KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA II.

3

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

1. Alapvető definíció és tételek

Végtelen sor

Az

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

kifejezést **végtelen sornak** nevezzük. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számok a végtelen sor **tagjai**.

Az $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$ sorozat az (1) végtelen sor **részletösszegeinek sorozata**, s_n az **n-edik részletösszeg**.

A végtelen sor **konvergens**, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. Ekkor az

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n \qquad (2)$$

véges határértéket az (1) végtelen sor **összegének** mondjuk. Ebben az esetben írható, hogy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s. \qquad (3)$$

Ha az (s_n) sorozat divergens, akkor a végtelen sor is **divergens**.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért az (1) végtelen sort $\sum a_n$ módon jelöljük, és a végtelen sor helyett csak *sort* mondunk.

Tételek

Tétel (Cauchy-féle általános konvergenciakritérium). Az (1) végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N természetes szám, hogy $n > N$ esetén

$$|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon, \qquad (4)$$

ahol k tetszőleges természetes szám.

A tétel egyik következménye: Az (1) végtelen sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Hányadoskritérium. Ha a $\sum a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor a sor konvergens}, \\ > 1, & \text{akkor a sor divergens}, \\ = 1, & \text{akkor ezzel nem lehet dönteni.} \end{cases} \qquad (5)$$

Gyökkritérium. Ha a $\sum a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor a sor konvergens ,} \\ > 1, & \text{akkor a sor divergens,} \\ = 1, & \text{akkor ezzel nem lehet dönteni.} \end{cases} \tag{6}$$

Integrálkritérium. Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú sor, f az $[1,\infty)$ intervallumon pozitív, csökkenő függvény, és $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\int_1^\infty f(x)dx < \infty \text{ esetén a } \sum a_n \text{ sor konvergens,} \tag{7}$$

minden más esetben divergens.

Összehasonlító kritérium (majoráns-minoráns próba). Legyen $a_n > 0$, $b_n > 0$ és $b_n \geq a_n$ minden n -re. Ekkor

$$\text{ha } \sum b_n \text{ konvergens, akkor } \sum a_n \text{ is konvergens,} \tag{8}$$

$$\text{ha } \sum a_n \text{ divergens, akkor } \sum b_n \text{ is divergens.} \tag{9}$$

Leibniz-kritérium. Ha a $\sum a_n$ sor váltakozó előjelű (más szóval alternáló), és $|a_n|$ monoton módon tart nullához, akkor a sor konvergens.

A $\sum a_n$ sort **abszolút konvergensnek** mondjuk, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens. A konveregens de nem abszolút konvergens sort feltételesen konvergensnek is mondjuk.

Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum ca_n$ sor is konvergens és $\sum ca_n = c\sum a_n$ (c állandó).

Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok konvergensek, akkor a $\sum (a_n + b_n)$ sor is konvergens, és

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n \,. \tag{10}$$

Ha az $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$ konvergens végtelen sor összegét az $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ részletösszeggel közelítjük, akkor a közelítés hibája az $R_n := a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ végtelen sor összege (a maradéktag). Ha a $\sum a_n$ sor váltakozó előjelű, akkor $|R_n| \le |a_{n+1}|$. Ha nem váltakozó előjelű, akkor $|R_n|$ becslésére más módszert választunk.

2. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ○ nem láthatók

1. Az $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ **mértani sor** részletösszegei:

$$s_1 = a,\ s_2 = a(1+q),\ s_3 = a(1+q+q^2), \ldots,\ s_n = a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}), \ldots$$

A (2) képlet szerint a sor összege:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{a}{1-q},$$

feltéve, hogy $|q| < 1$. Itt kihasználtuk azt, hogy $\lim q^n = 0$. Ez a sor tehát konvergens., ha $|q| < 1$. Minden más esetben divergens.

2. Az $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{10n} + \ldots$ sor divergens, mert részletösszegeinek sorozata divergens.

Ugyanis a sor 2^n -edik részletösszege:

$$s_{2^n} = \frac{1}{10}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{32}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\right].$$

A kerek zárójelekben lévő összegek mindegyike nagyobb mint 1/2, ezért $s_{2^n} > \frac{1}{10}(n+1)\frac{1}{2} \to \infty$, ha $n \to \infty$. A sor tehát divergens, és összege ∞.

A példa tanulságos, mert a sor annak ellenére divergens, hogy $\lim a_n = \lim \frac{1}{10n} = 0$, vagyis a konvergencia szükséges feltétele teljesül.

