KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA I.

19

Új Magyarország FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

XIX. A HATÁROZOTT INTEGRÁL ALKALMAZÁSAI

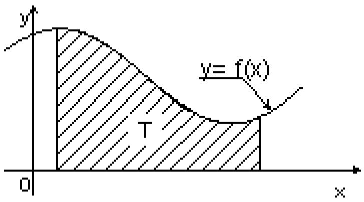
1. TERÜLET ÉS ÍVHOSSZ SZÁMÍTÁSA

Területszámítás

Ha *f* az [*a*,*b*] intervallumon nemnegatív, folytonos függvény, akkor az $y = f(x)$ görbe, az *x* tengely, az $x = a$ és *x* = *b* egyenesek által közrezárt **görbevonalú trapéz területe** (3.25. ábra):

(1)

$$T = \int_a^b f(x)dx \,.$$

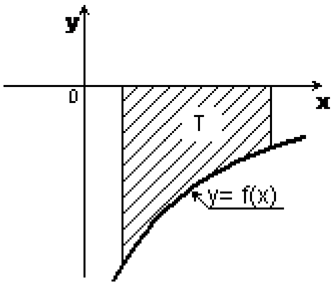


3.25. ábra

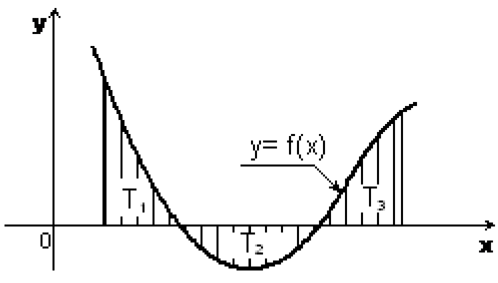
Ha ezen az intervallumon $f(x) \le 0$ (3.26. ábra) vagy *f*(*x*) többször előjelet vált (3.27. ábra), akkor az ábrán vonalkázással jelölt síkidomok területe:

(2)

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \int_a^b |f(x)|dx \,.$$



3.26. ábra

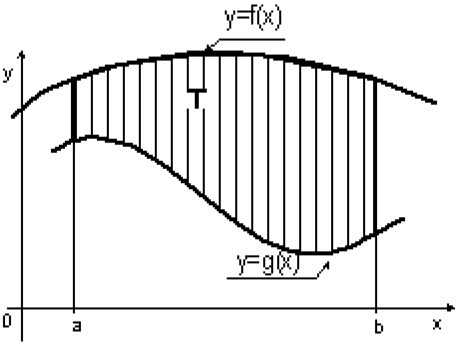


3.27. ábra

Ha az [*a*,*b*] intervallumon $f(x) \geq g(x)$, akkor az $y = f(x)$ és $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$ görbék közötti síkidom területe (3.28. ábra):

(3)

$$T = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \, .$$

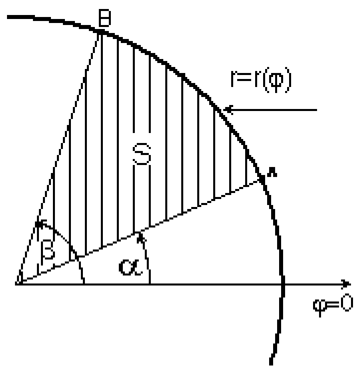


3.28. ábra

Ha a görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$, akkor a 3.29. ábrán vonalkázással jelölt **szektor területe**:

(4)

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi \, .$$



3.29. ábra

Ha a görbe az $x = x(t), \; y = y(t), \; t_A \leq t \leq t_B$ egyenletrendszerrel paraméteresen van megadva, akkor a szektor területe (3.29. ábra):

(5)

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} \left[x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) \right] dt \, .$$

Az (1), (4) és (5) formulák egyszerűbb jelölése lehet:

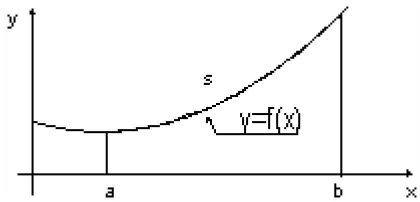
, , .

$$T=\int_a^b y\,dx \qquad S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi \qquad S=\frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B}(x\dot{y}-\dot{x}y)\,dt$$

Ívhosszszámítás

Az $y=f(x),\quad a\le x\le b$ **görbe ívhossza** (3.30. ábra):

(6)
$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$



3.30. ábra

Ha a görbe polárkoordinátás egyenlete

$r=r(\varphi),\ \ \alpha\le\varphi\le b$, akkor

(7)
$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[r(\varphi)\right]^2+\left[r'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi.$$

Ha a görbe az $x=x(t),\ y=y(t),\ t_A\le t\le t_B$

egyenletrendszerrel paraméteresen van megadva, akkor

(8)
$$s=\int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left[\dot{x}(t)\right]^2+\left[\dot{y}(t)\right]^2}\,dt$$

A (6), (7) és (8) formulák egyszerűbb jelölése lehet:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\,.$$

2. Forgástest térfogatának és felszínének számítása

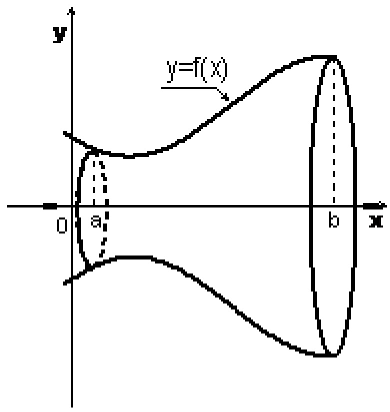
Forgástest térfogata

Ha az $y=f(x)$, $a\le x\le b$ egyenletű görbe az x tengely körül forog (3.31. ábra), akkor forgásfelület keletkezik. E forgásfelület, valamint az

$x=a$ és $x=b$ síkok által közrezárt **forgástest térfogata**:

(9)

