes *tengelymetszetes* egyenlete:

(3)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

ahol *a*, ill. *b* az egyenes tengelymetszetei.

Hesse-féle normálegyenlet

A (2) egyenlet mindkét oldalát osszuk el az $\mathbf{n}=(A,B)$ normálvektor abszolút értékével. Ekkor kapjuk az egyenes **Hesse-féle normálegyenletét**:

(4)

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Az egyenesnek az origótól való távolsága $\dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2. Másodrendű görbék

Kör egyenlete

Az $M(u, v)$ ponton átmenő, a sugarú **kör** egyenlete

(5) $$(x-u)^2+(y-v)^2=a^2.$$

Ha a kör középpontja az origó, akkor egyenlete:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Az (5) -ben a négyzetreemelések és összevonások elvégzése után a kör egyenlete

(6) $$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

alakban is felírható.

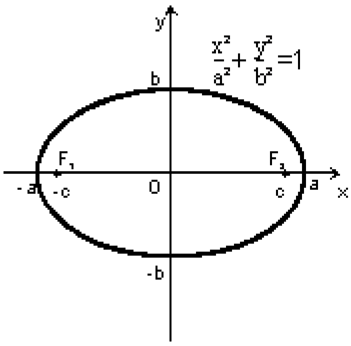
Ellipszis egyenlete

Az a, b féltengelyű, origó középpontú **ellipszis** kanonikus egyenlete:

(7) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Az $F_1(-c;0)$ és $F_2(c;0)$ pontok az ellipszis fókuszai, ahol $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$. A c állandó neve **lineáris excentricitás**.

Az ellipszis *nagytengelyének*, ill. *kistengelyének* hossza 2*a*, ill. 2*b* (2.81. ábra)



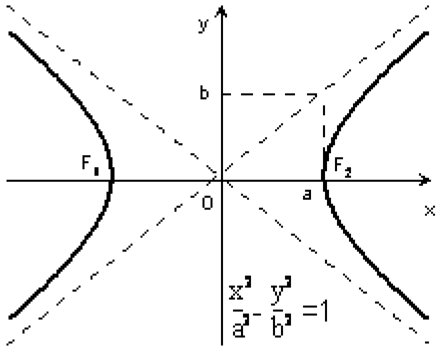
2.81. ábra

Hiperbola egyenlete

Ha a **hiperbola** fókuszai az $F_1(-c;0)$ és $F_2(c;0)$ pontok, akkor kanonikus egyenlete:

(8) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$. Valós tengelyének hossza 2*a*. A hiperbola *aszimptotáinak* egyenlete: $y=\pm\frac{b}{a}x$. (2.82. ábra).



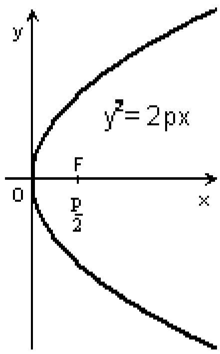
2.82. ábra

Parabola egyenlete

A **parabola** ún. kanonikus egyenlete:

(9) $$y^2 = 2px,$$

ahol a $p > 0$ paraméter a fókusztávolság $\left(\frac{p}{2}\right)$ kétszerese. Ennek a parabolának a tengelye az *x* tengely, csúcspontja az origó (2.83. ábra).



2.83. ábra

Gyakran találkozunk az $y = ax^2$ görbével, amely szintén parabola, csak ennek tengelye az *y* tengely, fókusztávolsága pedig $\frac{1}{4a}$.

Síkgörbék egyenlete

A kört, az ellipszist, a hiperbolát és parabolát **kúpszeleteknek** is mondjuk, mert ezek a görbék egy *forgáskúpnak* síkkal való metszésével mint *metszésgörbék* származtathatók.

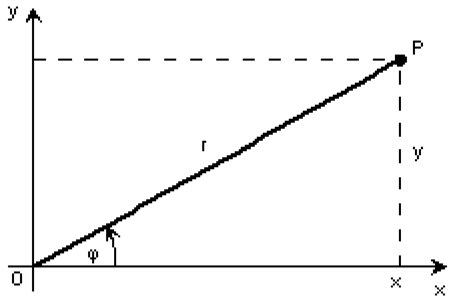
Síkgörbék egyenletének felírásakor gyakran alkalmazzuk azt a módszert, hogy a görbe általános $P(x, y)$ pontjának *x* és *y* koordinátáit valamilyen segédváltozó (paraméter) függvényeként írjuk fel

(10) $$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}$$

módon. Itt *t* a paraméter, amely lehet szög, távolság stb. A görbe egyenletének (egyenlet-rendszerének) ezt az alakját **paraméteres alaknak** nevezzük. Ha a (10) egyenletrendszerből a *t* paramétert kiiktatjuk, akkor (esetleg) megkaphatjuk a görbe $f(x,y)=0$ alakú egyenletét.