A konvergenciakritériumok alkalmazásával vizsgáljuk meg, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek-e.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$;

Megoldás. $a_n = \frac{n+1}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}}$. A hányadoskritériumot alkalmazva,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

tehát a sor konvergens.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

Megoldás. A hányadoskritériumot alkalmazva,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

tehát ezzel a kritériummal nem dönthető el, hogy a sor konvergens-e vagy nem. Ugyanerre az eredményre jutunk a gyökkritérium alkalmazásával is.

Próbálkozzunk az integrálkritériummal. Mivel $a_n = \frac{1}{n}$, ezért $f(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln b - \ln 1\right] = +\infty,$$

tehát a sor divergens. Ezt a sort **harmonikus sornak** nevezzük.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}8^n$;

Megoldás. Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0{,}8^n} = \lim_{n\to\infty} 0{,}8 = 0{,}8 < 1.$$

tehát a sor konvergens.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$;

Megoldás. A sor váltakozó előjelű, és $\frac{1}{n}$ monoton módon tart nullához. Ezért a Leibniz kritérium értelmében a sor konvergens.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$;

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálkritériumot. Mivel $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, ezért $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, és

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^{\infty} = \infty,$$

tehát a sor divergens.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

Megoldás. Alkalmazzuk az összehasonlító kritériumot. Hasonlítsuk össze a sort a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sorral l. (**4.** mintapéldát).

Mivel $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, és a harmonikus sor divergens, ezért a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor is divergens (a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor a harmonikus sor majoránsa!).

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+100}$;

Megoldás. Itt $a_n = \frac{n+1}{2n+100}$ és így $\lim a_n = \frac{1}{2} \neq 0$, vagyis nem teljesül a konvergencia $\lim a_n = 0$ szükséges feltétele. A sor tehát divergens.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

Megoldás. Alkalmazzuk a gyökkritérimot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

tehát a sor konvergens.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$.

Megoldás. $\sum \frac{\cos n\pi}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$. Ez a sor alternáló és $|a_n| = \frac{1}{n}$, amely monoton módon tart nullához, ha $n \to \infty$ (l. a **6.** mintapéldát). Ezért a Leibniz-kritérium értelmében a sor konvergens.

Állapítsuk meg, hogy az alábbi két végtelen sor abszolút konvergens-e:

---

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$;

Megoldás. A sor a Leibniz-kritérium értelmében konvergens (l. a **6.** mintapéldát). Mivel $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, ezért $|a_n| = \frac{1}{n}$. A $\sum \frac{1}{n}$ sor viszont divergens (harmonikus sor). A sor tehát konvergens, de nem abszolút konvergens, vagyis feltételesen konvergens.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$.

Megoldás. $a_n = \frac{n}{(-2)^n} = \frac{n}{(-1)^n 2^n} = (-1)^n \frac{n}{2^n}$, ezért $|a_n| = \frac{n}{2^n}$.

A $\sum \frac{n}{2^n}$ végtelen sor konvergens. Ugyanis a hányadoskritérium szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

A sor tehát abszolút konvergens.

Számítsuk ki az alábbi végtelen sorok összegét:

---

14. $\sum_{n=0}^{1} 0{,}8^n$;

Megoldás. A sor olyan mértani sor, amelynél $a = 1$, $q = 0{,}8$ (l. az **1.** mintapéldát). Ennek összege:

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-0{,}8} = \frac{1}{0{,}2} = 5.$$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

Megoldás. Itt a részletösszegek sorozatának határértékét próbáljuk kiszámítani. Felhasználjuk azt, hogy

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Ennek határértéke a sor összege:

$$s = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[(-0,5)^n+\frac{1}{n^2-1)}\right].$

Megoldás. A (10) alapján

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-0,5)^n+\frac{1}{n^2-1}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}(-0,5)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}.$$

Az első sor olyan mértani sor, melynek első tagja $a=(-0,5)^2=0,25$. Így a sor összege $\frac{0,25}{1-(-0,5)}=\frac{1}{6}$.

A második sor általános tagja felírható az alábbi módon:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Így az n-edik részletösszeg (l. az előző mintapéldát):

$$s_n = \frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{(n+1)^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

.

Ennek határértéke a sor összege, azaz

$$s = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Az eredeti sor összege tehát: $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{11}{12}$.

17. Számítsuk ki a $0,1-\frac{0,1^3}{3!}+\frac{0,1^5}{5!}-\frac{0,1^7}{7!}+\ldots$ végtelen sor összegének közelítő értékét a sor első három tagjának összegezésével, majd becsüljük meg a közelítés hibáját.