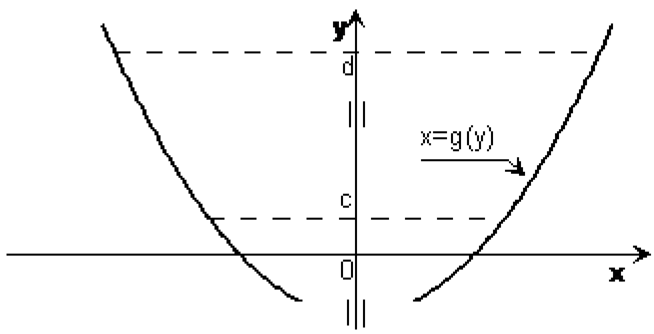
$$V_x = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx \cdot$$



3.31. ábra

Ha az $x = g(y),\ c \le y \le d$ egyenletű görbe az *y* tengely körül forog (3.32. ábra), akkor a keletkező forgástest térfogata:

(10)
$$V_y = \pi\int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy = \pi\int_c^d x^2 dy \cdot$$



3.32. ábra

Forgásfelület felszíne

Az $y = f(x),\ \ a \le x \le b$ görbe *x* tengely körüli forgásával keletkező **forgásfelület felszíne**:

(11)
$$F_x = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = 2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+y'^2}\,dx \cdot$$

Ha az $y = f(x),\ \ a \le x \le b$ görbe az *y* tengely körül forog, akkor a keletkező forgásfelület felszíne:

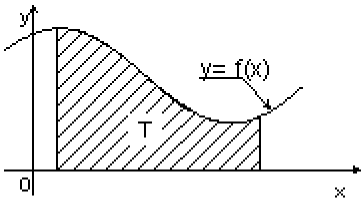
(12)
$$F_y = 2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = 2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1+y'^2}\,dx \cdot$$

3. Nyomaték és súlypont számítása

Elsőrendű statikai nyomaték és súlypont számítása

Síkidom

Tekintsük a (3.25) ábrán vonalkázással jelölt síkidomot.



3.25. ábra

E síkidom *x*-, ill. *y* tengelyre vonatkozó **elsőrendű (statikai) nyomatéka**:

(13)

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad \text{ill.} \quad M_y = \int_a^b xy\,dx\,.$$

Megjegyezzük, hogy a síkidomot kitöltő tömeg *sűrűségeloszlását* itt $\rho \equiv 1$ -nek tételezzük fel.

Ha a síkidom területe *T*, akkor **súlypontjának koordinátái**:

(14)

$$x_0 = \frac{M_y}{T}, \qquad y_0 = \frac{M_x}{T}\,.$$

Görbe

Az $y = f(x)$, $a \le x \le b$ egyenletű **görbeív** *x*-, ill. *y* tengelyre vonatkozó **statikai nyomatéka**:

(15)

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad \text{ill.} \quad M_y = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

Ha a görbe ívhossza *s*, akkor **súlypontjának koordinátái**:

(16)

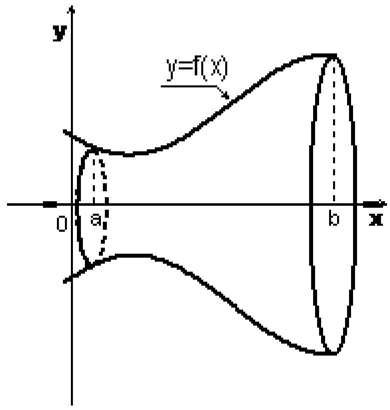
$$x_0 = \frac{M_y}{s}, \qquad y_0 = \frac{M_x}{s}\,.$$

Forgástest és forgásfelület

A 3.31. ábrán vázolt (homogén) **forgástest (*y, z*) síkra vonatkozó elsőrendű (statikai) nyomatéka**:

(17)

$$M_{yz} = \pi\int_a^b xy^2\,dx\,.$$



3.31. ábra

Ha e forgástest térfogata V_x , akkor **súlypontjának abszcisszája**:

(18)
$$x_0 = \frac{M_{yz}}{V_x}.$$

A 3.31. ábrán vázolt (homogén) **forgásfelület (*y, z*) síkra vonatkozó elsőrendű (statikai) nyomatéka**:

(19)
$$M_{yz} = 2\pi \int_a^b xy\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Ha a forgásfelület felszíne F_x , akkor **súlypontjának abszcisszája**:

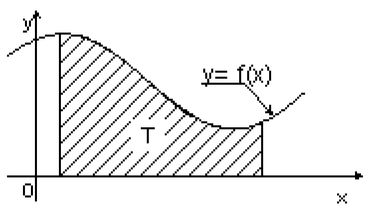
(20)
$$x_0 = \frac{M_{yz}}{F_x}.$$

Másodrendű nyomaték számítása

Síkidom

A 3.25. ábrán vázolt síkidom ***x* -, ill. y tengelyre vonatkozó másodrendű (tehetetlenségi, inercia) nyomatéka**:

(21)
$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dx, \text{ ill. } I_y = \int_a^b x^2 y dx.$$



3.25. ábra

Görbe

Az $y = f(x),\ a \le x \le b$ görbeív ***x* -, ill. *y* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka**:

(22)

$$I_x = \int_a^b y^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx, \text{ ill. } I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Forgástest és forgásfelület

A 3.31. ábrán vázolt **forgástest *x* tengelyre (a forgástengelyre) vonatkozó másodrendű nyomatéka**:

(23)

$$I_x = \frac{\pi}{2}\int_a^b y^4\, dx,$$

a forgásfelület *x* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka pedig:

(24)

$$I_x = 2\pi\int_a^b y^3 \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

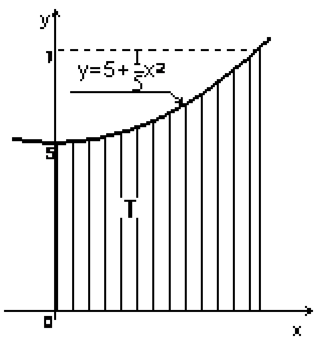
4. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ◯ nem láthatók

Számítsuk ki az alábbi görbék (vonalak) által határolt síkidomok területét:

1. $y = 2+\frac{1}{5}x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=5$;

Megoldás A síkidom olyan görbevonalú trapéz, amelyet "felülről" az $y = 2+\frac{1}{5}x^2$ parabola, "alulról" az *x* tengely $0 \le x \le 5$ szakasza, oldalról pedig az *y* tengely és az $x=5$ egyenes határol (3.33. ábra).