Poláris koordinátarendszer

Bizonyos görbék egyenlete egyszerűbb lehet, ha az eddigiekhez képest másfajta koordinátarendszert használunk. Ilyen például a **poláris koordinátarendszer**, amely egy *pólusból* (origóból) és egy *kezdőirányból* áll (2.84. ábra).



2.84. ábra

A *P* pont poláris koordinátái az *r* távolság és a φ szög. A Descartes-féle és a poláris koordinátarendszert a 2.84. ábrának megfelelően elhelyezve, az x, y Descartes-féle és az r, φ poláris koordináták között az

(11)

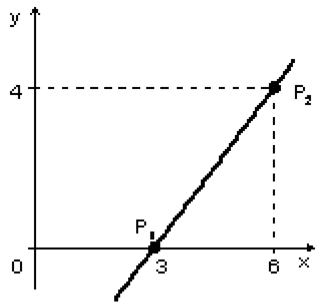
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{x}{x} \end{aligned}\right\}$$

összefüggések állnak fenn. Egy görbe egyik koordinátarendszerbeli egyenlete, a (11) összefüggések felhasználásával átírható másik rendszerbeli egyenletté.

3. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ○ nem láthatók

1. Írjuk fel a $P_1(3;0)$ és $P_2(6;4)$ pontokon átmenő egyenes $(1)-(4)$ alakú egyenleteit (2.85. ábra).



2.85. ábra

Megoldás. Az (1) és (1/a) alakú egyenlet:

$$y-0=\frac{4-0}{6-3}(x-3) \Rightarrow y=\frac{4}{3}x-4 \cdot$$

A (2) általános egyenlet: $4x-3y-12=0$.

A tengelymetszetes egyenletet 12 -vel való osztással kapjuk.

$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1.$

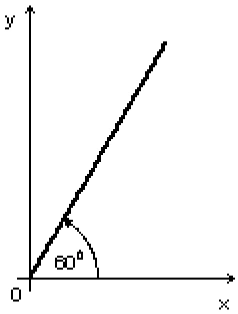
A normálvektor az általános egyenletből olvasható ki: $\mathbf{n}=(4;-3)$. Ennek abszolút értéke: $\sqrt{16+9}=5$.

Az általános egyenletet ezzel osztva, a *Hesse-féle normálegyenletet* kapjuk:

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0.$$

Az egyenesnek az origótól való távolsága: $d=\frac{12}{5}$.

2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az origón, és az *x* tengely pozitív irányával 60°-os szöget zár be (2.86. ábra).

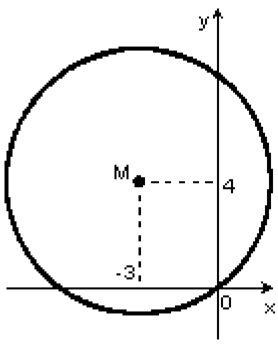


2.86. ábra

Megoldás. Az (1/a) egyenletet kell felírni, vagy annak $y=mx+b$ alakját. Itt $m=\operatorname{tg}60^{\circ}=\sqrt{3}$, $b=0$. Tehát az egyenes egyenlete: $y=\sqrt{3}\,x$.

3. Az $y=4$ egyenes párhuzamos az *x* tengellyel, az *y* tengelyt az $y=4$ helyen metszi. Az $x=5$ egyenes párhuzamos az *y* tengellyel, az *x* tengelyt az $x=5$ helyen metszi. Az *y* tengely egyenlete: $x=0$; az *x* tengely egyenlete: $y=0$ (2.86. ábra).

4. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az $M(-3;4)$ pont, sugara pedig 5 (2.87. ábra).

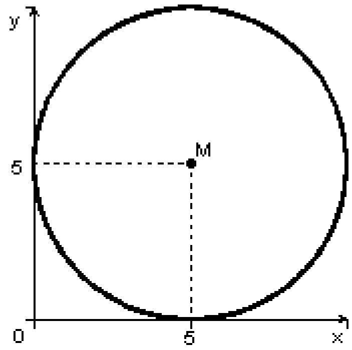


2.87. ábra

Megoldás. Az (5) képlet szerint: $(x+3)^2+(y-4)^2=25$.

5. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az első síknegyedben van, érinti a koordinátatengelyeket, és sugara 5 (2.88.

ábra). Írjuk fel a kör (6) alakú egyenletét is.



2.88. ábra

Megoldás. Az ábráról látható, hogy a középpont koordinátái egyenlők egymással és a sugárral, azaz $u = v = a = 5$. Tehát az (5) szerint az egyenlet:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

A négyzetreemeléseket és az összevonást elvégezve, a (6) alakú egyenlet:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$$

6. Ábrázoljuk az alábbi görbéket:

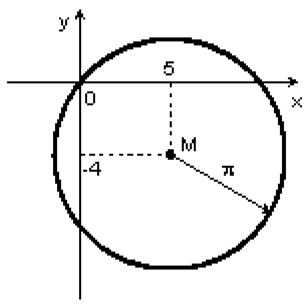
a) $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 8 = 0$;

b) $x^2 + y^2 = 2x$.

Megoldás. Mindkét esetben teljes négyzetté való kiegészítéssel megpróbáljuk a körök egyenletét (5) alakúra hozni, ahonnan leolvashatók a középpont koordinátái és a sugár.

a) $(x-5)^2 - 25 + (y+4)^2 - 16 - 8 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 + (y+4)^2 = 49.$

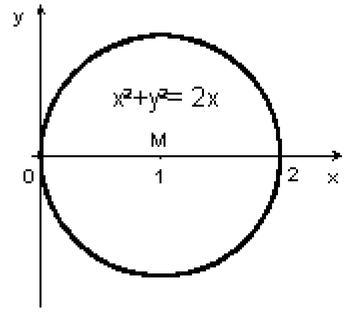
A középpont: $M(5;-4)$, a sugár pedig 7 (2.89. ábra).



2.89. ábra

b) $(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = 1.$

A középpont: $M(1;\ 0)$, a sugár pedig 1 (2.90. ábra).



2.90. ábra

7. A $12x^2+16y^2-48=0$ egyenlet egy ellipszis egyenlete. Írjuk fel az ellipszis (7) alakú egyenletét, majd állapítsuk meg a tengelyek hosszát és számítsuk ki a lineáris excentricitást.

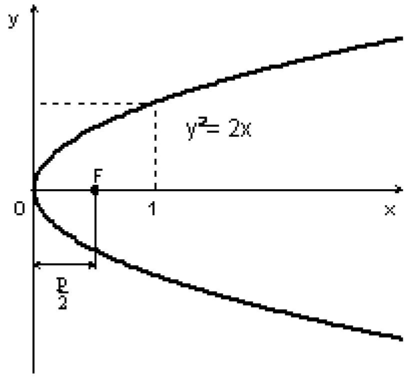
Megoldás. Osszuk el az egyenletet 48 -cal. Ekkor az $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ egyenletet kapjuk. Innen látszik, hogy $a^2=4$, $b^2=3$, azaz $a=2$, $b=\sqrt{3}$. Tehát a nagytengely hossza $2a=4$, a kistengely hossza $2b=2\sqrt{3}$. A lineáris excentricitás: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$.

8. Írjuk fel a $4x^2-8y^2-20=0$ hiperbola aszimptotáinak egyenletét.

Megoldás. Írjuk fel a hiperbola (8) alakú egyenletét. Ehhez osszuk el az egyenletet 20 -szal. Ekkor $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2,5}=1$. Ebből látszik, hogy $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{2,5}$. Az aszimptoták egyenlete: $y=\pm\frac{b}{a}x$, azaz $y=\pm\frac{\sqrt{2,5}}{\sqrt{5}}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$.

9. Az $y^2=2x$ parabola paramétere, $p=1$.

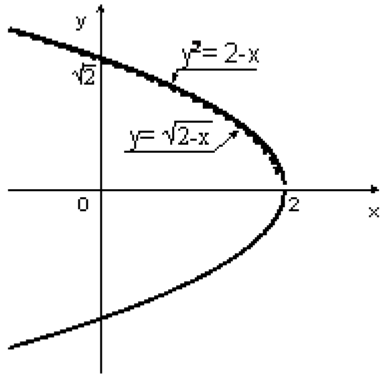
A fókusztávolság ennek fele, azaz $\frac{p}{2}=0,5$. (2. 91. ábra).