Megoldás. Előbb célszerű a közelítés hibáját megbecsülni. Mivel a sor váltakozó előjelű, ezért a hiba abszolút értéke kisebb mint a negyedik tag abszolút értéke, azaz

.

$$|R_4| < \left| -\frac{0{,}1^7}{7!} \right| \approx 2 \cdot 10^{-11}$$

Ebből látszik, hogy az első három tag összege 10 tizedesjegy pontossággal adja a sor összegét. Ezért az összeadandókat célszerű legalább 11 tizedesjegy pontossággal számítani. Így az első három tag összege 10 tizedesjegyre kerekítve: 0,099 833 4167. Ez egyúttal a sor összegének egy közelítő értéke. Megjegyezzük, hogy ez $\sin 0{,}1$ közelítő értéke.

18. Legalább hány tagot kell összeadni az

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

végtelen sor elejéről, hogy ezek összege öttizedes pontossággal közelítse a sor összegét.

Megoldás. Az öttizedes pontosság azt jelenti, hogy az R_n maradéktag kisebb mint $5 \cdot 10^{-6}$. Ha az első n tagot adjuk össze, akkor tehát teljesülnie kell az

$$|R_n| = \left| \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots \right| < 5 \cdot 10^{-6}$$

egyenlőtlenségnek. A bal oldalon álló összeg becsülhető a következőképpen:

$$|R_n| = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots \right) <$$

$$< \frac{1}{(n+2)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots \right] = \frac{1}{(n+1)(n+1)!}.$$

Itt kihasználtuk azt, hogy a szögletes zárójelen belül egy mértani sor van. Végeredményben az

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-6}$$

egyenlőtlenséghez jutottunk. Innen (próbálkozással) $n \geq 8$, tehát legalább 8 tagot kell összeadni.

3. Feladatok

A részletösszegek sorozatát felhasználva igazolja, hogy az alábbi sorok konvergensek, majd számítsa ki a sorok összegét:

1. $1 - 0{,}9 + 0{,}9^2 - 0{,}9^3 + \ldots + (-1)^n 0{,}9^n + \ldots;$

2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots;$

3. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \ldots;$

4. $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$.

Vizsgálja meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorok:

5. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots;$

6. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots+\sqrt[n]{0{,}001}+\ldots$;

7. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$;

8. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{1000+n}+\ldots$;

9. $\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\ldots+\frac{1}{1000n}+\ldots$;

10. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$;

11. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$;

12. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$;

13. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$.

A hányadoskritérium segítségével vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e:

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$; **15.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$; **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n}$.

A gyökkritérium segítségével vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e:

20. $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}999^n$; **21.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1{,}4^n}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-5}{4n+9}\right)^n$.

Az összehasonlító kritérium segítségével vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e:

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$; **25.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; **26**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 1{,}4^n}$.

Az integrálkritérium segítségével vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e:

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; **28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+n^2}$; **29.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$;

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$; **31.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; **32.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1200+n^3}$.

A Leibniz-kritérium segítségével vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e:

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$; **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n+1}$; **35.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+2}$.

Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok közül melyek abszolút konvergensek:

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$; **37.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$; **38.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$, $p > 0$.

Számítsa ki a következő sorok összegét:

39. $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}99^n$; **40.** $\sum_{n=0}^{\infty} (0{,}5^n + (-0{,}5^n))$; **41.** $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + (-0{,}01)^n\right)$; **43.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1000+n}$; **44.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{1{,}5^n}$.

Számítsa ki az alábbi sorok közelítő értékét 7 tizedes pontossággal:

45. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$; **46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$; **47.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0{,}01^n}{n}$.

Legalább hány tagot kell összeadni az alábbi sorok elejéről, hogy ezek összege öttizedes pontossággal közelítse a sor összegét:

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; **49.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$; **50.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Megoldások

1. Olyan mértani sorról van szó, ahol $a = 1$, $q = -0{,}9$.

$$s_n = 1 - 0{,}9 + 0{,}9^2 - 0{,}9^3 + \ldots + (-1)^n \cdot 0{,}9^{n-1} = \frac{0{,}9^n - 1}{-0{,}9 - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 0{,}9^n}{1{,}9} = \frac{1}{1{,}9} = \frac{10}{19}.$$

Mivel ez a határérték véges, ezért a sor konvergens, és öszege $\frac{10}{19}$.