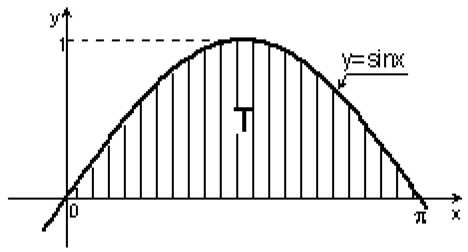
3.33. ábra

Használjuk az (1) képletet:

$$T = \int_0^5 \left(2+\frac{1}{5}x^2\right)dx = \left[2x+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 10+\frac{1}{5}\cdot\frac{5^3}{3}-0 = \frac{55}{3}.$$

2. $y = 5\sin x$, $y=0$, $0 \le x \le \pi$;

Megoldás. A síkidom az $y = 5\sin x$ görbe egy félhulláma és az *x* tengely közötti síkrész (3. 34. ábra). Az (1) képlet szerint

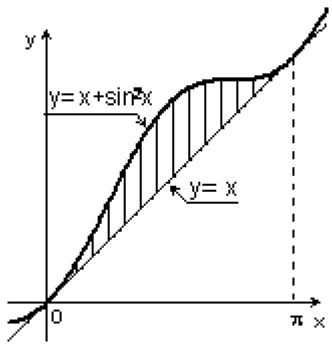


3.34. ábra

$$T = \int_0^{\pi} 5\sin x dx = 5[-\cos x]_0^{\pi} = 5[-\cos\pi - (-\cos 0)] = 5(1+1) = 10 \cdot$$

3. $y = x + \sin^2 x$, $y = x$, $0 \le x \le \pi$;

Megoldás. A síkidom a 3.35. ábrán látható. A (3) képletet alkalmazva,



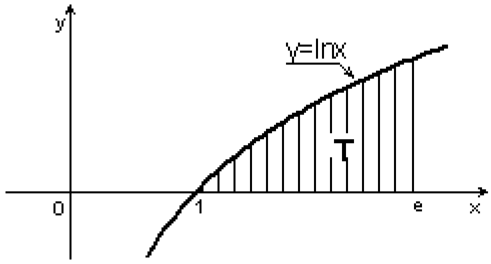
3.35. ábra

$$T = \int_0^{\pi} (x + \sin^2 x - x) dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2} \cdot$$

4. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e^2$;

Megoldás. A síkidom a 3.36. ábrán látható. Az (1) képlet szerint

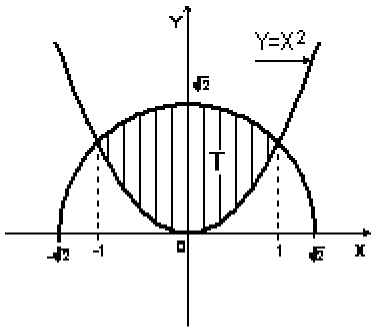


3.36. ábra

$$T=\int_1^{e^2}\ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^{e^2}=e^2\ln e^2-e^2-(1\cdot\ln 1-1)=e^2+1\cdot$$

5. $x^2+y^2=2$, $y=x^2$, $y\geq 0$;

Megoldás. A síkidomot "felülről" az $x^2+y^2=2$, azaz $y=\sqrt{2-x^2}$ kör, alulról az $y=x^2$ parabola határolja (3.37. ábra).



3.37. ábra

A metszéspontok abszcisszáit az $x^2+y^2=2$, $y=x^2$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Az $y=x^2$ felhasználásával $x^2+x^4=2$. Ennek valós megoldásai: $x=-1$ és $x=1$. Használjuk a (3) képletet:

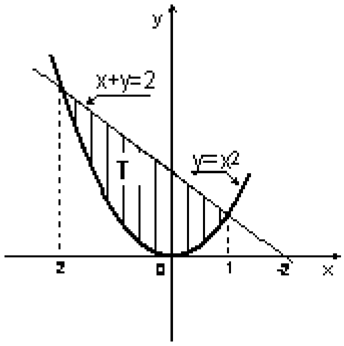
$$T=\int_{-1}^{1}(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx=2\int_0^1(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}.$$

Itt kihasználtuk azt, hogy $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$, és

$$\int_{x=0}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=\boxed{\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\sin t\\ dx=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t\end{array}}=\int_{t=0}^{\pi/4}2\cos^2 t\,dt=\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

6. $y=x^2$, $x+y=2$;

Megoldás. A síkidom a 3.38. ábrán látható.



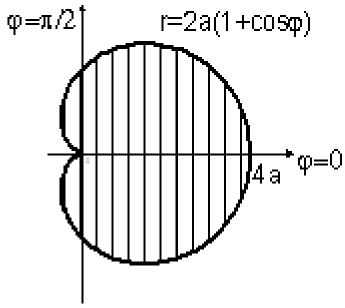
3.38. ábra

A metszéspontok abszcisszái az $y = 2 - x$, $y = x^2$ egyenletrendszer megoldásával kaphatók. Az $x^2 = 2 - x$ másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. A (3) képlet szerint

$$T = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 4{,}5 .$$

7. $r = 2a(1 + \cos \varphi)$, *r* és φ polárkoordináták;

Megoldás. A görbe *kardioid*, amely szimmetrikus a polártengelyre (3.39. ábra).



3.39. ábra

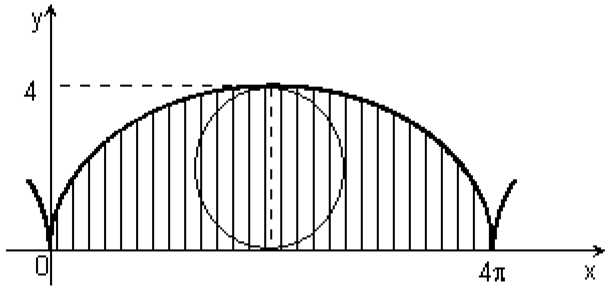
Ezt a szimmetriát kihasználva, a (4) képlet szerint a terület:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 4a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = 4a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 4a^2 \left[\varphi + 2 \sin\varphi + \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} = 4a^2 \left[\pi + 0 + \frac{1}{2}\pi + 0 - 0 \right] = 6a^2 \pi .$$

8. $x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t), \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 4\pi .$

Megoldás. A síkidom egy ciklois ív és az *x* tengely $0 \le x \le 4\pi$ szakasza közötti síkrész (3.40. ábra).



