Kovács Béla,

Matematika II.

4

Új Magyarország FEJLESZTÉSI TERV

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

IV. Hatványsorok

1. Elméleti alapösszefüggések

Az olyan végtelen sort, amelynek tagjai függvények, **függvénysornak** nevezzük. Ha a tagok hatványfüggvények, akkor a sor neve **hatványsor**. Általános alakja

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad (1)$$

vagy

$$c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots + c_n (x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \qquad (2)$$

A (1) hatványsor **konvergenciatartománya** egy $2r$ hosszúságú intervallum, melynek középpontja a 0 pont (r lehet 0 vagy ∞ is). A hatványsor $|x| < r$ esetén abszolút konvergens, $|x| > r$ esetén divergens, míg $x = r$ esetén lehet konvergens vagy divergens. r neve **konvergenciasugár**, és

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad \text{vagy} \quad r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}. \qquad (3), (4)$$

A (2) hatványsor konvergenciaintervallumának középpontja az a pont.

A konvergens hatványsor összege egy függvény, amely a konvergenciatartományon van értelmezve. Ha ez a függvény s, akkor írható, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = s(x), \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = s(x).$$

Az s **összegfüggvény** a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható, és deriváltja a sor tagonkénti deriválásával nyerhető. Hasonló mondható az összegfüggvény integrálásáról is.

Ha az f függvény az $x = a$ hely környezetében akárhányszor differenciálható, akkor az

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (5)$$

hatványsort az f függvény $x = a$ helyhez tartozó **Taylor-sorának** nevezzük.

Ha $a = 0$, akkor a Taylor-sor alakja

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (6)$$

amely az f függvény **Maclaurin-sora**.

A Taylor-sor összegfüggvénye, a gyakorlati esetek többségében, maga az f függvény.

Ekkor írható, hogy

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots = f(x), \qquad (7)$$

ahol x a sor konvergenciaintervallumának pontja.

Ha $f(x)$ -et a sor n -edik részletösszegével közelítjük, jelölje ezt $T_n(x)$, akkor

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad (8)$$

ahol $R_n(x)$ az **n-edik maradéktag**, melynek **Lagrange-féle alakja**:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (9)$$

és ξ az x és a érték között van.

A függvény (7) alakú előállítását a függvény sorbafejtésének mondjuk.

2. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ○ nem láthatók

1. Az $a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots$ hatványsor egy mértani sor, melynek konvergenciasugara a (3) szerint:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a}{a}\right| = 1.$$

Tehát a sor a $(-1; 1)$ intervallumon konvergens. Összegfüggvénye $\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$.

Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát:

---

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

Megoldás. A (3) szerint a konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

A sor a $(-1; 1)$ intervallumon konvergens (sőt abszolút konvergens). Ha $x = 1$, akkor a sor alakja:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Ez pedig a harmonikus sor, amely divergens. Ha $x = -1$, akkor a

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

sort kapjuk. Ez a Leibniz-kritérium érelmében konvergens.

Az adott hatványsor tehát a $[-1; 1)$ intervallumon konvergens. Ez a balról zárt intervallum a konvergenciatartomány.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$;

Megoldás. A (4) szerint

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2 .$$

A sor a $(-2; 2)$ intervallumon konvergens (sőt abszolút konvergens). Ha $x = 2$, akkor az $1 + 1 + 1 + \ldots$ sort kapjuk, amely divergens. Ha $x = -2$, akkor a $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ sort kapjuk, amely szintén divergens. A konvergenciatartomány tehát a $(-2; 2)$ intervallum.

Érdemes megjegyezni, hogy ez egy olyan mértani sor, ahol $q = \frac{x}{2}$, és ez csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, azaz ha $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, vagyis ha $|x| < 2$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n+1}$;

Megoldás. A konvergenciasugár a (3) szerint

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 .$$

Mivel a konvergenciaintervallum középpontja az $x = 3$ pont, ezért a sor konvergens a (2; 4) intervallumon. Ha $x = 4$, akkor a sor alakja:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Ez a sor a Leibniz-kritérium értelmében konvergens. Ha $x = 2$, akkor a sor alakja:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots .$$

Ez pedig a harmonikus sor, amely divergens.

A sor konvergenciatartománya tehát a $(2; 4]$ intervallum.

5. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$.

Megoldás. Az $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ hatványsor konvergenciasugara:

.

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Ez a hatványsor tehát minden x esetén konvergens.