2.91. ábra

10. Ábrázoljuk az $y^2 = 2 - x$ és $y = \sqrt{2-x}$ görbéket.

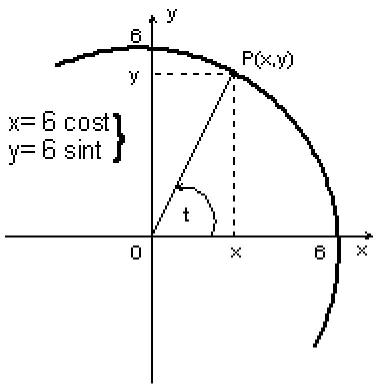
Megoldás. Az $y^2 = 2 - x$ görbe olyan parabola, melynek csúcspontja a $C(2;0)$ pont, tengelye az *x* tengely, és $2 - x$ nem lehet negatív, azaz $x \leq 2$. Az $y = \sqrt{2-x}$ görbe ennek a parabolának a "felső fele" (2.92. ábra).



2.92. ábra

11. Az $\left.\begin{matrix} x = 6\cos t \\ y = 6\sin t \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer az origó középpontú, 6 sugarú kör paraméteres egyenletrendszere. Bizonyítsa be!

A *t* paraméter az origóból a kör tetszőleges $P(x,y)$ pontjába húzott rádiusznak az *x* tengely pozitív felével közrezárt szöge (2.93. ábra).



2.93. ábra

Az ábráról ugyanis leolvasható (az *OP'P* derékszögű háromszögből), hogy $x = 6\cos t$, $y = 6\sin t$. Ha a *t* paraméter 0 -tól 2π -ig változik, akkor a *P* pont az $A(6;0)$ pontból kiindulva egyszer végigmegy a körön (pozitív körüljárással). Ez a kör jelen esetben a mozgó *P* pont pályagörbéje. Ennek paramétertől mentes egyenletét megkapjuk, ha az egyenletrendszerből a *t* paramétert kiiktatjuk. Ez jelen esetben legegyszerűbben úgy történhet, hogy mindkét egyenletet négyzetre emeljük, majd összeadjuk. Ekkor az

$x^2 + y^2 = 6^2 \cos^2 t + 6^2 \sin^2 t = 6^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = 6^2$, azaz $x^2 + y^2 = 36$

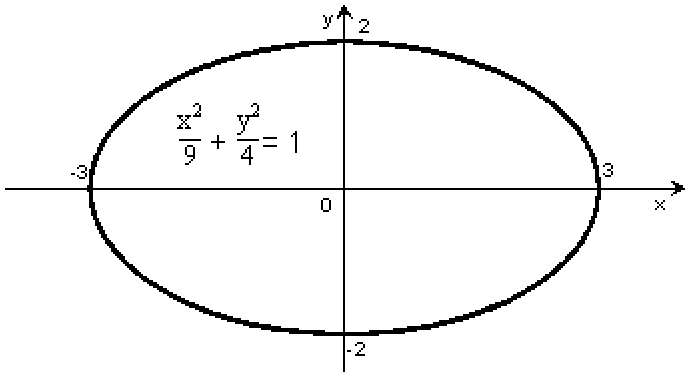
egyenletet kapjuk, amely valóban az origó középpontú, 6 sugarú kör egyenlete.

12. Az egyenletrendszerből iktassuk ki a *t* paramétert így:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned}\right\}$$

$\frac{x}{3} = \cos t$, $\frac{y}{2} = \sin t \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, azaz $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Látható, hogy egy ellipszis egyenletét kaptuk (lásd a 2.81. ábrát). A *t* paraméter jelentése a 2.94. ábráról olvasható le. Az ábra egyúttal magyarázatot ad az ellipszis "kétkörös" szerkesztésére.



2.94. ábra

13. Az *x* = 6ch *t, y* = 4sh *t* egyenletrendszer egy hiperbola paraméteres egyenletrendszere, melynek középpontja az origó, valós féltengelyének hossza 6, képzetes féltengelyének hossza 4.

Ugyanis

$\frac{x}{6} = \operatorname{ch} t$, $\frac{y}{4} = \operatorname{sh} t \Rightarrow \frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{4^2} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

Ez pedig valóban hiperbola egyenlete. Innen $y^2 = 16\left(\frac{x^2}{36} - 1\right)$.