3.40. ábra

Első megoldás. Használjuk az (1) képletet $T=\int\limits_a^b ydx$ alakban. Mivel

$$x=2(t-\sin t),\quad y=2(1-\cos t),\quad dx=2(1-\cos t)dt,\quad 0\le t\le 2\pi,$$

$$T=\int\limits_{x=0}^{4\pi} ydx=\int\limits_{t=0}^{2\pi} 2(1-\cos t)\cdot 2(1-\cos t)dt=4\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=4\left[t-2\sin t+\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=12\pi\cdot$$

Második megoldás. A síkidom szektornak is tekinthető. Az (5) képletet használva,

$$\dot{x}=2(1-\cos t),\ \dot{y}=2\sin t,\ x\dot{y}-\dot{x}y=4(t-\sin t)\sin t-4(1-\cos t)^2=$$

$$=4(t\sin t+2\cos t-2)\,,$$

és t változik 2π-től 0-ig. Így a szektorterület, egyúttal a görbe alatti síkidom területe is:

$$S=T=\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi}^{0}4(t\sin t+2\cos t-2)dt=2\left[-t\cos t+\sin t+2\sin t-2t\right]_{2\pi}^{0}=$$

$$=2\left[0-(-2\pi\cos 2\pi+3\sin 2\pi-2\cdot 2\pi)\right]=2\cdot 6\pi=12\pi\cdot$$

Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát:

9. $y=\mathrm{ch}x,\ -2\le x\le 2\,;$

Megoldás

$y'=\mathrm{sh}\,x$, így a (6) képlet szerint

$$s=\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2x}\,dx=\int\limits_{-2}^{2}\mathrm{ch}\,xdx=\left[\mathrm{sh}\,x\right]_{-2}^{2}=\mathrm{sh}2-\mathrm{sh}(-2)=2\mathrm{sh}2\approx 7{,}2537\cdot$$

10. $y=\dfrac{1}{2}x^2,\quad 0\le x\le 4\,;$

Megoldás.

$y'=\dfrac{1}{2}\cdot 2x=x$, így a (6) képlet szerint

$$s=\int_{x=0}^{4}\sqrt{1+x^2}\,dx=\boxed{\begin{array}{c}x=\operatorname{sh}t\\ dx=\operatorname{ch}t\,dt\end{array}}=\int_{t=0}^{\operatorname{arsh}4}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\cdot\operatorname{ch}t\,dt=\int_{0}^{\operatorname{arsh}4}\operatorname{ch}^2 t\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\operatorname{arsh}4}\frac{\operatorname{ch}2t+1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh}2t}{2}+t\right]_0^{\operatorname{arsh}4}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}+t\right]_0^{\operatorname{arsh}4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[4\sqrt{1+4^2}+\operatorname{arsh}4-0\right]=\frac{1}{2}\left[4\sqrt{17}+\operatorname{arsh}4\right]\approx 9{,}2936\,.$$

11. $y=\ln(1-x^2),\quad 0\le x\le 0{,}5$;

Megoldás. Használjuk a (6) képletet.

$$y'=\frac{-2x}{1-x^2},\quad 1+y'^2=1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2,$$

$$s=\int_0^{0,5}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx=\int_0^{0,5}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx=\left[\ln\frac{1+x}{1-x}-x\right]_0^{0,5}=\ln 3-\frac{1}{2}\,.$$

12. $r=2a\,(1+\cos\varphi)$;

Megoldás. A görbe *kardioid* (3.39.ábra), $r'=2a(-\sin\varphi)$, $r^2+r'^2=4a^2(1+\cos\varphi)^2+$

$+4a^2(-\sin\varphi)^2=8a^2(1+\cos\varphi)\,.$

A (7) képlet szerint, a szimmetriát kihasználva,

$$s=2\cdot\sqrt{8}\,a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=2\cdot\sqrt{8}\,a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,d\varphi=8a\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\left[2\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}=8a\left[2\sin\frac{\pi}{2}-2\sin 0\right]=16a\,.$$

13. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.$

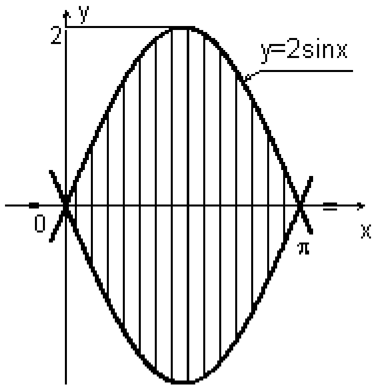
Megoldás. A görbe *ciklois*. Használjuk a (8) képletet:

$\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$, $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,.$

$$s=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}}\,dt=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=2a\left[-2\cos\pi+2\cos 0\right]=2a\left[2+2\right]=8a\,.$$

14. Számítsuk ki az $y = 2\sin x$ görbe (3.41. ábra), majd az $y = \sin 2x$ görbe egy fél hullámának *x* tengely körüli forgásával keletkező forgástest térfogatát.



3.41. ábra

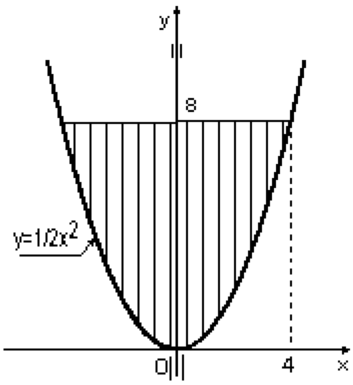
Megoldás. Az $y = 2\sin x$ görbe esetére a forgástest például a [0; p] intervallumra eső ív forgatásával keletkezik. Ennek térfogata a (9) képlet szerint

$$V_x = \pi\int_0^\pi 4\sin^2 x\,dx = 4\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = 2\pi\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = 2\pi^2 .$$

Az $y = \sin 2x$ görbe egy félhulláma p/2 hosszúságú. Így a térfogat:

$$V_x = \pi\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} .$$

15. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{2}x^2$ parabola $0 \le x \le 4$ ívének *y* tengely körüli forgásával keletkező forgásparaboloid térfogatát (3.42. ábra).