2. Az n –edik részletösszeget írjuk fel a következőképpen:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{n}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \qquad \left(= 1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \qquad \left(= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+ \quad \left(=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2^4}+ \qquad\qquad \left(=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right)$$

$$\ddots$$

$$\frac{1}{2^n}= \quad \left(=\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2(1-0{,}5^n)-\frac{n}{2^n}\to 2$, mert $0{,}5^n\to 0$, és $\frac{n}{2^n}\to 0$, ha $n\to\infty$. Tehát a sor konvergens, és összege 2.

3. Használjuk fel azt, hogy $\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Ekkor

$$s_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right].$$

Ennek határértéke $\frac{3}{4}$, tehát a sor konvergens, és összege $\frac{3}{4}$.

4. $s_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\frac{-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}$, ha $|q|<1$. Ekkor tehát a sor konvergens, és összege $\frac{1}{1-q}$. Minden más esetben a sor divergens.

5. $s_n=1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}=\begin{cases}0, \text{ha } n \text{ páros}\\ 1, \text{ha } n \text{ páratlan.}\end{cases}$

Az (s_n) sorozatnak tehát nem létezik határértéke, ezért a sor divergens.

6. Tekintettel arra, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0{,}001}=1\neq 0$, vagyis a konvergencia szükséges feltétele nincs meg, ezért a sor divergens.

7. $s_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}=$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

A zárójelben lévő összeg határértéke ∞, így a sor divergens (l. a **2.** mintapéldát).

8. $s_n = \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \ldots + \frac{1}{1000+n} > \frac{1}{1000}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

A zárójelben lévő összeg határértéke ∞, így a sor divergens.

9. $s_n = \frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \ldots + \frac{1}{1000n} = \frac{1}{1000}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

A zárójelben lévő összeg határértéke ∞, így a sor divergens.

10. $s_n = \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \ldots + \frac{1}{1000n+1} > \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$.

A zárójelben lévő összeg határértéke ∞, így a sor divergens.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$, ezért a sor divergens.

12. A **15.** mintapéldában kimutattuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ sor konvergens. De ekkor konvergens a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ sor is, mert $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$.

13. A sor minden egyes tagja az előző sornak is tagja. Mivel az előző sor konvergens (és pozitív tagú) ezért ez a sor is konvergens.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} < 1$, tehát a sor konvergens.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, ezzel a kritériummal nem dönthető el az, hogy a sor konvergens-e vagy nem.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1$, tehát a sor divergens.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$, tehát a sor konvergens.

18. , tehát a sor konvergens.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0<1$$

19. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{100(n+1)}}{\frac{1}{100n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, tehát ez alapján nem lehet dönteni.

20. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0{,}999^n}=\lim_{n\to\infty}0{,}999=0{,}999<1$, tehát a sor konvergens.

21. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1{,}4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1{,}4}=\frac{1}{1{,}4}<1$, tehát a sor konvergens.

22. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, tehát ez alapján nem lehet dönteni. Itt kihasználtuk, hogy $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

23. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-5}{4n+9}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{4n+9}=\frac{3}{4}<1$, tehát a sor konvergens.

24. Tudjuk, hogy a $\sum\frac{1}{n}=\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sor divergens.

A $\sum\frac{1}{\ln^2 n}=\sum\left(\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{\ln n}\right)$ ennek majoráns sora, mert $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\sqrt{n}}$. Így a sor divergens. A $\sqrt{n}>\ln n$ reláció például $n=4$ esetén már teljesül. Ha figyelembe vesszük, hogy $(\ln x)'<(\sqrt{x})'$, ha $x\geq 4$, akkor a $\sqrt{n}>\ln n$ reláció nyilvánvaló.

25. A $\sum\frac{1}{n^2}$ sor konvergens, és $\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n^2+1}$, tehát a sor konvergens.

26. A $\sum\frac{1}{1{,}4^n}$ mértani sor konvergens, mert $|q|=\frac{1}{1{,}4}<1$. Mivel pedig $\frac{1}{n\cdot 1{,}4^n}<\frac{1}{1{,}4^n}$, ezért a sor konvergens.

27. $a_n=\frac{1}{n^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}$.

$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right]=1<\infty$, tehát a sor konvergens.

28. $a_n=\frac{1}{4+n^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4+x^2}$.

$\int_1^\infty\frac{1}{4+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_1^\infty=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\infty$, tehát a sor konvergens.

29. $a_n = \frac{1}{n\ln n} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx = \int_2^\infty \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \left[\ln\left|\ln x\right|\right]_2^\infty = \infty$, tehát a sor divergens.

