KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

16

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

1. ÉRINTŐ ÉS NORMÁLIS EGYENES, L'HOSPITAL-SZABÁLY

Az $y=f(x)$ görbe x_0 *abszcisszájú* pontjához tartozó *érintőjének* egyenlete

(1) $$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

normálisának egyenlete pedig

(2) $$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

L'Hospital-szabály

A **L'Hospital-szabály** **[1]**: Ha *f* és *g* az $x=a$ hely környezetében differenciálható, és $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, akkor

(3) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ez a $\frac{0}{0}$ tipusú határérték. A (3) tétel akkor is érvényes, ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$.

Ekkor $\frac{\infty}{\infty}$ tipusú határértékről beszélünk.

A *L'Hospital-szabállyal* (esetleg) kiszámíthatók 0. ∞, ∞ - ∞, $0^0, \infty^0$ és 1^∞ tipusú határértékek is, ha azokat előzetesen sikerül $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ tipusúra visszavezetni.

Görbék érintkezése

Ha az $y=f(x)$ és $y=g(x)$ görbék esetén

$$f(x_0)=g(x_0),$$

$$f'(x_0)=g'(x_0),$$

$$f''(x_0)=g''(x_0),$$

$$f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0),$$ de

$$f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0),$$

akkor azt mondjuk, hogy az $y=f(x)$ és $y=g(x)$ görbék az x_0 helyen *n*-edrendben érintik egymást.

Azt a kört, amely az $y=f(x)$ görbét az x_0 helyen legalább másodrendben érinti, a görbe x_0 pontbeli **simulókörének** nevezzük.

Középpontjának koordinátái

(4)
$$u = x_0 - \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)} f'(x_0), \qquad v = f(x_0) + \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)},$$

sugara pedig

(5)
$$r = \frac{\left[1+(f'(x_0))^2\right]^{3/2}}{\left|f''(x_0)\right|}.$$

A simulókört **görbületi körnek** is nevezik, az $\frac{1}{r}$ mennyiséget pedig **görbületnek** (vagy a *görbület abszolútértékének*).

Taylor-polinom

Legyen *f* az $x = a$ helyen legalább *n* -szer differenciálható függvény. Ekkor a

(6)
$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^2$$

polinomot az *f* függvény $x = a$ helyhez tartozó **Taylor-polinomjának** [2] nevezzük.

Ha $x = a$, akkor a Taylor-polinomot **Maclaurin-polinomnak** [3] mondjuk. Ennek alakja

(7)
$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

A Taylor-polinom az $x = a$ hely kis környezetében jól közelíti $f(x)$ -et. Az

(8)
$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

különbség neve **maradéktag**.

2. Függvény vizsgálata

Függvény vizsgálata növekedésre, csökkenésre

Ha $f'(x_0) > 0$, akkor *f* az x_0 helyen *növekedő*. Ha $f'(x_0) < 0$, akkor *f* az x_0 helyen helyen *csökkenő*.

Ha az *I* intervallumon $f'(x) > 0$, akkor *f* ezen az intervallumon szigorúan növekedő. Ha $f'(x) < 0$, akkor *f* ezen az intervallumon szigorúan csökkenő. Az intervallumon növekedő, vagy csökkenő függvényt szokás *monoton növekedőnek*, vagy *monoton csökkenőnek* is mondani.

Függvény vizsgálata szélsőértékre

Csak elég sokszor differenciálható függvények szélsőértékével foglalkozunk.

Az *f* függvénynek szélsőértéke ott lehet, ahol $f'(x) = 0$. Az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökeit **stacionárius helyeknek** nevezzük. Szélsőérték tehát stacionárius helyen lehet.

f

Ha $f'(x_1)=0$ és f' az x_1 helyen előjelet vált, akkor az függvénynek az x_1 helyen szélsőértéke van. Ha x_1 előtt $f'(x)$ pozitív, utána negatív, akkor *maximum* van. Fordított esetben *minimum* (szükséges és elegendő feltétel).

Egy egyszerűbben használható elegendő feltétel: Ha $f'(x_1)=0$ és $f''(x_1)<0$. akkor az *f* függvénynek az x_1 helyen maximuma van, míg $f''(x_1)>0$ esetben minimuma.