3.42. ábra

Megoldás. Használjuk a (10) képletet. Mivel $x^2 = 2y$, ezért

$$V_y = \pi\int_0^8 x^2 dy = \pi\int_0^8 2y\,dy = \pi\left[y^2\right]_0^8 = \pi(64-0) = 64\pi .$$

Érdemes megfigyelni, hogy a befoglaló henger térfogata $4^2\pi\cdot 8 = 128\pi$, és a paraboloid térfogata ennek fele. Ez jellemző a forgásparaboloidra.

16. Számítsuk ki az $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$ ciklois $0 \le x \le 2a\pi$ ívének *x* tengely körüli forgásával keletkező forgástest térfogatát (l. a 3.40. ábrát, ahol $a = 2$).

Megoldás. Használjuk a (9) képletet, miközben $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$, $dx = \dot{x}dt = a(1 - \cos t)dt$. Ha $x = 0$, akkor $t = 0$, ha $x = 2a\pi$, akkor $t = 2\pi$.

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t)dt = a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= a^3 \pi \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\pi} = a^3 \pi \left[2\pi + \frac{3}{2} \cdot 2\pi \right] = 5a^3 \pi^2 .$$

17. Számítsuk ki a gömb térfogatát és felszínét.

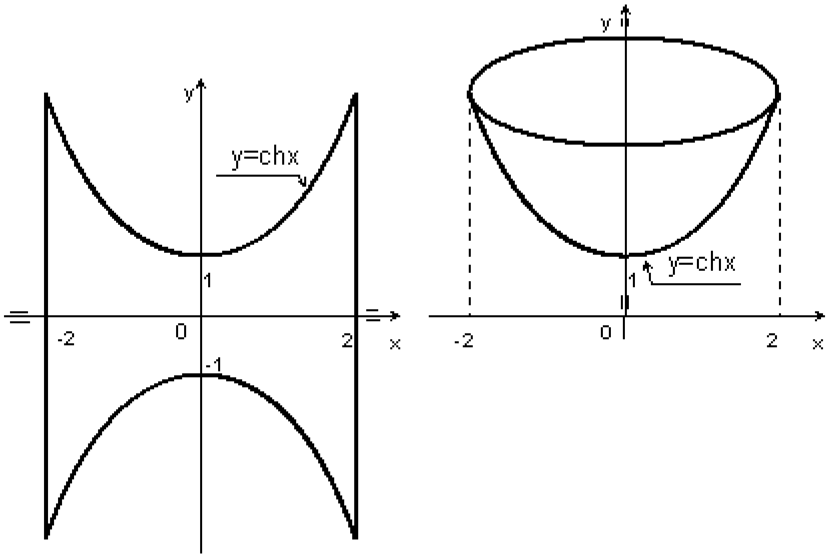
Megoldás. Forgassuk meg az $x^2 + y^2 = a^2$ kör "felső" felét, az $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ görbét az *x* tengely körül. A keletkező felület a gömbfelület, annek belseje a gömbtest. Ennek térfogata a (9) szerint, kihasználva a szimmetriát is,

$$V_x = 2 \cdot \pi \int_0^a (a^2 - x^2)dx = 2\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2\pi \left[a^3 - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{4a^3 \pi}{3} .$$

A felszín számításához használjuk a (11) képletet. Mivel $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, kihasználva a szimmetriát is,

$$F_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \cdot a [x]_0^a = 4a^2 \pi \cdot$$

18. Számítsuk ki az $y = \operatorname{ch} x$ görbe $-2 \le x \le 2$ ívének *x*, ill. *y* tengely körüli forgásával keletkező forgásfelület felszínét (3.43. ábra).



3.43. ábra

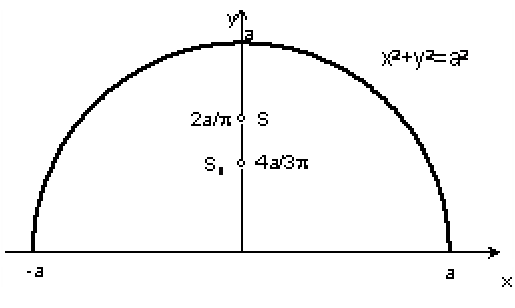
Megoldás. Használjuk a (11), ill. (12) képletet, és vegyük figyelembe azt, hogy a görbe szimmetrikus az *y* tengelyre:

$$F_x = 2\cdot 2\pi\int_0^2 \operatorname{ch}x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = 4\pi\int_0^2 \operatorname{ch}^2 x\,dx = 4\pi\int_0^2 \frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}dx =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\operatorname{sh}2x}{2}+x\right]_0^2 = 2\pi\left[\frac{\operatorname{sh}4}{2}+2-0\right] = \pi[\operatorname{sh}4+4] \approx 98{,}30\,,$$

$$F_y = 2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^2 x\operatorname{ch}x\,dx = 2\pi[x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x]_0^2 \approx 28{,}22\,.$$

19. Számítsuk ki az $x^2+y^2 \le a^2$, $y \ge 0$ félkörlap súlypontjának koordinátáit (3.44. ábra).



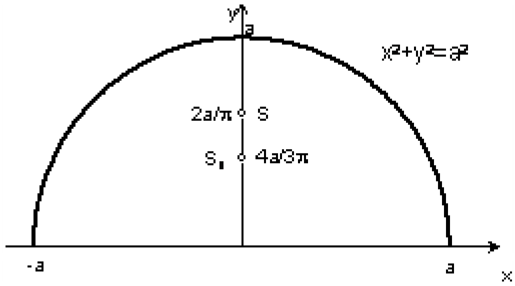
3.44. ábra

Megoldás. A félkörlap szimmetrikus az *y* tengelyre, ezért a súlypont az *y* tengelyen van, így annak abszcisszája $x_0 = 0$. A (14) képletek szerint $y_0 = M_x / T$. A félkörlap területe $T = \frac{1}{2}a^2\pi$. Az M_x statikai nyomaték a (13) képlettel számítható. Mivel $y^2 = a^2 - x^2$, ezért

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx = \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3$$

Így $y_0 = \frac{2}{3}a^3 / \left(\frac{1}{2}a^2\pi\right) = \frac{4a}{3\pi}$. Tehát az S_1 súlypont koordinátái: $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{4a}{3\pi}$.

20. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$ félkörív súlypontját (3.44. ábra)



3.44. ábra

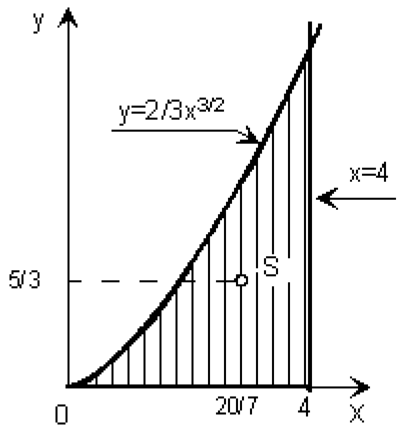
Megoldás. A súlypont koordinátáit kell kiszámítani. Használjuk a (16) képleteket. A szimmetria miatt a súlypont abszcisszája $x_0 = 0$. A félkörív hossza $s = a\pi$. Az M_x statikai nyomatékot a (15) képletekkel számítjuk. Mivel $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, ezért

$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, és

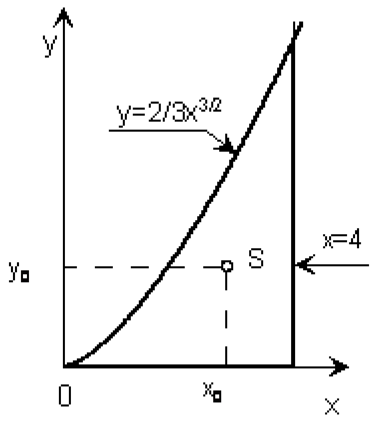
$$M_x = \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int_{-a}^{a} a\,dx = 2a^2.$$

Így $y_0 = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}$. Tehát az *S* súlypont koordinátái: $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{2a}{\pi}$.

21. Számítsuk ki az $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ görbe, az *x* tengely és az $x = 4$ egyenes által közrezárt síkrész súlypontjának koordinátáit és e síkidomot határoló zárt görbe súlypontjának koordinátáit (3.45. és 3.46. ábra).



3.45. ábra



3.46. ábra

Megoldás. A síkidom területe:

$$T=\int_0^4 \frac{2}{3}x^{3/2}dx=\frac{2}{3}\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}4^{5/2}=\frac{4}{15}\cdot 32=\frac{128}{15}.$$

A statikai nyomatékok a (13) képletek szerint:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^4 \frac{4}{9}x^3dx=\frac{2}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4=\frac{2}{9}\left[4^3-0\right]=\frac{128}{9},$$

$$M_y=\int_0^4 x\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}dx=\frac{2}{3}\left[\frac{x^{7/2}}{7/2}\right]_0^4=\frac{4}{21}\cdot 4^{7/2}=\frac{512}{21}.$$

Tehát a síkidom súlypontjának koordinátái a (14) képletek szerint: $x_0=\frac{512}{21}/\frac{128}{15}=\frac{20}{7}$, $y_0=\frac{128}{9}/\frac{128}{15}=\frac{5}{3}$ (3.45. ábra).

A síkidom kerülete 3 vonaldarabból áll (3.46. ábra). Ezek összhossza (a kerület):

$$K=4+\frac{16}{3}+s=\frac{28}{3}+\int_0^4\sqrt{1+x}dx=\frac{28}{3}+\left[\frac{2}{3}\sqrt{1+x}^3\right]_0^4=\frac{28}{3}+\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)\approx 16{,}1202.$$

A statikai nyomatékokat a három vonaldarabra külön-külön számítjuk, majd ezeket összeadjuk.

Az x tengelyre vonatkozó nyomatékok:

Az s hosszúságú ívdarab nyomatéka a (15) képlet alapján:

$$M_{x1}=\int_{x=0}^4\frac{2}{3}x^{3/2}\sqrt{1+x}dx=\boxed{\begin{matrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}}=\frac{2}{3}\int_{t=0}^2 t^3\sqrt{1+t^2}\cdot 2tdt=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^2 t^4\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{6}t^3\sqrt{1+t^2}^3-\frac{1}{8}t\sqrt{1+t^2}^3+\frac{1}{16}t\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{16}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^2=$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{3}\left[\frac{20}{3}-\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\right]+\frac{1}{6}\ln(2+\sqrt{5})=\frac{133\sqrt{5}}{18}+\frac{1}{12}\ln(2+\sqrt{5})\approx 16{,}64236.$$

Az x tengely (y = 0) $0\le x\le 4$ szakaszának nyomatéka:

$$M_{x2}=\int_0^4 0\cdot\sqrt{1+0}dx=0.$$

Az $x=4$ egyenes $0\le y\le\frac{16}{3}$ szakaszának nyomatéka integrálás nélkül számítható:

$$M_{x3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{16}{3}=\frac{128}{9}.$$

Tehát az x tengelyre vonatkozó statikai nyomaték:

$$M_x=M_{x1}+M_{x2}+M_{x3}=\frac{133\sqrt{5}}{18}+\frac{1}{12}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{128}{9}\approx 30{,}86458.$$

Így a határoló zárt görbe súlypontjának ordinátája: $y_0 = \frac{M_x}{K} \approx 1{,}91465$.

Hasonlóan számítjuk a súlypont másik koordinátáját. Az ív nyomatéka:

$$M_{y1} = \int_0^4 x\sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{1+x}^3 - \frac{4}{15}\sqrt{1+x}^5\right]_0^4 = \frac{4}{15}(25\sqrt{5}+1) \approx 15{,}17379 .$$

A $0 \le x \le 4$ szakasz nyomatéka: $M_{y2} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$.

Az $x = 4$ egyenes $0 \le y \le \frac{16}{3}$ szakaszának nyomatéka: $M_{y3} = 4\cdot\frac{16}{3} = \frac{64}{3}$.