6. Írjuk fel az $f(x) = \ln x$ függvény $x = 1$ helyhez tartozó Taylor-sorát. Más szavakkal: fejtsük Taylor-sorba az $f(x) = \ln x$ függvényt az $x = 1$ helyen.

Megoldás. Az (5) alakú sort kell előállítani. A deriváltak:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},\quad f''(x) = -1x^{-2},\quad f'''(x) = -1(-2)x^{-3},\quad f^{(4)}(x) = -1(-2)(-3)x^{-4},\ldots$$

.

Ezek értékei az $x = 1$ helyen:

$$f'(1) = 1;\quad f''(1) = -1,\quad f'''(1) = 2!\quad f^{(4)}(1) = -3!\quad f^{(5)}(1) = 4!,\ldots\ .$$

Mivel $f(1) = \ln 1 = 0$, ezért a Taylor-sor:

$$0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\ldots\ .$$

A sor konvergenciasugara: $r = 1$, a konvergenciatartománya pedig a $(0; 2]$ intervallum. Ha x ebbe az intervallumba esik, akkor írható, hogy

$$\ln x = (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots\ .$$

7. Fejtsük Maclaurin-sorba (azaz x hatványai szerint haladó sorba) az $f(x) = \cos x$

függvényt.

Megoldás. A (6) alakú sort kell előállítani. A deriváltak:

$$f'(x) = -\sin x,\quad f''(x) = -\cos x,\quad f'''(x) = \sin x,\quad f^{(4)}(x) = \cos x, \ldots\ .$$

Ezek értékei az $x = 0$ helyen:

$$f'(0) = 0;\quad f''(0) = -1,\quad f'''(0) = 0,\quad f^{(4)}(0) = 1,\ldots\ .$$

Mivel $f(0) = \cos 0 = 1$, ezért a Maclaurin-sor:

$$1+0-\frac{1}{2!}x^2+0+\frac{1}{4!}x^4+0-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ .$$

A sor konvergenciasugara: $r = \infty$. Tehát minden x esetén

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ .$$

8. Néhány nevezetes függvény hatványsorral való előállítása:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad -\infty < x < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, -\infty < x < \infty;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots, \quad -1 < x < 1,$$ (Mértani sor);

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots,$$ $r = 1$ (Binomiális sor).

9. e^x hatványsorába x helyére $-x$ –et írva, e^{-x} hatványsorát kapjuk, azaz

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

10. e^x és e^{-x} hatványsorából kiindulva, ch$x$ hatványsora az alábbi módon állítható elő:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - 1\ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

11. Az $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$ mértani sornál $q = x^2$. Így annak összege $\frac{1}{1-x^2}$. Ebből kiindulva, formálisan x^2 helyébe $-x^2$-et írva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \ldots .$$

12. Állítsuk elő az $f(x)$ = arctg x függvény hatványsorát.

Megoldás. Tekintettel arra, hogy az előző példa alapján

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \ldots,$$

mindkét oldal integrálásával az

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots + C$$

egyenlőséget kapjuk, ahol C egy integrálási állandó. Ezt meghatározandó, írjunk mindkét oldalra x helyére nullát:

$$\operatorname{arctg} 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Tehát

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots .$$

13. Számítsuk ki $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ közelítő értékét 5 tizedes pontossággal.

Megoldás. Használjuk fel e^{-x} hatványsorát:

$$\frac{1}{\sqrt[10]{e}} = e^{-0,1} = 1 - \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} - \frac{0,1^3}{3!} + \dots .$$

Vegyük a sor első $n+1$ tagját. Ekkor a (9) maradéktag: $R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} 0,1^{n+1}$, ahol ξ értéke 0 és 0,1 között van. Használjuk az $R_n \le \frac{2}{(n+1)!} 0,1^{n+1}$ becslést. Ha ez kisebb mint $5 \cdot 10^{-6}$, akkor a közelítő érték megfelelő. Próbálkozással azt kapjuk, hogy ez $n = 4$ -re már teljesül. Tehát

$$\frac{1}{\sqrt[10]{e}} \approx 1 - \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} - \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} = 0,90484 .$$

3. Feladatok

Számítsa ki az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát, majd vizsgálja meg, hogy a sorok a konvergenciaintervallum végpontjaiban konvergensek-e.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5x^n}{n^2}$; **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{4^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$; **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$; **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$; **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x+2)^n$; **9.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n}$;

Fejtse x hatványai szerint haladó hatványsorba az alábbi függvényeket:

10. $f(x) = \frac{1}{1-0,5x}$; **11.** $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$; **12.** $f(x) = \ln(1-x)$;

13. $f(x) = \frac{x}{4-x}$; **14.** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; **15.** $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$;

16. $f(x) = \operatorname{sh} 2x$; **17.** $f(x) = \sin^2 x$; **18.** $f(x) = \sin x^2$;

19. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$; **20.** $f(x) = x^2 e^x$; **21.** $f(x) = \sqrt{1+\cos 2x}$;

22. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; **23.** $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; **24.** $f(x) = \arcsin x$.