Ha $f''(x_1)=0$, akkor a magasabbrendű deriváltak *előjelét* is vizsgálni kell. Igazolható, hogy ha

$f'(x_1)=0$, $f''(x_1)=0$, $f'''(x_1)=0,\ldots,$ $f^{(n-1)}(x_1)=0$, de $f^{(n)}(x_1)\neq 0$,

és *n* páros szám, akkor a fügvénynek az x_1 helyen szélsőértéke van, mégpedig $f^{(n)}(x_1)<0$ esetben maximuma, $f^{(n)}(x_1)>0$ esetben minimuma. Ha *n* páratlan, akkor az x_1 helyen **inflexió** van.

A szélsőértékvizsgálat lépései tehát a következők:

1. az $f'(x)=0$ egyenletet;
2. stacionárius helyen megvizsgáljuk, hogy $f'(x)$ előjelet vált-e, és ebből következtetünk a szélsőérték létezésére és milyenségére. Az előjelváltás helyett vizsgálható a második (esetleg magasabbrendű) derivált előjele.
3. Kiszámítjuk a szélsőértékeket.

Vizsgálat inflexióra, konvexitásra, konkávitásra

Az $y=f(x)$ görbének *inflexiós pontja* ott lehet, ahol $f''(x)=0$. Ha itt $f'''(x)\neq 0$, akkor itt van inflexió. Ha az *I* intervallumon $f''(x)>0$, akkor itt a görbe (alulról) *konvex*, ha $f''(x)<0$, akkor (alulról) *konkáv*.

Az inflexiós pont a *konvex* és a *konkáv* íveket elválasztja egymástól.

3. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ○ nem láthatók

Írjuk fel az alábbi görbék adott helyhez tartozó érintőjének (*é*) és normálisának (*n*) egyenletét:

1. $y=\frac{1}{4}x^2$, $x_0=3$.

Megoldás. Használjuk az (1) és (2) formulákat.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2,\quad f'(x)=\frac{1}{2}x,$$

$$f(3)=\frac{1}{4}\cdot 9=\frac{9}{4},\quad f'(3)=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}.$$

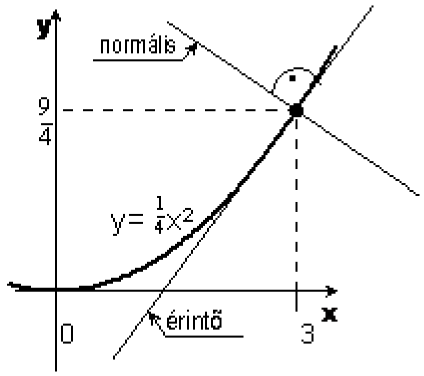
$$y-\frac{9}{4}=\frac{3}{2}(x-3)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{4};$$

Az érintő egyenlete:

$$y-\frac{9}{4}=\frac{3}{2}(x-3)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{4};$$

A normális egyenlete:

$$y-\frac{9}{4}=-\frac{2}{3}(x-3)\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{17}{4}$$



3.6. ábra.

2. $y = \ln x$, $x_0 = e$.

Megoldás.

$f(x) = \ln x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$,

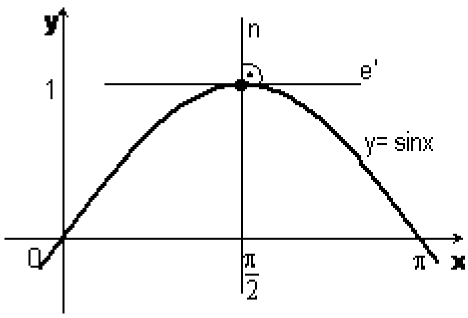
$f(e) = \ln e = 1$, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$.

é: $y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \dfrac{1}{e}x$;

$n: y - 1 = -e(x - e) \Rightarrow y = -ex + e^2 + 1$.

3. $y = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Megoldás. Az $f(x) = \sin x$ függvénynek az $x = \dfrac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, melynek értéke 1. Itt az $y = \sin x$ görbe érintője párhuzamos az *x* tengellyel, normálisa pedig párhuzamos az *y* tengellyel (3.7. ábra). Így é: $y = 1$ n: $x = \dfrac{\pi}{2}$.