Ha $|x|$ sokkal nagyobb mint 1, akkor az $\frac{x^2}{36}$ mellett a -1 elhanyagolható, és ekkor $y \approx \pm\frac{2}{3}x$. Így a hiperbola két aszimptotájának egyenlete. $y = \pm\frac{2}{3}x$.

14. Az $y = f(x)$ egyenletű görbe egy lehetséges paraméteres egyenletrendszere felírható úgy, hogy paraméternek az *x* koordinátát választjuk.

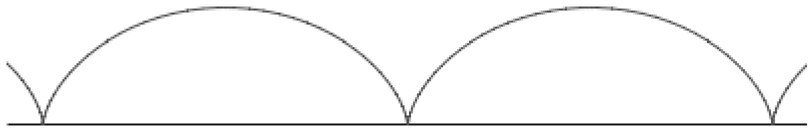
Ekkor az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= f(t) \end{aligned}\right\}.$$

Például az $y = x^2 + 4x - 2$ parabola egy lehetséges paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 + 4t - 2 \end{aligned}\right\}.$$

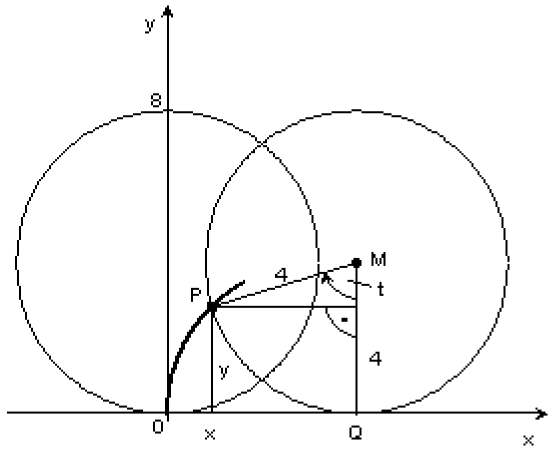
15. Ha egy kör egy egyenesen csúszás nélkül gördül, akkor a kör bármely pontja **cikloist** ír le.



Ciklois *[i]*

Gördítsük a 4 sugarú kört az x tengelyen úgy, hogy a kiszemelt pont induláskor az origóban legyen. Válasszuk paraméternek az elfordulás szögét (2.95. ábra). Ekkor a ciklois paraméteres egyenletrendszere:

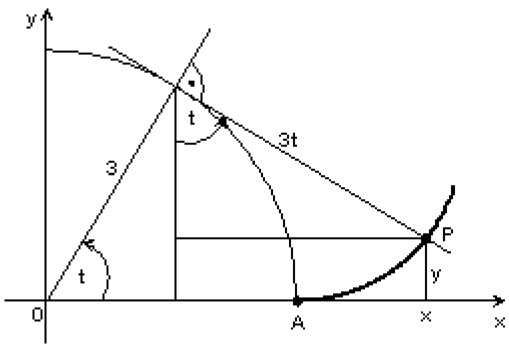
$$\left.\begin{aligned} x &= 4(t - \sin t) \\ y &= 4(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}.$$



2.95. ábra

16. Ha egy álló körön valamelyik érintőjét csúszás nélkül gördítjük, akkor az egyenes bármely pontja **körevolvenst** ír le.

Gördítsük a kezdő helyzetben $x = 3$ egyenest az $x^2 + y^2 = 9$ körön (2.96. ábra).



2.96. ábra

Válasszuk paraméternek az egyenes elfordulásának szögét. Ekkor a kiválasztott $A(3;0)$ pontból induló körevolvens paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3(\cos t + t\sin t)\\ y &= 3(\sin t - t\cos t)\end{aligned}\right\}.$$

17. Számítsuk ki a Descartes-koordinátákkal megadott $P(-9;3\sqrt{3})$ pont poláris koordinátáit, és a poláris koordinátákkal megadott $Q\left(12;\ \frac{\pi}{3}\right)$ pont Descartes-koordinátáit. Ábrázoljuk ezt a két pontot, feltüntetve a koordinátákat.

