KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA II.

6

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

VI. TÉRGÖRBÉK

1. ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEK

A térgörbe

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad t_0 \le t \le T \qquad (1)$$

alakú egyenletével írható le. Ez a vektoregyenlet egyenértékű az

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t) \qquad (2)$$

skaláris egyenletrendszerrel.

A térgörbe három nevezetes egységvektora:

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \qquad \text{(érintő egységvektor)}, \qquad (3)$$

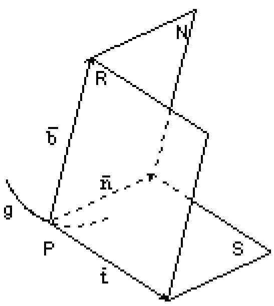
$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} \qquad \text{(binormális egységvektor)}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \qquad \text{(főnormális egységvektor)}. \qquad (5)$$

E három egységvektor a térgörbe **kísérőtriéderét** alkotja, páronként merőlegesek egymásra, és

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}, \qquad \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{n}. \qquad (6)$$

A térgörbe kísérő triéderének három nevezetes síkja: (l. a 4.7. ábrát):



4.7. ábra

simulósík (normálvektora **b**);

normálsík (normálvektora **t**),

rektifikáló sík (normálvektora **n**).

A térgörbe $a \le t \le b$ intervallumhoz tartozó ívhossza:

$$s = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \qquad (7)$$

A térgörbe g **görbülete**, ill. **torziója**:

$$g=\frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \quad \text{ill.} \quad c=\frac{\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2}. \tag{8}$$

Ha $\mathbf{r}(t)$ egy pontmozgást ír le a t idő függvényében, akkor a mozgó pont **v** **sebességvektora**, ill. a **gyorsulásvektora**:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}(t)=(\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\dot{z}(t)), \quad \text{ill.} \tag{9}$$

$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}(t)=(\ddot{x}(t),\ \ddot{y}(t),\ \ddot{z}(t)). \tag{10}$$

Ha $v=|\mathbf{v}|$, akkor a gyorsulásvektor felírható

$$\mathbf{a}=\dot{v}\mathbf{t}+v\dot{\mathbf{t}}=(\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{t})\mathbf{t}+(\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{n})\mathbf{n}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_n \tag{11}$$

alakban, ahol $\mathbf{a}_t$ a gyorsulásvektor érintőirányú, $\mathbf{a}_n$ pedig főnormális irányú összetevője.

2. Mintapéldák

Megoldások: ⊙ láthatók ○ nem láthatók

1. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{r}=(t,t-t^2,1-t^2)$ görbe síkgörbe.

Megoldás. A görbe skaláris egyenletrendszere:

$x=t$, $y=t-t^2$, $z=1-t^2$.

A harmadik egyenletből $t^2=1-z$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe (t^2 helyére), $y=t-1+z$. De az első egyenlet szerint $t=x$, így $y=x+z-1$, azaz $x-y+z-1=0$. A görbe pontjainak koordinátái tehát kielégítik ezt az egyenletet, amely egy sík egyenlete.

2. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{r}=(2\cos t\sin t,\ 2\sin^2 t,\ 2\cos t)$ térgörbe rajta van egy origó középpontú gömbfelületen.

Megoldás. Ha a görbe egy ilyen gömbfelületen van, akkor pontjainak koordinátái kielégítik az $x^2+y^2+z^2=a^2$ egyenletet. Mivel $x=2\cos t\sin t$, $y=2\sin^2 t$, $z=2\cos t$, ezért

$$x^2+y^2+z^2=4\cos^2 t\sin^2 t+4\sin^4 t+4\cos^2 t=4\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)+$$

$$+4\cos^2 t=4\sin^2 t+4\cos^2 t=4(\sin^2 t+\cos^2 t)=4.$$

Tehát a görbe rajta van az $x^2+y^2+z^2=4$ gömbfelületen.

3. Írjuk fel az $\mathbf{r}=(2t^2-1,3t,\ t^3+1)$ térgörbe $t=1$ paraméterhez tartozó pontjában

a) a kísérő triéder egységvektorait;

b) az érintő, normális és binormális egyenesek egyenletét;

c) a simulósík, a normálsík és a rektifikáló sík egyenletét;

d) a görbületét és a torzióját.

Megoldás. A (3) - (8) képleteket áttekintve látható, hogy szükség van az $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}$ deriváltakra és ezek szorzataira.

$\dot{\mathbf{r}} = (4t, 3, 3t^2)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (4;0;6t)$, $\dddot{\mathbf{r}} = (0;0;6)$,

$\mathbf{r}(1) = (1;3;2) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(1) = (4;3;3)$, $\ddot{\mathbf{r}}(1) = (4;0;6)$, $\dddot{\mathbf{r}}(1) = (0;0;6)$.