30. $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^\infty = \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^\infty = \ln 2 < \infty$, tehát a sor konvergens.

31. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^\infty = \infty$, tehát a sor divergens.

32. $a_n = \frac{n^2}{1200+n^3} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{1200+x^3}$.

$\int_1^\infty \frac{x^2}{1200+x^3}dx = \frac{1}{3}\left[\ln(1200+x^3)\right]_1^\infty = \infty$, tehát a sor divergens.

33. A sor váltakozó előjelű és $a_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$, $\left|a_n\right| = \frac{1}{3n+1}$ monoton módon tart nullához, ha $n \to \infty$. Ezért a sor konvergems.

34. A sor váltakozó előjelű ugyan, de

$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1} = 2 \neq 0$, tehát a sor divergens.

35. A sor váltakozó előjelű és $\left|a_n\right| = \frac{1}{n+2}$. Ez monoton módon tart nullához, ha $n \to \infty$. Ezért a sor konvergens.

36. $\left|a_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2}$, és a $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ sor konvergens, tehát a sor abszolút konvergens.

37. $\left|a_n\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, és a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens, tehát az eredeti sor konvergens, de nem abszolút konvergens (feltételesen konvergens).

38. $\left|a_n\right| = \frac{1}{n+p}$, és a $\sum \frac{1}{n+p}$ sor divergens. Az eredeti sor tehát feltételesen konvergens.

39. $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}99^n = \frac{1}{1-0{,}99} = 100$.

40. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(0{,}5^n+(-0{,}5)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}0{,}5^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-0{,}5)^n=\frac{1}{1-0{,}5}+\frac{1}{1+0{,}5}=\frac{8}{3}.$

41. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}=1+e^{-1}+e^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}.$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+(-0{,}01)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}(-0{,}01)^n=1+\frac{-0{,}01}{1+0{,}01}=\frac{1}{1{,}01}.$

43. A sor pozitív tagú divergens, összege végtelen.

44. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{1{,}5^n}=1-\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{1{,}5^2}-\frac{1}{1{,}5^3}+\ldots=\frac{1}{1+1/1{,}5}=\frac{3}{5}.$

45. A 7 tizedes pontosság azt jelenti, hogy a közelítés hibája, $R_n<5\cdot10^{-8}$. Mivel a sor alternáló, ezért $\left|R_n\right|=\frac{1}{n!}<5\cdot10^{-8}$. Innen próbálkozással azt kapjuk, hogy legalább 11 tagot kell összeadni a sorból. A sor összegének közelítő értéke: 0,3678794.

46. Itt $R_n=\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n+3)!}+\frac{1}{(2n+5)!}+\ldots=$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}\left[1+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{1}{(2n+1)!}\left[1+\frac{1}{(2n+2)^2}+\frac{1}{(2n+2)^4}+\ldots\right]=\frac{1}{(2n+1)!}\frac{(2n+2)^2}{(2n+2)^2-1}\approx\frac{1}{(2n+1)!}$$

Az $\frac{1}{(2n+1)!}<5\cdot10^{-8}$ egyenlőtlenségből az $n\geq5$ értéket kapjuk. Tehát legalább 5 tagot kell összeadni. A közelítő érték: 0,841 4710.

47. Az $R_n=\frac{0{,}01^{n+1}}{n+1}+\frac{0{,}01^{n+2}}{n+2}+\frac{0{,}01^{n+3}}{n+3}+\ldots$ maradéktagot a

$\frac{0{,}01^{n+1}}{n+1}$ (1 + 0,01 + $0{,}01^2$ + ...) mértani sorral majorálva, a $\frac{0{,}01^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1-0{,}01}<5\cdot10^{-8}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Innen $n\geq4$, vagyis elegendő az első négy tagot összeadni. Az összeg közelítő értéke: 0,0100503.

48. Az $R_n<5\cdot10^{-6}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel a sor váltakozó előjelű, ezért $\left|R_n\right|=\frac{1}{n^2}<5\cdot10^{-6}$. Innen azt kapjuk, hogy legalább 448 tagot kell összeadni.

49. L. a **46.** feladatot. Legalább 4 tagot kell összeadni.

50. Itt $\left|R_n\right|=\frac{1}{n}$, tehát teljesülnie kell az $\frac{1}{n}<5\cdot10^{-6}$. Innen $n>\frac{106}{5}=200\,000$. Tehát legalább 200 001 tagot kell összeadni.