KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

15

Új Magyarország Fejlesztési Terv

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

XV. Differenciálszámítás

1. Derivált, deriválás

Az *f* függvény **deriváltján** az

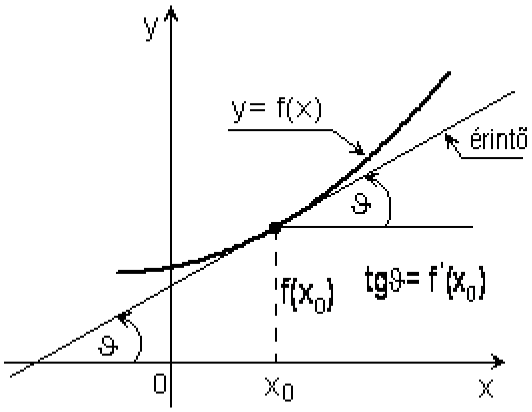
(1) $$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határértéket értjük (feltéve, hogy az létezik és véges).

Az $y = f(x)$ függvény deriváltjának jelölései: f', $f'(x)$, y', $y'(x)$, $\dot{y}$, $\frac{dy}{dx}$ stb.

A derivált x_0 helyen vett $f'(x_0)$ *helyettesítési értékét* szokás a függvény x_0 helyhez tartozó **differenciálhányadosának** is nevezni. A derivált előállítását **deriválásnak** vagy **differenciálásnak** mondjuk.

A $f'(x_0)$ differenciálhányados *geometriai jelentése* az $y = f(x)$ görbe x_0 helyhez tartozó érintőjének az iránytangense, azaz $f'(x_0) = \operatorname{tg} \vartheta$ (3.1. ábra).

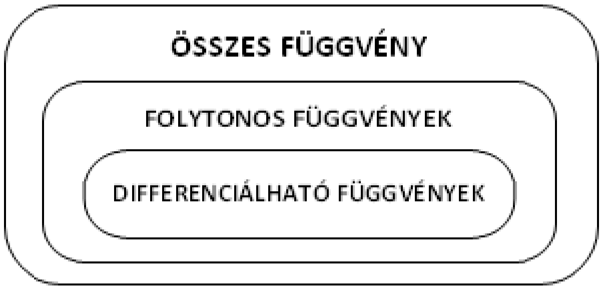


3.1. ábra

A deriválható függvény folytonossága

Ha egy függvénynek valamely helyen vagy intervallumon van deriváltja, akkor a függvény itt differenciálható. A differenciálhatóságból következik a függvény *folytonossága*.

Fordítva azonban ez nincs így. Például az $f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ helyen nem differenciálható, ugyanakkor itt (és mindenütt) folytonos.



Függvények különböző osztályainak kapcsolata

2. Deriválási szabályok

Legyenek *u*, *v*, *f*, *g differenciálható függvények*.

Ekkor:

1. $(Cu)' = Cu'$, *C* állandó;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$;
5. $[f(g(x))]' = f'_g \cdot g'_x$ (**láncszabály**);
6. $y = f(x)$ és $x = f^{-1}(y)$. Ekkor $f'(x) = \dfrac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}$;
7. $x = x(t)$, $y = y(t)$, akkor $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Alapfüggvények deriváltjai

Az **alapfüggvények deriváltja**

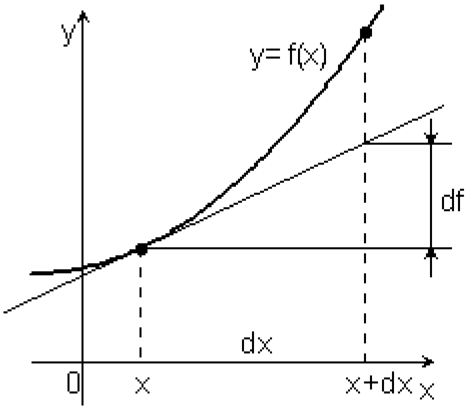
$C' = 0$, C állandó;	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$;
$(\sin x)' = \cos x$;	$(\cos x)' = -\sin x$;
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;	$(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$;
$(e^x)' = e^x$;	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	$(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;	$(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$;
$(\mathrm{arsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;	$(\mathrm{arch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;
$(\mathrm{arth}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}, \; \lvert x\rvert < 1$;	$(\mathrm{arcth}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}, \; \lvert x\rvert > 1$.