A vektorális szorzat és a vegyes szorzat a $t = 1$ helyen:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (18; -12; -12), \quad |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{612} = 6\sqrt{17},$$

$$\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\dddot{\mathbf{r}} = 0 - 0 - 72 = -72.$$

a) A kísérő triéder egységvektorai a (3), (4), és (5) képletek szerint:

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{34}}(4;3;3), \text{ mert } |\dot{\mathbf{r}}(1)| = \sqrt{34},$$

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} = \frac{1}{6\sqrt{17}}(18; -12; -12) = \frac{1}{\sqrt{17}}(3; -2; -2),$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{34}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0; -1; 1).$$

b) Az érintő, normális és binormális egyeneseknél felhasználjuk azt, hogy az egyenes vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}$.

Az érintőegyenes egyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \dot{\mathbf{r}}(1) = (1;3;2) + \lambda(4;3;3)$;

A normális egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sqrt{2}\lambda \mathbf{n} = (1;3;2) + \lambda(0; -1; 1)$;

A binormális egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sqrt{17}\lambda \mathbf{b} = (1;3;2) + \lambda(3; -2; -2)$.

Megjegyezzük, hogy a normális és binormális egyeneseknél praktikussági okból szerepel λ helyett $\sqrt{2}\lambda$, ill. $\sqrt{17}\lambda$. Ugyanis ez nem változtat az egyenesek irányán.

c) Emlékeztetünk arra, hogy a sík egyenlete: $\mathbf{r}\mathbf{m} - \mathbf{r}_0\mathbf{m} = 0$, ahol **m** a sík normálvektora.

Az S simulósík normálvektora a **b** vektor, vagy annak állandószorosa. Legyen ez most **m** = (3; -2; -2). Így a simulósík egyenlete:

S: $3x - 2y - 2z - (1;3;2)(3; -2; -2) = 0$, azaz $3x - 2y - 2z + 7 = 0$.

Az N normálsík normálvektora az érintővektor, azaz **m** = (4; 3; 3), így ennek a síknak az egyenlete:

N: $4x + 3y + 3z - (1;3;2)(4;3;3) = 0$, azaz $4x + 3y + 3z - 19 = 0$.

Az R rektifikáló sík normálvektora a főnormális vektor, vagy annak állandószorosa. Legyen az most **m** = (0; -1; 1), így ennek a síknak az egyenlete:

R: $0x - y + z - (1;3;2)(0; -1; 1) = 0$, azaz $-y + z + 1 = 0$.

A görbület, ill. a torzió a (8) képletek szerint:

$$g = \frac{6\sqrt{17}}{\sqrt{34}^3} = \frac{3}{17\sqrt{2}}, \text{ ill. } c = \frac{-72}{36 \cdot 17} = -\frac{2}{17}.$$

4. Számítsuk ki az alábbi két térgörbe ívhosszát:

a) $\mathbf{r} = \left(\frac{1}{3}t^3, t^2, 2t\right)$, $0 \le t \le 3$;

b) $\mathbf{r} = \left(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2}\right)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$.

Megoldás. Használjuk a (7) képletet:

a) $\dot{\mathbf{r}} = (t^2, 2t, 2)$, $\quad |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4} = t^2 + 2$,

$$s = \int_0^3 (t^2 + 2)dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t\right]_0^3 = 15.$$

b) $\dot{\mathbf{r}} = \left(1 - \cos t, \sin t, 2\cos\frac{t}{2}\right)$, $\quad |\dot{\mathbf{r}}|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2} =$

$$= 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4\frac{1 + \cos t}{2} = 2 - 2\cos t + 2 + 2\cos t = 4,$$

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

5. Határozzuk meg a mozgó pont sebességvektorát és gyorsulásvektorát, ha a pont mozgását az $\mathbf{r} = (2\cos^2 t,\ 2\sin 2t,\ 2\sin t)$ függvény írja le (a t paraméter az időt jelenti). Írjuk fel ezt a két vektort arra az esetre is, ha $t = \pi/4$. Írjuk fel ebben az esetben a gyorsulásvektor érintőirányú és főnormális irányú összetevőjét.

Megoldás. A **v** sebességvektor és az **a** gyorsulásvektor:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (4\cos t(-\sin t), 4\cos 2t, 2\cos t) = (-2\sin 2t, 4\cos 2t, 2\cos t),$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (-4\cos 2t, -8\sin 2t, -2\sin t);$$

$$\mathbf{v}(\pi/4) = (-2\sin(\pi/2), 4\cos(\pi/2), 2\cos(\pi/4)) = (-2; 0; \sqrt{2}) = \dot{\mathbf{r}}(\pi/4),$$

$$\mathbf{a}(\pi/4) = (-4\cos(\pi/2), -8\sin(\pi/2), -2\sin(\pi/4)) = (0; -8; -\sqrt{2}) = \ddot{\mathbf{r}}(\pi/4).$$

A $t = \pi/4$ -hez tartozó gyorsulásvektor összetevőinek számításához határozzuk meg e helyhez tartozó **t** és **n** egységvektorokat (l. a (11) képletet):