Tehát az *y* tengelyre vonatkozó statikai nyomaték:

$$M_y = M_{y1} + M_{y2} + M_{y3} = \frac{4}{15}(25\sqrt{5}+1) + 8 + \frac{64}{3} \approx 44{,}50712 .$$

Így a határoló görbe súlypontjának abszcisszája: $x_0 = \frac{M_y}{K} \approx 2{,}7610$.

22. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ negyedkör *x* tengely körüli forgásával keletkező forgástest (félgömbtest) súlypontjának koordinátáit.

Megoldás. A súlypont az *x* tengelyen van. A statikai nyomatékot a (17) képlettel számítjuk:

$$M_{yz} = \pi\int_0^a x(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4\pi}{4} .$$

A félgömbtest térfogata: $V_x = \frac{2a^3\pi}{3}$. Így a súlypont abszcisszája a (18) képlet szerint:

$x_S = \frac{3a}{8}$. A másik két koordináta 0.

23. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = a^2$, $x \ge 0, y \ge 0$ negyedkör *x* tengely körüli forgásával keletkező félgömbhéj súlypontjának koordinátáit.

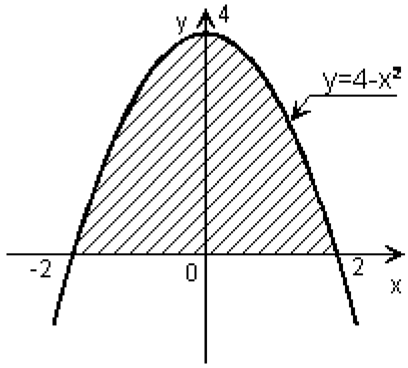
Megoldás. A súlypont az *x* tengelyen van. A statikai nyomatékot a (19) képlettel számítjuk. Mivel $y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, ezért

$$M_{yz} = 2\pi\int_0^a xy\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = 2\pi\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^a ax\,dx = 2a\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = a^3\pi .$$

A félgömb felszíne $F_x = 2a^2\pi$. Így a súlypont abszcisszája a (20) képlettel: $x_s = \frac{a}{2}$. A másik két koordináta 0.

24. Számítsuk ki az $y = 4 - x^2$ parabola és az *x* tengely által közrezárt síkidom *x*, ill. *y* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát (3. 47. ábra).



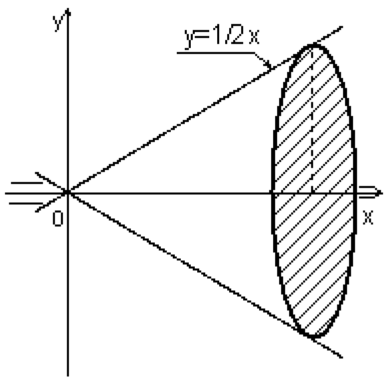
3.47. ábra

Megoldás. A (21) képletek szerint

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^3 dx = 2\cdot\frac{1}{3}\int_{0}^{2}(64-48x^2+12x^4-x^6)dx = \frac{4096}{105} \;;$$

$$I_y = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)dx = 2\cdot\int_{0}^{2}(4x^2-x^4)dx = \frac{128}{15} \,.$$

25. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{2}x, \quad 0 \le x \le 4$ egyenes szakasz *x* tengely körüli forgásával keletkező forgáskúptest és -palást *x* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát (3.48. ábra).



3.48. ábra

Megoldás. A forgástest nyomatéka a (23) képlet szerint:

;

$$I_x = \frac{\pi}{2}\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^4 dx = \frac{\pi}{32}\int_0^4 x^4 dx = \frac{\pi}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{32\pi}{5}$$

A forgásfelület (a palást) nyomatéka a (24) képlettel, figyelembe véve, hogy $y' = \frac{1}{2}$:

$$I_x = 2\pi\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^3 \sqrt{1+\frac{1}{4}}dx = \frac{\sqrt{5}\pi}{8}\int_0^4 x^3 dx = \frac{\sqrt{5}\pi}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 8\sqrt{5}\pi \,.$$

5. Feladatok

Számítsa ki az alábbi görbék és az *x* tengely közötti síkidom (görbevonalú trapéz) területét:

1. $y = \frac{1}{4}x^2$, $1 \le x \le 4$;

2. $y = x^2 - 9$, $-2 \le x \le 2$;

3. $y = 1 + \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$;

4. $y = \frac{1}{\sin x}$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

5. $y = \sqrt{x^2 + x^4}$, $0 \le x \le \sqrt{8}$;

6. $y = \frac{-x}{1+x^2}$, $0 \le x \le 3$;

7. $y = 4x \ln x$, $1 \le x \le e$;

8. $y = \frac{1}{x}$, $1 \le x \le 1200$.

9. Számítsa ki annak a két darabból álló síkidomnak a területét, amelyet az $y = 16 - x^2$, $x \ge 0$, az *x* tengely, az *y* tengely és az $x = 6$ egyenes közrezár.

Számítsa ki annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az alábbi görbék és az *x* tengely közrezár:

10. $y = 9 - x^2$

11. $y = 2 - \operatorname{ch} x$

12. $y = x(x-1)(x-3)$

13. $y = \frac{2}{1+x^2} - 1$

Számítsa ki az alábbi görbepárok által közrezárt síkidom területét:

14. $y = 0{,}5x^2$ és $y = x$;

15. $y = 3x - x^2$ és $y = \sin \frac{\pi}{3} x$, $0 \le x \le 3$;

16. $y = 6 - \frac{1}{6} x^2$ és $y = -\frac{1}{2} x + 3$.

17. Az $y = 8 \sin x$ görbe és az $y = 4$ egyenes kétféle síkidomot zár közre. Számítsa ki a kisebbik területét.

18. Számítsa ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területét.

19. Számítsa ki az $y^2 = x(1-x)^2$ görbe által határolt idom (hurok) területét.

20. Az $y^2 = 2x$ parabola az $x^2 + y^2 = 4x$ kör belsejét (a körlapot) két részre vágja. Számítsa ki ezek területét.

21. Számítsa ki *m* értékét, ha az *y* = *mx* egyenes és az $y = x^2 - 3x$ parabola által közrezárt síkidom területe 9.

22. Számítsa ki *a* értékét, ha az $y = ax^2$ parabola felezi az *x* tengely és az $y = 4 - x^2$ görbe által közrezárt síkidom területét.