Fejtse Taylor-sorba a következő függvényeket a megadott helyen:

25. $f(x)=\ln 2x,\ x=\frac{1}{2}$;

26. $f(x)=\operatorname{ch}x,\ x=1$;

27. $f(x)=\sin x,\ x=\frac{\pi}{2}$;

28. $f(x)=x^4+3x,\ x=2$.

Igazolja az alábbi egyenlőségeket:

29. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots=\cos 1$;

30. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$.

31. Számítsa ki $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ közelítő értékét 0,001 pontossággal.

Megoldások

1. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{5}{n^2}}{\frac{5}{(n+1)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$

Ha $x=1$, akkor a $\sum\frac{5}{n^2}$ sort kapjuk, amely konvergens. Ha $x=-1$, akkor a $\sum\frac{5(-1)^n}{n^2}$ sorhoz jutunk, amely szintén konvergens. Tehát a hatványsor a konvergencia intervallum mindkét végpontjában konvergens.

2. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{5^n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}5=5$.

A hatványsor $x=5$ -nél is és $x=-5$ -nél is divergens.

3. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{4^n}}{\frac{n+1}{4^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{n+1}=4$.

A hatványsor $x=4$ -nél is és $x=-4$ -nél is divergens.

4. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=1$.

A sor mindkét végpontban divergens. Ugyanis $x=1$ esetén az $1+2^2+3^2+4^2+\ldots$, $x=-1$ esetén pedig a $-1+2^2-3^2+4^2-5^2+\ldots$ sort kapjuk, amelyek divergensek.

5. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Ez a sor tehát minden x esetén konvergens.

6. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.

Ez a sor tehát csak $x=0$ esetén konvergens.

7. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}=\dfrac{1}{e}$.

Ha $x=\dfrac{1}{e}$, akkor a $\sum\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{e^n}$ sort kapjuk. Ennek általános tagja:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e}\right]^n\to\left(\frac{e}{e}\right)^n=1\neq 0,$$

Tehát a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül, így a sor az $x=\dfrac{1}{e}$ helyen divergens.

Hasonló a helyzet az $x=-\dfrac{1}{e}$ helyen is.

8. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^n}{n}}{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

A konvergenciaközéppont $x=-2$. Így a jobb oldali végpont $x=-\dfrac{3}{2}$. Itt a sor divergens. A bal oldali végpont $x=-\dfrac{5}{2}$. Itt a sor konvergens.

9. $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

A konvergenciaközéppont $x=4$. A konvergenciaintervallum jobb oldali végpontja $x=5$. Itt a sor divergens. A bal oldali végpont $x=3$. Itt a sor konvergens.

10. Felhasználjuk az $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$ sorfejtést (l. a **8.** mintapéldát).

$$\frac{1}{1-0{,}5x}=1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+\ldots,\quad \left|\frac{x}{2}\right|<1.$$

11. $\dfrac{x^2}{1+x}=x^2\dfrac{1}{1+x}=x^2\left[1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots\right]=$

$$=x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n+1}+\ldots,\quad |x|<1.$$

12. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots, \quad |x|<1 \cdot$

Integráljuk mindkét oldalt.

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots+C \cdot$$

Ha $x = 0$, akkor az $-\ln 1 = C$, azaz $C = 0$. Tehát

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots, \quad -1\le x<1 \cdot$$

13. $\dfrac{x}{4-x}=\dfrac{x}{4}\dfrac{1}{1-\frac{x}{4}}=\dfrac{x}{4}\left[1+\dfrac{x}{4}+\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{x}{4}\right)^{n-1}+\ldots\right], \quad \left|\dfrac{x}{4}\right|<1 \cdot$

14. $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots, \quad |x|<1 \cdot$

15. $(\operatorname{arctg} 2x)'=\dfrac{2}{1+4x^2}=2\left[1-(2x)^2+(2x)^4-(2x)^6+\ldots\right].$

Mindkét oldalt integrálva, majd az integrációs állandót meghatározva (pl. abból a feltételből, hogy arctg 0 = 0):

$$\operatorname{arctg} 2x = 2x-\frac{(2x)^3}{3}+\frac{(2x)^5}{5}-\frac{(2x)^7}{7}+\ldots \cdot$$