3.7. ábra

4. $y = x^3$, $x_0 = 0$.

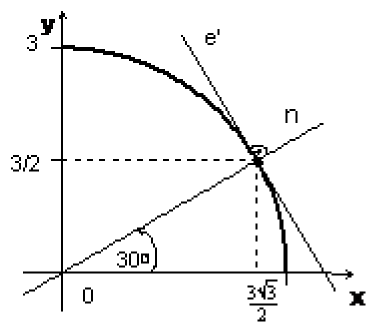
Megoldás. A 2.26. ábrán látható, hogy az $y = x^3$ görbe $x = 0$ helyhez tartozó érintője az *x* tengely, normálisa az *y* tengely. Így é: $y = 0$; n: $x = 0$.

5. $\left.\begin{array}{l} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{array}\right\} y_0 = \frac{3}{2}$.

Megoldás. Ha $y = y_0 = \frac{3}{2}$, akkor a $3\sin t = \frac{3}{2}$ egyenletből $t = 30^\circ = t_0$. Így $x_0 = 3\cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{3\cos t}{-3\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t$, az érintő iránytangense

$m = -\mathrm{ctg}\,30^\circ = -\sqrt{3}$, így annak egyenlete: $y - \frac{3}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, azaz $y = -\sqrt{3}x + 6$.

A normális egyenlete: $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, azaz $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. (3.8. ábra).



3.8. ábra

6. $\left.\begin{array}{l} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{array}\right\} t_0 = \frac{\pi}{6}$.

Megoldás.

$x_0 = 4\left(\frac{\pi}{6} - \sin 30^\circ\right) = \frac{2\pi}{3} - 2$, $\quad y_0 = 4\left(1 - \cos 30^\circ\right) = 4 - 2\sqrt{3}$,

$\dot x = 4(1 - \cos t)$, $\dot y = 4\sin t$, $y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, $m = \frac{1/2}{1 - \sqrt{3}/2} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

Az érintő egyenlete: $y - 4 + 2\sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\left(x - \frac{2\pi}{3} + 2\right)$;

A normális egyenlete: $y - 4 + 2\sqrt{3} = \left(-2 + \sqrt{3}\right)\left(x - \frac{2\pi}{3} + 2\right)$.

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-0{,}5x^2-\cos x}{x^3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2-5x+x^2}{1+x-4x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to \infty} xe^{-x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Megoldások. Alkalmazzuk a *L'Hospital szabályt*:

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\cdot\cos 7x}{2}=\dfrac{7\cdot 1}{2}=3{,}5$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-0{,}5x^2-\cos x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x+\sin x}{3x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1+\cos x}{6x}=$

$=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6}=\dfrac{0}{6}=0$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{2x-2}=\dfrac{5}{2}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2-5x+x^2}{1+x-4x^2}=\left(\dfrac{\infty}{-\infty}\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-5+2x}{1-8x}=\left(\dfrac{\infty}{-\infty}\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2}{-8}=-\dfrac{1}{4}$.

11. $\lim\limits_{x\to \infty} x\,e^{-x}=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+\frac{x}{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}=\left(\infty^0\right)=A$. Képezzük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln(\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x\right) = (0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{ctg} x\cdot \cos x} =$$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0$, tehát $\ln A = 0 \Rightarrow A = 1$.

14. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left(1^{\infty}\right) = A \Rightarrow \ln A = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\ln x =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1 \Rightarrow A = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

15. Hányadrendben érintkezik egymással az $x = 0$ helyen az $y = \sin x$ és $y = x - \frac{x^3}{6}$ görbe?

Megoldás. Legyen $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Ekkor $f(0) = g(0) = 0$.

$f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $f'(0) = 1 = g'(0)$,

$f''(x) = -\sin x$, $g''(x) = -x$, $f''(0) = 0 = g''(0)$,

$f'''(x) = -\cos x$, $g'''(x) = -1$, $f'''(0) = -1 = g'''(0)$,

$f^{(4)}(x) = \sin x$, $g^{(4)}(x) = 0$, $f^{(4)}(0) = 0 = g^{(4)}(0)$,

$f^{(5)}(x) = \cos x$, $g^{(5)}(x) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1 \neq g^{(4)}(0) = 0$.