Értelmezzük a függvény második harmadik stb. deriváltját. Jelölésük: $f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$.

A *f* függvény **differenciálja** (3.2. ábra):

(2) $df = f'(x)\,dx$



3.2. ábra

3. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEI

Rolle-féle középértéktétel

Rolle-féle középértéktétel [1]: Ha az *f* függvény

1. az [*a*, *b*] intervallumon folytonos,
2. (a,b) intervallumon differenciálható és
3. $f(a) = f(b)$,

akkor az (a,b) intervallumon van legalább egy olyan ξ hely, ahol $f'(\xi) = 0$.

Lagrange-féle középértéktétel

[2]

Lagrange-féle középértéktétel : Ha az *f* függvény

1. $[a,b]$ intervallumon folytonos,
2. (a,b) intervallumon differenciálható,

akkor az (a,b) intervallumon van legalább egy olyan ξ hely, hogy

(3) $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Cauchy-féle középértéktétel

Cauchy-féle középértéktétel [3]: Ha az *f* és *g* függvény

1. $[a,b]$ intervallumon folytonos,
2. (a,b) intervallumon differenciálható,
3. 3.az (a,b) intervallumon $g'(x)\neq 0$,

akkor az (a,b) intervallumon van olyan ξ hely, hogy

(4) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

4. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ◯ nem láthatók

1. Az (1) formula alapján határozzuk meg az $f(x)=x^2$ és a $g(x)=\frac{1}{x}$ függvény deriváltját.

Megoldás

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x;$$

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}.$$

2. Határozzuk meg az $f(x)=x$ függvény deriváltját, majd ezt felhasználva, teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}$ ($n \geq 1$ természetes szám).

Megoldás. $x' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = 1$. Az $\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}$ igazolása:

1. $n = 1$ -re $\left(x^1\right)' = x' = 1\cdot x^0 = 1$, igaz;

2. Feltételezzük, hogy $n = k$ -ra igaz, vagyis $\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1}$;

3. Bizonyítjuk $n = (k+1)$ -re: $\left(x^{k+1}\right)' = \left(x^k \cdot x\right)' =$

$= kx^{k-1}\cdot x + x^k \cdot 1 = k\,x^k + 1\cdot x^k = (k+1)\,x^k$.

Az állítás tehát öröklődik k -ról $(k+1)$ -re, így az minden $n \geq 1$ természetes számra igaz (közben felhasználtuk a szorzat deriválási szabályát).

3. Az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény az $x = 0$ helyen nem differenciálható, mert itt nem folytonos.

4. Ismerve $\sin x$, $\cos x$, sh*x* és ch*x* deriváltját, határozzuk meg th*x* és $\operatorname{ctg} x$ deriváltját.

Megoldás. A tört deriválási szabályát alkalmazzuk.

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

5. Ismerve tg*x* deriváltját, határozzuk meg arctg*x* deriváltját.

Megoldás. Az arctg*x* függvény tg*x* inverze. A 6. deriválási szabályt alkalmazzuk:

$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y$. Ekkor $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

6. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

$$\left(\sqrt{x}\right);\quad x\sqrt[3]{x};\quad \sqrt[4]{x^7};\quad \frac{1}{x};\quad \frac{1}{x^6};\quad \frac{3}{\sqrt[5]{x}};\quad \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^8}}.$$

Megoldások

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

;

$$\left(x\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\frac{1}{x^6}\right)' = \left(x^{-6}\right)' = -6 \cdot x^{-7} = \frac{-6}{x^7};$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt[5]{x}}\right)' = \left(\frac{3}{x^{\frac{1}{5}}}\right)' = \left(3 \cdot x^{-\frac{1}{5}}\right)' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)x^{-\frac{6}{5}} = -\frac{3}{5}x^{-\frac{6}{5}};$$

$$\left(\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^8}}\right)' = \left(\frac{x^3}{x^{\frac{8}{3}}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

7. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

$$f(x) = 5x^8 - 3x^5 + 2x - 1; \quad g(x) = 5x^2 \sin x; \quad h(x) = \frac{x^3 \cos x - 4}{x + \sin x}.$$

Megoldások

$$f'(x) = 5 \cdot 8x^7 - 3 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 1 - 0 = 40x^7 - 15x^4 + 2;$$

$$g'(x) = 5 \cdot (2x \sin x + x^2 \cos x) = 10x \sin x + 5x^2 \cos x;$$

$$h'(x) = \frac{(3x^2 \cos x - x^3 \sin x)(x + \sin x) - (x^3 \cos x - 4)(1 + \cos x)}{(x + \sin x)^2}.$$

8. Határozzuk meg az alábbi összetett függvények deriváltját:

$$3\sin 8x; \quad \cos(3x^5 - 2x + 1); \quad e^{3x}; \quad \mathrm{tg}\, 8x; \quad \ln 4x.$$

Megoldások. Alkalmazzuk a láncszabályt.

$$(3\sin 8x)' = 3\cos 8x \cdot 8 = 24\cos 8x;$$

$\cos(3x^5 - 2x + 1) = \cos g$, ahol $g = 3x^5 - 2x + 1$. Tekintettel arra, hogy $(\cos g)' = -\sin g$, $g' = 3 \cdot 5x^4 - 2 = 15x^4 - 2$, ezért

$$\left[\cos(3x^5 - 2x + 1)\right]' = -\sin(3x^5 - 2x + 1) \cdot (15x^4 - 2);$$

$$(e^{3x})' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}; \qquad (\mathrm{tg}\, 8x)' = \frac{1}{\cos^2 8x} \cdot 8 = \frac{8}{\cos^2 8x};$$

$$(\ln 4x)' = \frac{1}{4x} \cdot 4 = \frac{1}{x}.$$

9. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

b) $f(x) = \sin^3 5x$;

c) $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$.

Megoldások

a) $y = \ln g$, $\quad g = \sqrt{u}$, $\quad u = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$. Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg}\cdot\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{g}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cdot\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\cos x};$$

b) $f(x) = \sin^3 5x = (\sin 5x)^3 = g^3$, $\dfrac{df}{dg} = 3g^2$. Itt a külső függvény g^3, vagyis a 3 kitevőjű hatványfüggvény. A belső függvény $\sin 5x$. Tehát

$$f'(x) = 3(\sin 5x)^2\cdot\cos 5x\cdot 5 = 15\sin^2 5x\cdot\cos 5x.$$

c) A külső függvény $\sqrt{g}$, a belső függvény $1-\cos^2 x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot(0-2\cos x(-\sin x)) = \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x\cos x}{\sin x} = \cos x$$

$(0 < x < \pi)$. Ennek így is kell lennie, hiszen $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$, és ennek deriváltja cos*x*.

10. Határozzuk meg az $f(x) = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ harmadik deriváltját.

Megoldás. $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin x}$,

$$f''(x) = \frac{0-1\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x},$$

$$f'''(x) = \frac{\sin x\cdot\sin^2 x+\cos x\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^4 x} = \frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}.$$

11. Írjuk fel az alábbi függvények hatodik deriváltját:

a) $f(x) = x^4$;

b) $g(x) = x^6$;

c) $h(x) = x^8$;

d) $u(x) = \sin x$.

Megoldások

a) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(5)}(x) = 0$, $f^{(6)}(x) = 0$;

b) $g'(x) = 6x^5$, $g''(x) = 6\cdot 5x^4, \ldots,$ $g^{(5)}(x) = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x$,

$g^{(6)}(x) = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6!$;

c) $h'(x) = 8x^7$, $h''(x) = 8\cdot 7x^6, \ldots,$ $h^{(6)}(x) = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2$.

d) $u'(x) = \cos x$, $u''(x) = -\sin x$, $u'''(x) = -\cos x$, $u^{(4)}(x) = \sin x$, $u^{(5)} = \cos x$, $u^{(6)}(x) = -\sin x$.

12. Határozzuk meg az alábbi függvények *n*-edik deriváltját $(n \geq 1$, egész):

a) $f(x) = \frac{1}{x}$;

b) $g(x) = \sin x$;

c) $h(x) = e^{\sqrt{2}\,x}$.