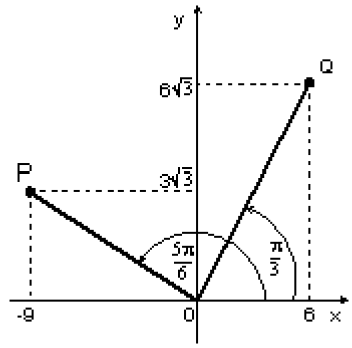
Megoldás. A *P* pont Descartes-koordinátái: $x=-9$, $y=3\sqrt{3}$. A poláris koordináták:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-9)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3};$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{-9}{6\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{6}.$$

A *Q* pont poláris koordinátái: *r* = 12, $\varphi=\frac{\pi}{3}$. A Descartes-koordináták.:

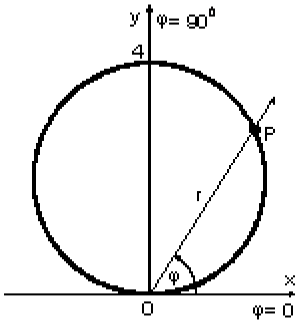
$x=r\cos\varphi=12\cos\frac{\pi}{3}=6$, $y=r\sin\varphi=12\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$. (2.97. ábra).



2.97. ábra

18. Ábrázoljuk az $r=4\sin\varphi$, poláris koordinátákkal adott görbét. Írjuk fel a görbe Descartes-koordinátás egyenletét is.

Megoldás. Először néhány φ érték esetén számítsuk ki *r* értékét, majd ábrázoljuk az így kapott (r,φ) koordinátájú pontokat (2.98. ábra). E pontokat összekötve, a görbéről egy elfogadható vázlatot kaphatunk. A $4\sin\varphi$ függvény tulajdonságait felhasználva, a vázlat finomítható.

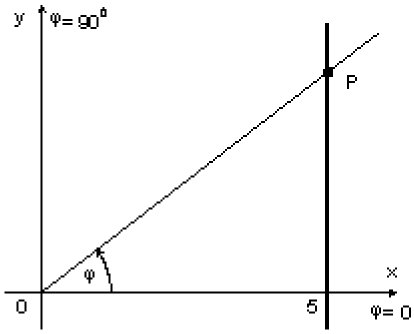


2.98. ábra

A görbe Descartes-koordinátás egyenletének felírásához, az $r = 4\sin\varphi$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r -rel. Ekkor az $r^2 = 4r\sin\varphi$ egyenletet kapjuk. A (11) képletek alapján $r^2 = x^2 + y^2$, $r\sin\varphi = y$, így az $x^2 + y^2 = 4y$, azaz $x^2 + y^2 - 4y = 0$ egyenlethez jutunk. Az $y^2 - 4y$ részt teljes négyzetté kiegészítve, az $x^2 + (y-2)^2 = 4$ egyenletből látható, hogy a görbe egy $M(0;\ 2)$ középpontú, 2 sugarú kör.

19. Az $r = \dfrac{5}{\cos\varphi}$, azaz $r\cos\varphi = 5$, poláris koordinátákkal adott "görbe" olyan egyenes, amely merőleges a $\varphi = 0$ (azaz *x*) tengelyre, és az origótól 5 egységnyi távolságra van.

Ugyanis a (11) szerint $r\cos\varphi = x$, így a "görbe" Descartes-koordinátás egyenlete: $x = 5$ (2.99. ábra).



2.99. ábra

20. Az $x^2 + y^2 = 25$ kör polárkoordinátás egyenlete:

$r^2 = 25$ azaz r = 5.

21. Ábrázoljuk az alábbi nevezetes görbéket:

a) $r = 8(1 - \cos\varphi)$;

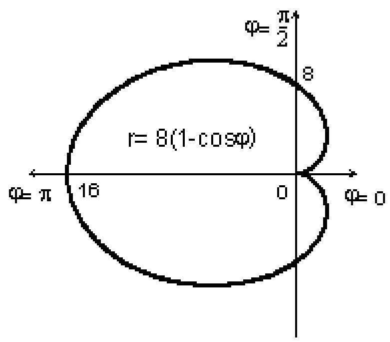
b) $r = 2\varphi$;

c) $r = \dfrac{3}{\varphi}$;

d) $r = e^{0,1\varphi}$.