Tehát a két görbe negyedrendben érinti egymást.

Írjuk fel az alábbi görbék megadott helyhez tartozó simulókörének egyenletét:

16. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

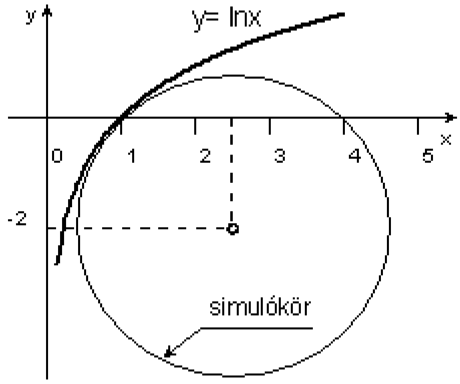
Megoldás. Használjuk a (4) és (5) képleteket:

16. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f(1) = \ln 1 = 0$, $f'(1) = 1$,

$f''(1) = -1$. A középpont koordinátái:

$$u = 1 - \frac{1+1^2}{-1}\cdot 1 = 1 + 2 = 3,\quad v = 0 + \frac{1+1^2}{-1} = -2.$$

A kör sugara: $r = \frac{2^{3/2}}{1} = \sqrt{8}$. A simulókör egyenlete: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$ (3.9. ábra).



3.9. ábra

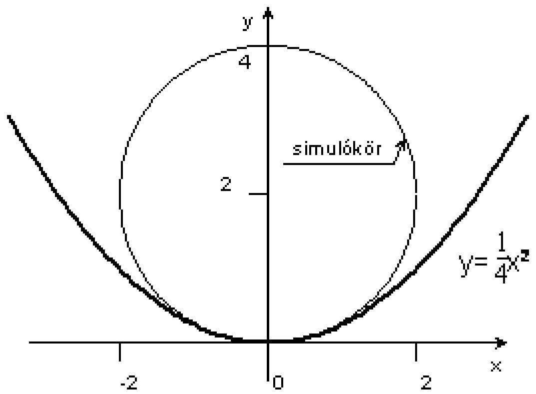
17. $y = \frac{1}{4}x^2$, $x_0 = 0$.

Megoldás. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $f'(x) = \frac{1}{2}x$, $f''(x) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = \frac{1}{2}$.

A kör középpontjának koordinátái és sugara:

$$u = 0 - \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot 0 = 0, \quad v = 0 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

A kör egyenlete: $x^2 + (y-2)^2 = 4$ (3.10. ábra).



3.10. ábra

Írjuk fel az alábbi függvények $x = a$ helyhez tartozó *n* -edfokú *Taylor-polinomját*:

18. $f(x) = \sqrt{2-x}$, $a = 1$, $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$.

Megoldás. Használjuk a (6) és a (7) formulákat.

$$f(x) = \sqrt{2-x} = (2-x)^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(-1),$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(2-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1)^2, \quad f'''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(2-x)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-1)^3,$$

$f(1)=\sqrt{2-1}=1$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$, $f''(1)=-\frac{1}{4}$, $f'''(1)=-\frac{3}{8}$.

A Taylor-polinomok:

$$T_1(x)=1-\frac{1}{2}(x-2)=2-\frac{1}{2}x;$$

$$T_2(x)=1-\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{4\cdot 2!}(x-2)^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{8}x^2;$$

$$T_3(x)=1-\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{4\cdot 2!}(x-2)^2-\frac{3}{8\cdot 3!}(x-2)^3=2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{16}x^2.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy a $T_1(x)=2-\frac{1}{2}x$ elsőfokú Taylor-polinom grafikonja nem más, mint az $y=\sqrt{2-x}$ görbe $x_0=1$ helyhez tartozó érintője, melynek egyenlete $y=2-\frac{1}{2}x$.

19. $f(x)=x^4-2x^3+x-4$, $a=2$, $n=4$.