Megoldások

a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f'(x) = -1\cdot x^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$,

$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$. Innen már lehet következtetni, hogy $f^{(n)}(x) = n!\,x^{-(n+1)}$, ha *n* páros és $f^{(n)}(x) = -n!\,x^{-(n+1)}$, ha *n* páratlan. Ez felírható így is:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,x^{-(n+1)}.$$

b) $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, $g''(x) = -\sin x$, $g'''(x) = -\cos x$, $g^{(4)}(x) = \sin x = g(x)$. Innen látható, hogy

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, \text{ha } n = 4k \\ \cos x, \text{ha } n = 4k+1 \\ -\sin x, \text{ ha } n = 4k+2 \\ -\cos x, \text{ha } n = 4k+3, k \geq 0, \text{ egész.} \end{cases}$$

c) $h(x) = e^{\sqrt{2}\,x}$, $h'(x) = e^{\sqrt{2}\,x}\cdot\sqrt{2}$, $h''(x) = e^{\sqrt{2}\,x}\cdot\sqrt{2}^2$,

.

$$h'''(x) = e^{\sqrt{2}\,x} \cdot \sqrt{2}^3, \ldots, \quad h^{(n)}(x) = e^{\sqrt{2}\,x} \cdot \sqrt{2}^n$$

13. Deriváljuk az alábbi függvényeket:

a) $f(x) = x^{\sin x}$;

b) $g(x) = (\operatorname{ch} x)^{x^2}$.

Megoldások. Képezzük előbb mindkét oldal logaritmusát, majd deriváljunk mindkét oldalon.

a) $\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x}$. Innen

$$f'(x) = f(x)\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right);$$

b) $\ln g(x) = x^2 \ln \operatorname{ch} x \Rightarrow \dfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = 2x \cdot \ln \operatorname{ch} x + x^2 \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \cdot \operatorname{sh} x$. Innen

$$g'(x) = (\operatorname{ch} x)^{x^2}(2x \cdot \ln \operatorname{ch} x + x^2 \cdot \operatorname{th} x).$$

14. Állítsuk elő az y' deriváltat az alábbi implicit függvények esetén:

a) $y^3 + 3y = x$;

b) $y - 0{,}5 \sin y - x = 0$;

c) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

Megoldások. Mindhárom esetben *y* úgy tekintendő, mint *x* -nek a függvénye, azaz $y = y(x)$. Deriváljuk az egyenletek mindkét oldalát, majd fejezzük ki innen y' -t.

a) $3y^2 \cdot y' + 3y' = 1 \Rightarrow y'(3y^2 + 3) = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3(y^2+1)}$;

b) $y' - 0{,}5\cos y \cdot y' - 1 = 0 \Rightarrow y'(1 - 0{,}5\cos y) = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - 0{,}5\cos y}$;

c) $2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 2 \Rightarrow y' = \dfrac{1 - x - y}{x - y}$.

15. Határozzuk meg az alábbi paraméteresen adott függvények esetében az y' és y'' deriváltat:

a) $x = -1 + 2t - t^2 \qquad y = 2 - 3t + t^2$

b) $x = a \cos t \quad y = b \sin t$

Megoldások. A 7. deriválási szabály szerint $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, és ebből következően $y'' = \dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$.

a) , , , . Tehát

$\dot{x} = 2 - 2t \quad \ddot{x} = -2 \quad \dot{y} = -3 + 2t \quad \ddot{y} = 2$

$$y' = \frac{-3+2t}{2-2t}, \quad y'' = \frac{2(2-2t)+2(-3+2t)}{(2-2t)^3} = \frac{-2}{8(1-t)^3} = \frac{-1}{4(1-t)^3};$$

b) $\dot{x} = -a\sin t$, $\ddot{x} = -a\cos t$, $\dot{y} = b\cos t$, $\ddot{y} = -b\sin t$. Tehát

$$y' = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t, \quad y'' = \frac{-b\sin t(-a\sin t) - (-a\cos t)b\cos t}{(-a\sin t)^3} =$$

$$= \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t} = \frac{b(\sin^2 t + \cos^2 t)}{-a^2\sin^3 t} = \frac{-b}{a^2\sin^3 t}.$$

16. Állítsuk elő az y' deriváltat az alábbi, poláris koordinátákkal adott görbék esetén:

a) $r = a\varphi$;

b) $r = a(1+\cos\varphi)$.