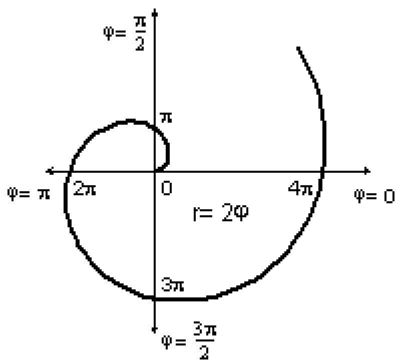
Megoldások. Valamennyi görbe esetében célszerű néhány pont helyzetét rögzíteni, majd e pontok összekötése után a vázlatot finomítani.

a) Az $r(\varphi) = 8(1-\cos\varphi)$ függvény páros, azaz $r(-\varphi) = r(\varphi)$. Ez azt jelenti, hogy a görbe szimmetrikus a $\varphi = 0$ tengelyre. Ha $\varphi = 0$, akkor $r = 0$ (ez a legkisebb *r* érték); ha $\varphi = \pi$, akkor $r = 16$ (ez a legnagyobb *r* érték). A függvény $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi$ között szigorúan növekvő. Ennyi elegendő a görbe felrajzolásához. A görbe neve **kardioid** (szívgörbe) (2.100. ábra).



2.100. ábra

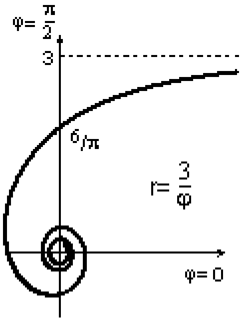
b) Itt $\varphi = 0$ esetén $r = 0$, és φ növekedésével *r* korlátlanul növekszik. A görbe neve **archimédeszi spirális** (2.101. ábra).



2.101. ábra

c) Ha $\varphi = 2\pi$, akkor $r = \frac{3}{2\pi}$. Ha φ növekszik, akkor *r* értéke csökken, és $\lim\limits_{\varphi\to\infty} r(\varphi) = \lim\limits_{\varphi\to\infty} \frac{3}{\varphi} = 0$. Ez azt jelenti, hogy a görbe pozitív körüljárással végtelenszer csavarodik az origó (a pólus) körül, 0 -hoz tartó sugárral. Ha viszont φ csökken, akkor *r* értéke nő, és $\lim\limits_{\varphi\to 0} r(\varphi) = \infty$.

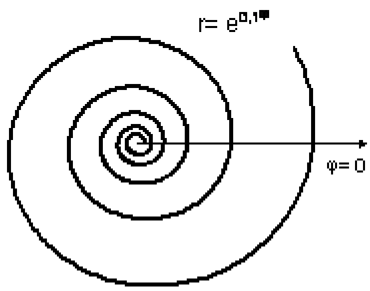
Szorozva az $r = \frac{3}{\varphi}$ egyenletet $\sin\varphi$ -vel, az $r\sin\varphi = 3\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, azaz $y = 3\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ egyenletet kapjuk. Ha $\varphi \to 0$, akkor $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$, így a görbe simul az $y = 3$ egyeneshez. A görbe neve **hiperbolikus spirális** (2.102. ábra).



2.102. ábra

d) Ha $\varphi = 0$, akkor $r = e^0 = 1$; $\lim\limits_{\varphi \to \infty} r(\varphi) = \lim\limits_{\varphi \to \infty} e^{0,1\varphi} = \infty$,

$\lim\limits_{\varphi \to -\infty} r(\varphi) = \lim\limits_{\varphi \to -\infty} e^{0,1\varphi} = 0$. Az $e^{0,1\varphi}$ függvény szigorúan növekvő. A görbe neve **logaritmikus spirális** (2. 103. ábra).



2. 103. ábra

22. Ábrázoljuk az alábbi egyenletekkel megadott görbéket:

a) $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$;

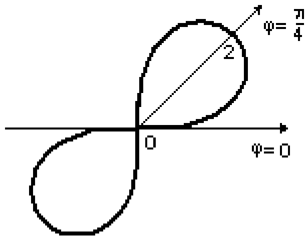
b) $\sqrt{x^2 + y^2}^3 = 2xy$.

Megoldás. Célszerű mindkét görbe egyenletét poláris koordináták segítségével felírni. Használjuk a (11) képleteket.

a) $r^4 = 8 \cdot r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \Rightarrow r^2 = 4 \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi \Rightarrow$

$r^2 = 4\sin 2\varphi \Rightarrow r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$.

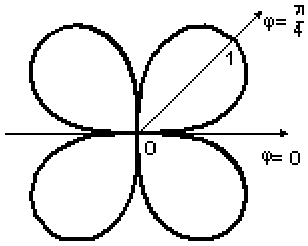
Látható, hogy *r* nincs értelmezve ott, ahol $\sin 2\varphi < 0$, azaz $\frac{\pi}{2}$ és π (azaz 90^o és 180^o) között, továbbá $3\frac{\pi}{2}$ és 2π között. Ebben a szögtartományban tehát nincs görbe. Ha $\varphi = 0$, akkor *r* = 0, ha $\varphi = \frac{\pi}{4}$, akkor $r = 2$. Közben *r* szigorúan növekszik. A görbe neve **lemniszkáta** (2.104. ábra).