Megoldás.

$f'(x)=4x^3-6x^2+1$, $f''(x)=12x^2-12x$, $f'''(x)=24x-12$, $f^{(4)}(x)=24$, $f(2)=-2$, $f'(2)=9$, $f''(2)=24$, $f'''(2)=36$, $f^{(4)}(2)=24$. A Taylor-polinom:

$$T_4(x)=-2+\frac{9}{1!}(x-2)+\frac{24}{2!}(x-2)^2+\frac{36}{3!}(x-2)^3+\frac{24}{4!}(x-2)^4=$$

$$=-2+9(x-2)+12(x-2)^2+6(x-2)^3+(x-2)^4.$$

20. $f(x)=\cos x$, $a=0$, $n=6$.

Megoldás.

$f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x$, $f^{(5)}(x)=-\sin x$, $f^{(6)}(x)=-\cos x$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=1$, $f^{(5)}(0)=0$, $f^{(6)}(0)=-1$.

A *Maclaurin-polinom*: $M_6(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6$.

21. $f(x)=\operatorname{tg} x$, $a=0$, $n=3$.

Megoldás.

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x)=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$,

$$f'''(x) = 2\cdot\frac{\cos x\cdot\cos^3 x - \sin x\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x},\quad f(0)=0,\quad f'(0)=1,$$

$f''(0)=0$, $f'''(0)=2$.

A Maclaurin-polinom:

$$M_3(x) = 0+\frac{x}{1!}+0+\frac{2}{3!}x^3 = x+\frac{x^3}{3}.$$

22. Igazoljuk, hogy az $f(x)=\ln x$ függvény *szigorúan növekvő*, görbéje pedig (alulról) *konkáv*.

Megoldás. A függvény $x>0$ esetén van értelmezve, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=\frac{-1}{x^2}$. Mivel $x>0$, ezért $f'(x)=\frac{1}{x}>0$, tehát a függvény növekvő, sőt szigorúan növekvő; $f''(x)=\frac{-1}{x^2}<0$, így az $y=\ln x$ görbe (alulról) konkáv.

23. Vizsgáljuk meg az $f(x)=x^3+3x^2-9x-11$ függvényt (szélsőérték, monotonitás, konvexitás, konkávitás, inflexió, ábra).

Megoldás. Képezzük a függvény első, második és harmadik deriváltját:

$f'(x)=3x^2+6x-9$, $f''(x)=6x+6$, $f'''(x)=6$.

Szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x)=0$, azaz $3x^2+6x-9=0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei: $x_1=1$, $x_2=-3$. Ezen a két helyen lehet szélsőérték. Hogy van-e, az kétféleképpen is eldönthető.

Először vizsgáljuk meg azt, hogy $f'(x)$ ezeken a helyeken előjelet vált-e. Mivel 1 és -3 az $f'(x)$ függvénynek egyszeres zérushelyei, ezért $f'(x)$ mindkét helyen előjelet vált, tehát mindkét helyen van szélsőérték: az $x_1=1$ előtt $f'(x)$ negatív, utána pozitív, ezért az $x_1=1$ helyen minimum van. Az $x_2=-3$ hely előtt $f'(x)$ pozitív, utána negatív, ezért ezen a helyen maximum van. A 3. 11. ábrán pontozott vonallal ábrázoltuk az $y=f'(x)$ görbét, ahol az előjelváltás könnyen megállapítható.

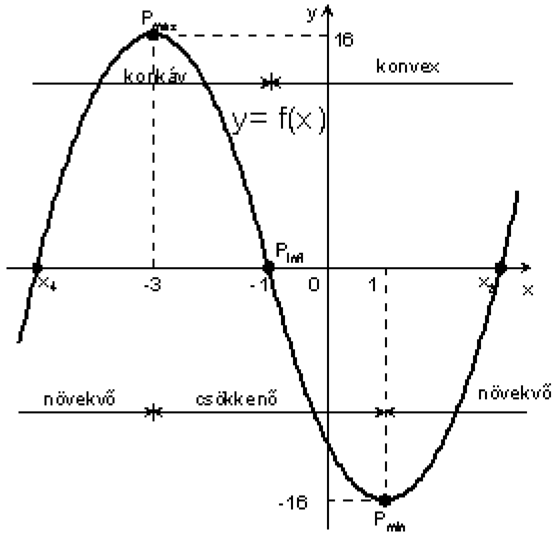
A szélsőérték létezésének eldöntéséhez most használjuk a második deriváltat (általában ez az egyszerűbb módszer!): $f''(1)=6\cdot 1+6=12>0$, ezért az $x_1=1$ helyen minimum van; $f''(-3)=6\cdot(-3)+6=-12<0$, ezért az $x_2=-3$ helyen maximum van.