Megoldások. Írjuk fel a görbék paraméteres egyenletrendszerét, ha φ a paraméter, miközben $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

a) $\left.\begin{array}{l} x = a\varphi\cos\varphi \\ y = a\varphi\sin\varphi \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \dot{x} = a(1\cdot\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) \\ \dot{y} = a(1\cdot\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) \end{array}$ $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}$;

b) $\left.\begin{array}{l} x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi \\ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \end{array}\right\}$

$$\dot{x} = a(-\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi(1+\cos\varphi)) = a(-\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$\dot{y} = a(-\sin\varphi\sin\varphi + \cos\varphi(1+\cos\varphi)) = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{-\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{-\sin\varphi - \sin 2\varphi}.$$

17. Deriváljuk az alábbi függvényeket:

a) $s(t) = \frac{1}{2}g\,t^2 - k\,t$, *g* és *k* állandó;

b) $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, *A*, ω, φ állandók;

c) $u(v) = \frac{1}{2c}\sin^2 cv - \frac{1}{2c}\cos^2 cv$, *c* állandó.

Megoldások

a) $\dot{s}(t) = \frac{1}{2}g\cdot 2t - k = gt - k$;

b) $\dot{x}(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$;

c) $u'(v) = \frac{1}{2c}\cdot 2\sin cv\cdot\cos cv\cdot c - \frac{1}{2c}\cdot 2\cos cv\cdot(-\sin cv)\cdot c =$

$$= \sin cv\cos cv + \sin cv\cos cv = 2\sin cv\cos cv = \sin 2cv.$$

18. Számítsuk ki az alábbi függvények x_0 helyhez tartozó deriváltját. Mekkora itt az $y = f(x)$ görbe érintőjének a hajlásszöge:

a) $f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sin 2x$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \ln 5x$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = e^2 + \frac{xe^{2x} - \sin 5x}{(1-2x)^2}$, $x_0 = 0$;

Megoldások

a) $f'(x) = 0 + \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2 = \cos 2x$. Az iránytangens: $\operatorname{tg}\vartheta = f'(0) = \cos 0 = 1$,

ahonnan az érintő hajlásszöge: $\vartheta = 45^\circ$.

b) $f'(x) = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$, $\operatorname{tg}\vartheta = f'(2) = \frac{1}{2}$, $\vartheta = \operatorname{arctg} 0{,}5 \approx 26{,}565^\circ$;

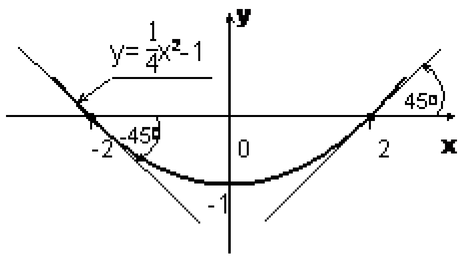
c) $f'(x) = 0 + \frac{(e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2 - 5\cos 5x)(1-2x)^2 - (xe^{2x} - \sin 5x) \cdot 2(1-2x)(-2)}{(1-2x)^4}$,

$$\operatorname{tg}\vartheta = f'(0) = \frac{(1+0-5)\cdot 1 - (0-0)\cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2)}{(1-0)^4} = -4 \Rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg}(-4) \approx -75{,}96^\circ.$$

19. Mekkora szögben metszi az $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ görbe az *x* tengelyt?

Megoldás. A görbe ott metszi az *x* tengelyt, ahol $y = 0$, azaz $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0$. Innen $x = \pm 2$. A görbe metszési szögén a metszésponthoz tartozó érintő hajlásszögét értjük. A derivált: $y' = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$. Az $x = 2$ helyen (a metszéspontban) az iránytangens: $\operatorname{tg}\vartheta = y'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Rightarrow \vartheta = 45^\circ$. Tehát az $x = 2$ helyen a görbe 45 fokos szögben metszi

az *x* tengelyt. Hasonlóan az $x = -2$ helyen $\operatorname{tg}\vartheta = y'(-2) = -1$, tehát $\vartheta = -45^\circ$. (3.3. ábra)



3.3. ábra

20. Melyik pontban lesz az $y = 4\ln x$ görbe érintője párhuzamos az $y = \frac{1}{2}x + 3$ egyenessel?

Megoldás. Az egyenes iránytangense $\frac{1}{2}$.