23. Az $y = \sin x$ és $y = \sin(x - 2)$ görbék egybevágó síkidomokat zárnak közre. Számítsa ki egy ilyen idom területét.

Számítsa ki az alábbi, poláris koordinátákkal adott görbék által határolt síkidom területét:

---

24. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$;

25. $r = 3(1 - \cos\varphi)$;

26. $r = 4 \sin \varphi$;

27. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

28. $r^2 + \varphi^2 = 1$;

29. $r = \sin 2\varphi$.

30. Számítsa ki az $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$ görbe területét.

31. Az $r = 3(1 - \cos\varphi)$ kardioidot az $x = 0$ egyenes két részre vágja. Számítsa ki a részek területét.

Számítsa ki az alábbi görbék által határolt síkidom területét (mint szektor területét):

---

32. $x = 6 \cos t$, $y = 4 \sin t$;

33. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$, $0 \le t \le 2$;

34. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$;

35. $x = 2 \cos t + \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$.

Számítsa ki az alábbi görbék forgásával keletkező forgástestek térfogatát:

36. Az $rx+my=mr$ egyenes első síknegyedben lévő szakasza forog az *x* tengely körül ($r>0$, $m>0$);

37. Az $x^2-y^2=1$ hiperbola $1\le x\le 3$ íve forog az *x*, ill. az *y* tengely körül.

38. Az $xy=16$ görbe $1\le x\le 4$ íve forog az *x* tengely körül;

39. Az $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis forog az *x* ill. *y* tengely körül;

40. Az $y^2+x-9=0$ parabola $x\ge 0$ íve forog az *x* ill. *y* tengely körül;

41. Az $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ görbe forog az *x* ill. *y* tengely körül;

42. Az $y=\sqrt{x}(1-x)$ görbe $0\le x\le 1$ íve forog az *x* tengely körül;

43. Az $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ciklois $0\le t\le 2\pi$ íve forog az *x* tengely körül;

44. Az $r=a(1+\cos\varphi)$ kardioid forog a $\varphi=0$ tengely körül.

Számítsa ki a következő görbék ívhosszát:

45. $y=x^2$, $0\le x\le 1$;

46. $9y^2=4x^3$, $0\le x\le 4$, $y\ge 0$;

47. $y=\dfrac{x-6}{3}\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, $0\le x\le 4$;

48. $x^{2/3}+y^{2/3}=1$;

49. $y=\ln x$, $1\le x\le\sqrt{3}$;

50. $y=\ln\cos x$, $0\le x\le a<\dfrac{\pi}{2}$;

51. $r=a\varphi$, $0\le\varphi\le 1$, $a>0$;

52. $r=e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$;

53. $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$;

54. $r=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $a>0$.

(*r* és φ poláris koordináták)

55. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le\pi$;

56. $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$;

57. , , ;

$x-2=t^2 \quad y+1=t^3 \quad 0\le t\le 2$

58. $x=5\cos t+\cos 5t$, $y=5\sin t-\sin 5t$, $0\le t\le \frac{\pi}{3}$.

Számítsa ki az alábbi görbék *x* tengely körüli forgásával keletkező forgásfelület felszínét:

---

59. $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$;

60. $\frac{x}{m}+\frac{y}{r}=1$, $0\le x\le m$, $m>0$, $r>0$;

61. $y^2=2x$, $0\le x\le 8$;

62. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$;

63. $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$;

64. $r=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.

Számítsa ki az alábbi görbék *y* tengely körüli forgásával keletkező forgásfelület felszínét:

---

65. $y=\frac{1}{2}x^2+1$, $0\le x\le 2$;

66. $y=a\cdot \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $0\le x\le b$;

67. $4x^2+y^2=4$;

68. $x=y^3$, $0\le y\le 1$;

69. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Számítsa ki az alábbi görbékkel határolt korlátos síkrész *x* és *y* tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát és súlypontjának koordinátáit:

---

70. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x\ge 0$;

71. $x=y^2-9$, $y=0$, $x=0$, $y\ge 0$;

72. $y=-\sqrt{x}$, $y=-0{,}125x^2$;

73. $y=2\sin 3x$, $y=0$, $0\le x\le \frac{\pi}{3}$;

74. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $x=0$, $y=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$;

75. $r=a(1+\cos\varphi)$, *r* és φ poláris koordináták.

Számítsa ki az alábbi görbeív *x* és *y* tengelyre vonatkozó statikai nyomatékait és súlypontjának koordinátáit:

---

76. $y = \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le b$;

77. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \ge 0$ negyedkörív;

78. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le x \le 2a\pi$;

79. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $x = 0$, $y = 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

80. $r = a(1 + \cos\varphi)$, *r* és φ poláris koordináták.

Határozza meg annak a forgástestnek a súlypontját, amely az alábbi görbék által határolt korlátos síkidom adott tengely körüli forgásával keletkezik.

---

81. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x \ge 0$ az *x* tengely körül forog;

82. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x \ge 0$ az *y* tengely körül forog;

83. $y = x^2$, $y = x$ az *x* tengely körül forog;

84. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \ge 0$ az *x* tengely körül forog.

Számítsa ki az alábbi görbeív forgásával keletkező forgásfelület súlypontjának koordinátáit:

---

85. $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 2$ az *x* tengely körül forog;

86. Az $x^2 - y^2 = 1$, $1 \le x \le 2$ az *x* tengely körül forog.

87. Számítsa ki az $y = 9 - x^2$ és az *x* tengely által határolt síkidom *y* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát.

88. Számítsa ki az $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ íve és az *x* tengely által határolt síkrész *x* ill. *y* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát.

89. Számítsa ki az $x^2 + y^2 = a^2$ kör (körvonal) *x* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát.

90. Számítsa ki az $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ aszteroida *x* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát.

91. Számítsa ki az $y = \sqrt{8x}$ parabola $0 \le x \le 2$ ívének *x* tengely körüli forgásával keletkező forgásparaboloid belsejébe eső forgástest *x* tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát.