A minimum és a maximum: $f_{\min}=f(1)=1+3-9-11=-16$;

$f_{\max}=f(-3)=-27+27+27-11=16$.

Inflexió ott lehet, ahol $f''(x)=0$, azaz $6x+6=0$. Innen $x=-1$. Ezen a helyen lehet inflexió. De van is, mert $f'''(-1)=6\neq 0$. Az inflexiós pont ordinátája: $f_{\inf}=f(-1)==-1+3+9-11=0$.

A szélsőértékvizsgálat "melléktermékeként" dönthetünk a monotonitásról is. Ugyanis a maximumhely előtt a (folytonos) függvény növekvő, utána csökkenő; a minimumhely előtt csökkenő, utána növekvő. Jelen esetben a függvény növekszik a $(-\infty;-3)$ és $(1;\infty)$ intervallumon, csökken a $(-3;1)$ intervallumon (3. 11. ábra).

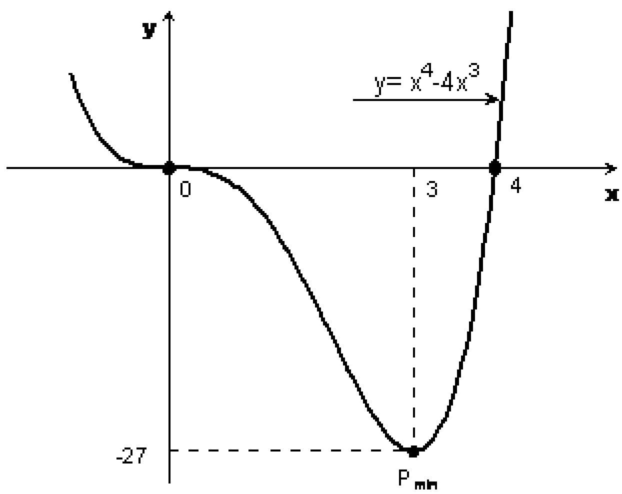


3.11. ábra

Az inflexiós hely $(x=-1)$ előtt $f''(x)$ negatív, utána pozitív. Ezért a függvény görbéje $x<-1$ esetén konkáv, $x>-1$ esetén konvex.

24. Vizsgáljuk meg szélsőértékre az $f(x)=x^4-4x^3$ függvényt.

Megoldás. $f'(x)=4x^3-12x^2$, $f''(x)=12x^2-24x$. Szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x)=4x^3-12x^2=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=3$. Ezeken a helyeken lehet szélsőérték. Hogy van-e, most csak a második (esetleg magasabbrendű) derivált segítségével döntjük el: $f''(3)=12\cdot 9-24\cdot 3=36>0$, tehát az $x=3$ helyen minimum van, $f_{\min}=f(3)=-27$; $f''(0)=0$. Ez nem dönt, ezért a harmadik deriváltat kell kiszámítani: $f'''(x)=24x-24$, $f'''(0)=-24\neq 0$. Mivel ennek az első zérustól különböző deriváltnak a rendje páratlan $(n=3)$, ezért az $x=0$ helyen nincs szélsőérték (inflexió van) (3.12. ábra).