Az $y = 4\ln x$ görbe érintőjének iránytangense $y' = \frac{4}{x}$. A két iránytangensnek egyenlőnek kell lennie, azaz $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$. Innen $x = 8$. Ezen a helyen a görbe pontjának ordinátája $4\ln 8$. Tehát az $M(8; 4\ln 8)$ pontban lesz párhuzamos a görbe érintője az egyenessel.

21. Legyen $s(t) = 500t^2 + 200t$ egy pont mozgásegyenlete, ahol *t* jelenti az időt másodpercben, *s* pedig a megtett utat centiméterben. Melyik időpillanatban lesz a pont sebessége 4800 cm/sec?

Megoldás. A sebesség az első deriválttal egyenlő, azaz $v = \dot{s}(t)$. A feltétel szerint $4800 = 500 \cdot 2t + 200$, ahonnan $t = 4{,}6$ másodperc.

22. Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálját. Számítsuk is ki a differenciál értékét, ha $x = x_0$ és $dx = 0{,}01$:

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1;\ g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ x_0 = 2;\ h(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1},\ x_0 = 0{,}5.$$

Megoldások. Használjuk a (2) formulát:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\quad df = -\frac{1}{x^2}dx = -1\cdot 0{,}01 = -0{,}01;$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2/4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4+x^2},\quad dg = \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{8}\cdot 0{,}01 = 0{,}00125;$$

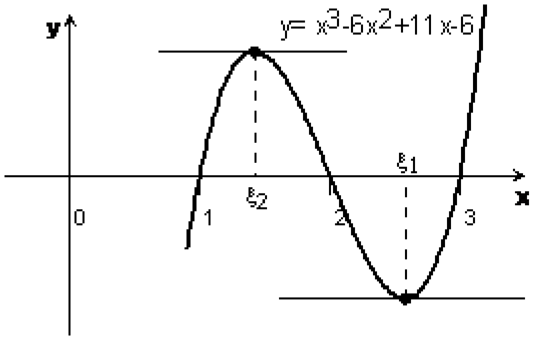
$$h'(x) = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1},\ dh = \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{-0{,}75}\cdot 0{,}01 = -0{,}01\dot{3}.$$

23. Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ függvényre a Rolle-tételt az $[1;\ 3]$ intervallum esetén. Számítsuk ki a tételben szereplő ξ értéket.

Megoldás. A tétel feltételei teljesülnek, ugyanis a függvény mindenütt differenciálható (így folytonos is), és $f(1) = f(3)\ (= 0)$. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, ezért a tétel alakja: $3\xi^2 - 12\xi + 11 = 0$. Innen

$$\xi = \frac{12 \pm \sqrt{144-132}}{6} = \frac{12\pm\sqrt{12}}{6} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \xi_1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3},\quad \xi_2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tehát két ξ érték létezik, és mindkét ξ érték az (1; 3) intervallumban van (3.4. ábra).



24. Írjuk fel a Lagrange-féle középértéktételt az alábbi függvényekre, majd számítsuk ki ξ értékét:

a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $[1;5]$;

b) $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, $[a,\ b]$.

Megoldások

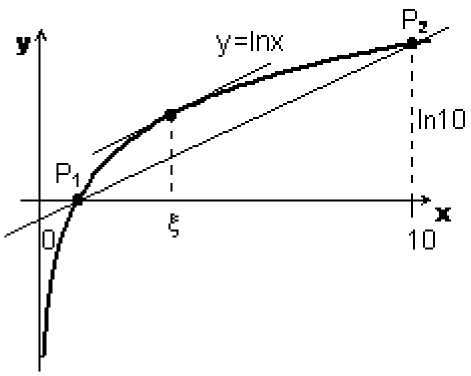
a) $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$, így a (3) alakja $\frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{1}}{5-1} = \frac{-4}{\xi^2} \Rightarrow \xi = \sqrt{5}$;