16. $\operatorname{sh} 2x=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{2x}{1!}+\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^3}{3!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}+\ldots-\right.$

$$\left.-1+\frac{2x}{1!}-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots\right]=2x+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+\ldots$$

17. $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}-\dfrac{(2x)^6}{6!}+\ldots\right]=$

$$=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots \cdot$$

18. Írjunk a $\sin x$ függvény sorába (l. a **8.** mintapéldát) x helyére x^2 -et:

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots \cdot$$

19. A $\ln(1-x)$ függvény sorába (l. a **12**. feladatot) írjunk x helyére $-x$ –et. Ekkor megkapjuk $\ln(1+x)$ sorát. Majd ebből a sorból vonjuk ki $\ln(1-x)$ sorát. Ekkor

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots-$$

$$-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right).$$

20. $x^2e^x = x^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)=x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots+\frac{x^{n+2}}{n!}+\ldots$.

21. $\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right).$

A binomiális sort felhasználva (l. a **8.** mintafeladatot),

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{1/2}=1+\binom{1/2}{1}x^2+\binom{1/2}{2}x^4+\binom{1/2}{3}x^6+\ldots,\quad r=1.$$

23. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n+1}+\ldots,$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\ldots\ .$$

24. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-1/2}=$

$$=1-\binom{-1/2}{1}x^2+\binom{-1/2}{2}x^4-\binom{-1/2}{3}x^6+\ldots\ .$$

Integráljuk mind a két oldalt:

$$\arcsin x=x-\binom{-1/2}{1}\frac{x^3}{3}+\binom{-1/2}{2}\frac{x^5}{5}-\binom{-1/2}{3}\frac{x^7}{7}+\ldots\ .$$

Itt figyelembe vettük, hogy $\arcsin 0 = 0$.

25. $f(x)=\ln 2x$, $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 1=0$, $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$, $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=2$,

$f''(x)=-x^{-2}$, $\quad f''\left(\frac{1}{2}\right)=-4$, $\quad f'''(x)=2!\,x^{-3}$, $\quad f'''\left(\frac{1}{2}\right)=8\cdot 2!$,

$f^{(4)}(x)=-3!\,x^{-4}$, $f'''\left(\frac{1}{2}\right)=-16\cdot 3!$, $f^{(5)}(x)=4!\,x^{-5}$, $f^{(5)}\left(\frac{1}{2}\right)=32\cdot 4!$.

Mindezeket felhasználva:

$$\ln 2x=\frac{2}{1!}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{16}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{32}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)^5+$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n+\ldots,\quad 0<x<1.$$

26. $f(x)=\mathrm{ch}x$, $\quad f'(x)=\mathrm{sh}x$, $\quad f''(x)=\mathrm{ch}x,\ldots;$

$f(1) = \mathrm{ch}1$, $\quad f'(1) = \mathrm{sh}1$, $\quad f''(1) = \mathrm{ch}1, \ldots$;

$$\mathrm{ch}x = \mathrm{ch}1 + \frac{\mathrm{sh}1}{1!}(x-1) + \frac{\mathrm{ch}1}{2!}(x-1)^2 + \frac{\mathrm{sh}1}{3!}(x-1)^3 + \frac{\mathrm{ch}1}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

27. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$;

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ldots;$$

$$\sin x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \ldots$$

28. $f(x) = x^4 + 3x$, $\quad f'(x) = 4x^3 + 3$, $\quad f''(x) = 12x^2$, $\quad f'''(x) = 24x$,

$f^{(4)}(x) = 24$, $\quad f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \ldots = 0$; $\quad f(2) = 22$, $\quad f'(2) = 35$,

$f''(2) = 48$, $\quad f'''(2) = 48$, $\quad f^{(4)}(2) = 24$, $\quad f^{(5)}(2) = f^{(6)}(2) = \ldots = 0$.

$$x^4 + 3x = 22 + \frac{35}{1!}(x-2) + \frac{48}{2!}(x-2)^2 + \frac{48}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4.$$

29. $\cos x$ hatványsorába (l. a **8.** mintapéldát) írjunk x helyére 1 -et.

30. $\mathrm{arctg}x$ hatványsorába (l. a **12.** mintapéldát) írjunk x helyére 1 -et.

31. e^{-x^2} helyére írjuk be annak hatványsorát, majd integráljunk tagonként:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots\right]dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \ldots \approx 0{,}747.$$

Elegendő a sor első 5 tagját összeadni.