3.12. ábra

25. Igazoljuk, hogy az $x^5+3x-8=0$ egyenletnek egyetlen valós gyöke van.

Megoldás. Legyen $f(x)=x^5+3x-8$. Mivel $f(0)=-8<0$ és $f(2)=30>0$, ezért a $(0;2)$ intervallumban az $f(x)$ polinomnak van zérushelye, vagyis az $x^5+3x-8=0$ egyenletnek gyöke. De mivel $f'(x)=5x^4+3>0$ minden *x* esetén, ezért a függvény szigorúan növekvő. Ennek következtében az $y=f(x)$ görbe csak egyetlen helyen metszi az *x* tengelyt, tehát az $f(x)=0$ egyenletnek egyetlen valós gyöke van.

26. Vizsgáljuk meg szélsőértékre és inflexióra az $f(x)=x^2\ln x$ függvényt és ábrázoljuk is azt.

Megoldás. $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$, $f''(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$, $f'''(x)=\frac{2}{x}$. Szélsőérték ott lehet, ahol

$$2x\ln x+x=0\Rightarrow x(2\ln x+1)=0\Rightarrow 2\ln x+1=0\Rightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}.$$

$f''\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=2>0$, tehát az $x=e^{-\frac{1}{2}}$ helyen minimum van, és $f_{\min}=f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2e}$. Az $x=0$ helyen nincs szélsőérték, mert a függvény itt nincs értelmezve.

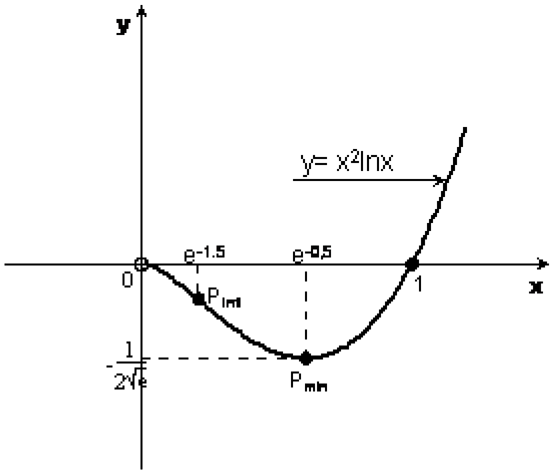
Inflexió ott lehet, ahol $2\ln x+3=0\Rightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$. Itt van is inflexió, mert $f'''\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=2e^{\frac{3}{2}}\neq 0$.

A függvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza, értékkészlete a $\left[-\frac{1}{2e},\infty\right)$ intervallum.

Zérushely: $x=1$.

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=(0\cdot(-\infty))=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2}=0.$$

Mindezek alapján a görbe ábrázolható (3.13. ábra).



3.13. ábra

4. FELADATOK

Írja fel az alábbi görbék $x = x_0$ helyhez tartozó *érintőjének* és *normálisának* egyenletét. Számítsa ki az érintőnek a *x* tengellyel közrezárt *szögét*:

---

1. $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, $x_0 = 4$;

2. $y = \frac{x}{1+x^2}$, $x_0 = 1$;

3. $y = 4\sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \pi/3$;

4. $y = e^x$, $x_0 = 1$;

5. $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x_0 = 2$;

6. $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

7. $\left.\begin{array}{l} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{array}\right\}$, $x_0 = 4\pi$;

8. $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{array}\right\}$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

9. $r = 1 + \cos\varphi$, $\varphi_0 = \pi/3$, $y_0 > 0$;

10. $r = \varphi$, $x_0 = 0$, $0 < y_0 < \pi$.

11. Igazolja, hogy az $xy = a^2$ hiperbolához húzott érintők a koordináta-tengelyekkel állandó területű háromszögeket alkotnak.

12. Igazolja, hogy az $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ asztroida érintőinek a koordináta-tengelyek közötti szakaszai állandó hosszúságúak.

13. Az $y = \log_a x$ görbe érinti az $y = x$ egyenest. Számítsa ki *a* értékét.

14. Milyen szögben metszi át az *x* tengelyt az *y* = sin *x* és az $y = x^3 - 1$ görbe?

15. Állapítsa meg, hogy milyen feltétel esetén érinti az *x* tengelyt az $y = x^3 + px + q$ görbe.

16. Számítsa ki, hogy milyen szögben metszi egymást az $y = 1 - x^2$ és $y = x^2 - 1$ görbe.

17. Igazolja, hogy az $y^2 = 4a(a - x)$, $a > 0$ görbesereg minden görbéje merőlegesen metszi az $y^2 = 4b(b + x)$, $b > 0$ görbesereg minden görbéjét.