b) $g'(x) = 2Ax + B$, így a tétel alakja:

$$\frac{Ab^2 + Bb + C - (Aa^2 + Ba + C)}{b-a} = 2A\xi + B.$$

Átalakítás után $\frac{A(b^2 - a^2) + B(b-a)}{b-a} = 2A\xi + B \Rightarrow A(b+a) = 2A\xi \Rightarrow \xi = \frac{b+a}{2}$. Azt kaptuk tehát, hogy az $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola esetén ξ az intervallum közepén van.

25. Határozzuk meg az $y = \ln x$ görbén azt a pontot, amelyben a görbe érintője párhuzamos a P_1(1; 0), P_2(10; ln 10) pontokon átmenő szelővel. (3.5. ábra).



Megoldás. A Lagrange-féle középértéktételben szereplő ξ értékeket kell meghatározni. Jelen esetben $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, *a* = 1, *b* = 10. A tétel alakja:

$$\frac{\ln 10 - \ln 1}{10-1} = \frac{1}{\xi} \Rightarrow \xi = \frac{9}{\ln 10} \approx 3{,}90865.$$

Tehát a kérdéses pont az $A(\xi, \ln \xi)$ pont, ahol $\xi = 9 / \ln 10$.

26. Írjuk fel a Cauchy-féle középértéktételt az $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ függvények esetére a $[0, x]$ intervallumon.

Megoldás. A (4) formulát kell felírni, ha $a = 0$, $b = x$. Mivel $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$, ezért a tétel alakja:

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\cos \xi}{1} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos \xi, \quad 0 < \xi < x.$$

Innen az is látszik, hogy ha $x \to 0$, akkor $\xi = 0$, és ezért

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\xi \to 0} \cos \xi = 1.$$

5. Feladatok

Határozza meg az alábbi függvények *deriváltját*, és próbálja azt a lehető legegyszerűbb alakra hozni:

1. $f(x) = 4x^7 - 2\sqrt{x} + \sqrt{2}$;

2. $f(x) = 1 + x - \frac{1}{x}$;

3. $f(x) = \frac{12}{x^5} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$;

4. $f(x) = 10x^{0,1} - \frac{1}{x^{-1}}$;

5. $f(x) = 3\sqrt[3]{x\sqrt{x}} + e^2$;

6. $f(x) = x^2 \sin x$;

7. $f(x) = 2x^5 \ln x$;

8. $f(x) = 3e^x \cos x$;

9. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$;

10. $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$;

11. $f(x) = 2\sin(x^2 - 5x + 3)$;

12. $f(x) = \ln 4x + \ln 6x$;

13. $f(x) = 4\sin^6 x$;

14. $f(x) = \ln \sin x$;

15. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$;

16. $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

17. $f(x) = a\sin(ax+1)$;

18. $f(a) = a\sin(ax+1)$;

19. $g(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$;

20. $g(u) = \operatorname{ch} 2u$;

21. $h(v) = \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v$;

22. $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

23. $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{a}$;

24. $f(x) = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$;

25. $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$;

26. $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

27. $f(x) = 2^x + 5^x$;

28. $f(x) = \log_a \sin x$;

29. $f(x) = x^2 e^{3x} \sin 4x$;

30. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$;

31. $f(x) = \dfrac{x^2\cos 3x - \sin 2x}{(1-6x)^2}$;

32. $f(x) = \dfrac{x\sin^2 x - \cos 2x}{1+\sin^2 x}$;

33. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

34. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

35. $f(x) = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x^2+1}$;

36. $f(x)=\frac{-\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

37. $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^3 x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x$.

Határozza meg az alábbi függvények *n-edik deriváltját*:

---

38. $f(x)=\sin x,\ \ n=142$;

39. $f(x)=\frac{1}{64}e^{\sqrt{2}x},\ \ n=14$;

40. $f(x)=x^{50},\ \ n=50$;

41. $f(x)=\ln x,\ \ n=k$;

42. $x(t)=A\sin\omega t,\ \ n=4$;

43. $g(t)=t^3\ln t,\ \ n=4$.