2.104. ábra

b) $r^3 = 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi \Rightarrow r = 2\sin\varphi\cos\varphi \Rightarrow r = \sin 2\varphi$

A görbe négylevelű lóheréhez hasonlít, szimmetrikus az $y = \pm x$ egyenesekre. (2. 105. ábra).



2. 105. ábra

4. Feladatok

1. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_1(8;0)$ és $P_2(-2;3{,}75)$ ponton. Írja fel az egyenes tengelymetszetes alakját, Hesse-féle alakját, majd számítsa ki az egyenes origótól való távolságát.

2. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek iránytangense (meredeksége) 2 és átmegy a $P(4;-5)$ ponton. Hány fokos szöget zár közre az egyenes és az *x* tengely?

3. Állapítsa meg, hogy az alább megadott három egyenes közül melyek párhuzamosak, ill. melyek merőlegesek egymásra:

$e_1: 3x + 6y - 2 = 0$, $e_2: y = 2x + 81$, $e_3: 0{,}41x = 2{,}46 - 0{,}82y$.

4. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az $M(4;2)$ pont, sugara pedig 3. Hol metszi ez a kör az *x* tengelyt?

5. Határozza meg az $x^2 + y^2 + 12x - 8y = 0$ kör sugarát és középpontjának koordinátáit. Átmegy-e ez a kör az origón?

6. Határozza meg az $5x^2 + 9y^2 = 45$ ellipszis tengelyeinek hosszát, lineáris excentricitását és fókuszainak koordinátáit.

7. Számítsa ki a $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ ellipszis féltengelyeinek hosszát.

8. Határozza meg a $9x^2 - 16y^2 = 72$ hiperbola féltengelyeinek hosszát, fókuszainak helyzetét, majd írja fel az aszimptoták egyenletét.

9. Határozza meg az alábbi parabolák fókuszának helyzetét. Hogyan helyezkednek el ezek a görbék a koordinátarendszerben:

a) $y^2 = -9x$;

b) $y = 0{,}2x^2$;

c) $y = 0{,}25x^2 - 3x + 7$.

10. Igazolja, hogy az alábbi megadott görbék körök. Állapítsa meg ezek sugarát és középpontjuk koordinátáit:

a) $x = 8\cos t$, $y = 8\sin t$;

b) $x = 2 + 3\cos t$, $y = -4 + 3\sin t$.

11. Az alább megadott három görbe mindegyike kúpszelet. Állapítsa meg, hogy milyen görbékről van szó, majd határozza meg a fókuszok helyzetét:

a) $x = 12\cos t \qquad y = 8\sin t$;

b) $x = 10\,\mathrm{ch}\,t \qquad y = 6\,\mathrm{sh}\,t$

c) $x = t^2 \qquad y = 4t$

12. Az alább megadott görbék egyenletrendszeréből iktassa ki a paramétert, majd állapítsa meg, hogy milyen görbékről van szó:

a) $x = t + 1,\ \ y = t^2 + 2t - 3$;

b) $x = t^2 - t + 1,\ \ y = t^2 + t + 1$;

c) $x = t^2 - 2t + 3,\ \ y = t^2 - 2t + 1$;

d) $x = a\sin^2 t,\ \ y = b\cos^2 t$;

e) $x = a\cos^4 t,\ \ y = a\sin^4 t$;

f) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \ y = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

13. Írja fel az alábbi görbék polárkoordinátás egyenletét:

a) $y = x + 2$;

b) $y = x$;

c) $y = x^2$;

d) $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

e) $x^2 + y^2 = 100$;

f) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

14. Az alábbi polárkoordinátákkal megadott görbék egyenletét írja fel Descartes- -koordinátás alakban:

a) $r = 14 + \cos\varphi$;

b) $r = 6$;

c) $\varphi = \pi/3$;

d) $r = \frac{4}{\cos\varphi}$;

e) $r = 4 + \sin\varphi$;

f) $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

BIBLIOGRÁFIA:

[i] Forrás: http://hu.wikipedia.org/wiki/Ciklois