Számítsa ki az alábbi *határértékeket*:

---

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}20x}$;

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}x-1}{\sin 4x}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ch}\,x-\cos x}{x^2}$;

21. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

22. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{x+2\sin x}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$;

24. $\lim\limits_{x\to \infty} xe^{-2x}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$;

27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\mathrm{tg}x}$;

28. $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{2-x}}$;

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

Állapítsa meg, hogy az alábbi görbék az adott $x=x_0$ helyen hányadrendben *érintik egymást*:

---

30. $y_1=\cos\dfrac{x}{2}$, $y_2=1-\dfrac{1}{2}x^2$, $x_0=0$;

31. $y_1=\ln(1+e^x)$, $y_2=\ln 2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}$, $x_0=0$;

32. $y_1=\ln x$, $y_2=x-e+1$, $x_0=e$;

33. $y_1=1-\cos x$, $y_2=2$, $x_0=\pi$.

Számítsa ki az alábbi görbék adott $x=x_0$ helyhez tartozó *simulókörének sugarát* és *középpontjának koordinátáit*, majd írja fel a *simulókör egyenletét*:

34. $y = \cos x$, $x_0 = 0$;

35. $y = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 2$;

36. $r = a(1+\cos\varphi)$, $x_0 = 2a$;

37. $\left.\begin{array}{l} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{array}\right\}$ $x_0 = -1$.

Írja fel az alább megadott függvények $x = a$ helyhez tartozó *n*-edfokú *Taylor-, ill. Maclaurin-polinomját*:

38. $f(x) = xe^{x-1}$, $a = 1$, $n = 4$;

39. $f(x) = \sin \pi x$, $a = \frac{1}{2}$, $n = 2$.

40. $f(x) = x^2 \sin x$, $a = 0$, $n = 3$;

41. $f(x) = e^{2x}$, $a = 0$, $n = 5$;

42. $f(x) = \ln\cos x$, $a = 0$, $n = 4$;

43. $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $n = k$.

Vizsgálja meg az alább megadott függvényeket *szélsőértékre*, *inflexióra*, *monotonitásra*, *konvexitásra*, *konkávitásra*:

44. $f(x) = x^3 - 48x$;

45. $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$;

46. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$;

47. $f(x) = x\ln^2 x$;

48. $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$;

49. $f(x) = x^4 - 8x^2$;

50. $f(x) = x^2 - 8\ln 5x$;

51. $f(x) = \ln x$;

52. $f(x) = 4xe^x$;

53. $f(x) = x^4 + 2$;

54. ;

$$f(x)=x^5-1$$

55. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Számítsa ki *y legnagyobb értékét* az alábbi görbék esetén:

56. $x^4+y^4=x^2+y^2$;

57. $x^2+y^2+y=1$;

58. $r=1+\cos\varphi$;

59. $\left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin^2 t \end{array}\right\}$.

60. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszisbe írjon maximális területű, az ellipszis tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapot.

61. Egy *R* sugarú körkeresztmetszetű fatörzsből *a* alapú és *b* magasságú téglalap keresztmetszetű gerendát faragnak ki. Milyen *a* és *b* érték mellett lesz a gerenda teherbírása maximális, ha a teherbírás arányos ab^2 -tel.

62. Adott *R* sugarú gömbbe írjon maximális térfogatú hengert.

63. Tekintsünk egy *R* sugarú és egy *r* sugarú gömböt, amelyek nem metszik egymást. Helyezzünk el a középpontokat összekötő (*l* hosszúságú) szakaszon egy fényforrást (világító pontot), a gömbökön kívül. A fényforrást hol kell elhelyezni, hogy a megvilágított gömbfelületek felszínének összege maximális legyen.

[1] Ejtsd: [lopi'tal]. *Guillaume de l'Hôpital* (1661–1704) francia matematikus nyomán.

[2] *Brook Taylor* (1685–1731) angol matematikus nyomán.

[3] *Colin Maclaurin* (1698–1746) skót matematikus nyomán.