Határozza meg az y' és y'' *deriváltakat* az alábbi, paraméteresen adott függvények esetén:

---

44. $x=a\cos t,$
$y=a\sin t$;

45. $x=t^2-t+1,$
$y=t^2+2t+2$;

46. $x=\sin^2 t,$
$y=\cos^2 t$;

47. $x=a(\cos t+t\sin t),$
$y=a(\sin t-t\cos t)$.

Számítsa ki az alábbi függvények *differenciálhányadosát*:

---

48. $r=1+\varphi$;

49. $r=e^{a\varphi}$;

50. $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Határozza meg az y' *deriváltat* az alábbi, implicit módon adott függvények esetén:

---

51. $x^2+y^2=a^2$;

52. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$;

53. $x^4+y^4=4xy$;

54. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Számítsa ki az alábbi függvények adott $x=x_0$ helyhez tartozó *differenciálhányadosát*:

---

55. $f(x)=\ln(8-x^2)$, $x_0=0$;

56. $f(x)=4\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

57. $g(x)=\operatorname{arctg} x$, $x_0=1$;

58. $h(t)=2e^{-t}$, $t_0=0$.

Állítsa elő az alább megadott függvények *differenciálját*, majd számítsa ki a *differenciál értékét* az adott *x* és *dx* esetén:

---

59. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x=3$, $dx=0{,}01$;

60. $g(t)=2\cos t$, $t=\pi/2$, $dt=0{,}1$;

61. $h(x)=\operatorname{arctg} x$, $x=1$, $dx=0{,}05$;

62. $u(x)=e^{0{,}1x}$, $x=0$, $dx=0{,}2$.

Számítsa ki a *Lagrange-féle* középértéktételben szereplő ξ értékét az alábbi függvények és adott *intervallum* esetén:

---

63. $f(x)=\ln x$, $\left[1;\ e^2\right]$;

64. $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $[0{,}5;\ 2]$.

65. Igazolja, hogy ha $f(x)=2x^2+6x-11$, akkor tetszőleges $[a,b]$ intervallum esetén a Lagrange-féle középértéktételben szereplő ξ értéke $\frac{1}{2}(a+b)$.

66. Számítsa ki a *Lagrange-féle* középértéktételben szereplő ξ értékét mind az $f(x)=x^2+1$, mind a $g(x)=x^3+2$ függvény esetében, a $[0;1]$ intervallumot tekintve. Ezután számítsa ki a *Cauchy-féle* középértéktételben szereplő ξ értékét is.

67. A *Lagrange-féle* középértéktétel $f(x+h)-f(x)=h\cdot f'(x+\vartheta h)$ alakban is felírható, ahol $0<\vartheta<1$. Írja fel a tételnek ezt az alakját az $f(x)=x^3$ függvény esetére, majd számítsa ki ϑ határértékét, ha $h\to 0$.

68. Az *x* = *a* és *x* = *b* hely legyen a kétszer differenciálható *f* függvénynek kétszeres zérushelye, azaz legyen $f(a)=f'(a)=0$ és $f(b)=f'(b)=0$. Igazolja, hogy ekkor az f'' függvénynek az $[a,b]$ intervallumban van legalább két zérushelye.

69. A *Lagrange-féle* középértéktételt felhasználva igazolja, hogy

$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, ha $x>0$.

70. A *Rolle-féle* középértéktételt felhasználva igazolja, hogy az $f'(x)=0$ egyenlet gyökei valósak, ha $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

Állapítsa meg azokat az intervallumokat, ahová a gyökök esnek.

---

71. Számítsa ki $f'(0)$ értékét, ha $f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$.

72. Igazolja, hogy az

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \text{ és } g(x)=\operatorname{arctg} x$$

deriváltja megegyezik (ha $x \neq 1$).

---

[1] Ejtsd: [roll]. *Michel Rolle* (1652–1719) francia matematikus nyomán.

[2] Ejtsd: [lágranzs]. *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813) olasz születésű francia matematikus nyomán.

[3] Ejtsd: [kosi]. *Augustin-Louis Cauchy* (1789–1857) francia matematikus nyomán.