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{6}, \quad \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2; 0; \sqrt{2}),$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -8 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2(4\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 8), \quad |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{392} = 14\sqrt{2},$$

$$\mathbf{b} = \frac{2}{14\sqrt{2}}(4\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 8) = \frac{1}{7\sqrt{2}}(4\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 8),$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{1}{7\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 8 \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{7\sqrt{3}}(-1; -12; -\sqrt{2}).$$

Az érintőirányú összetevő:

$$\mathbf{a}_t = (\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{t})\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0-0-2)\frac{1}{\sqrt{6}}(-2;0;\sqrt{2}) = \frac{1}{3}(2;0;-\sqrt{2}).$$

A főnormális irányú összetevő:

$$\mathbf{a}_n = (\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{n})\mathbf{n} = \frac{1}{7\sqrt{3}}(0+96+2)\frac{1}{7\sqrt{3}}(-1;-12;-\sqrt{2}) = \frac{2}{3}(-1;-12;-\sqrt{2}).$$

Ellenőrzés: $\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = (0;-8;-\sqrt{2}) = \mathbf{a}\cdot$

6. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{r} = (e^t \sin t,\ e^t \cos t,\ e^t)$ térgörbe kísérő triéderének élei (élvektorai) állandó szöget alkotnak a koordinátarendszer z tengelyével.

Megoldás. Írjuk fel a triéder élvektorait, vagyis az $\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ vektorokat, és e két vektor vektorális szorzatát:

$$\dot{\mathbf{r}} = (e^t \sin t + e^t \cos t, e^t \cos t - e^t \sin t, e^t) = e^t(\sin t + \cos t, \cos t - \sin t, 1);$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (2e^t \cos t, -2e^t \sin t, e^t) = e^t(2\cos t, -2\sin t, 1);$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = e^{2t}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t + \cos t & \cos t - \sin t & 1 \\ 2\cos t & -2\sin t & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, -2);$$

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}} = e^{3t}(3\sin t - 3\cos t, -3\sin t - 3\cos t, 0)\cdot$$

Ez utóbbi eredményekből látszik, hogy a főnormális vektor merőleges a z tengelyre, vagyis t minden értéke mellett 90^{o} -os szöget zár be azzal. Továbbá $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{3}e^t$, tehát az érintő vektor és a z tengely által közrezárt szög koszinusza $e^t / (\sqrt{3}e^t) = 1/\sqrt{3}$, amely szintén független t -től. Hasonlóképpen látható be, hogy a binormális vektor és a z tengely által közrezárt szög koszinusza $-2e^{2t} / (\sqrt{6}e^{2t}) = -2/\sqrt{6}$ szintén független t -től.

3. Feladatok

Jellemezze az alábbi térgörbéket a koordinátasíkokra való vetületeik alapján:

1. $\mathbf{r} = \left(2\cos t, 2\sin t, \frac{1}{4\pi}t\right)$; **2.** $\mathbf{r} = (3\cos t, 4\sin t, 0)$;

3. $\mathbf{r} = (2t-5;\ t+3; -5t+4)$; **4.** $\mathbf{r} = (a\cos^2 t, a\sin t\cos t, a\sin t)\cdot$

Határozza meg az alábbi térgörbék kísérő triéderének egységvektorait, írja fel a triédert alkotó egyenesek (érintő-, normális- és binormális egyenesek) egyenletét, valamint a simulósík, normálsík és a rektifikáló sík egyenletét (a t_0 helyen):

5. $\mathbf{r} = (t^2-1;\ t+2;\ t^3-t)$, $t_0 = 1$; **6.** $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t; t)$, $t_0 = \pi/2\cdot$

Számítsa ki az alábbi térgörbék $t = t_0$ paraméterhez tartozó görbületét és torzióját:

7. $\mathbf{r} = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t_0 = 0$; **8.** $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t), t_0 = \pi/2$;

9. $\mathbf{r} = \left(1-t,\ t^2,\ 1+t\right),\quad t_0 = 2.$

Számítsa ki az alábbi térgörbék ívhosszát:

10. $\mathbf{r} = \left(t,\ \frac{2}{3}t^{3/2},\ 1-t\right),\quad 1 \le t \le 2;$ **11.** $\mathbf{r} = (3t,\ 3t^2,\ 2t^3),\quad 0 \le t \le 1;$

12. $\mathbf{r} = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t,\ e^{-t}),\quad 0 \le t < \infty.$

Írja fel az alábbi pontmozgás t_0 helyhez tartozó sebességvektorát és gyorsulás-vektorát, majd írja fel a gyorsulásvektor érintőirányú és főnormális irányú összetevőjét:

13. $\mathbf{r} = (t^2 - 1; t+2; t^3 - t),\ t_0 = 1;$

14. $\mathbf{r} = (\cos t,\ \sin t,\ t),\quad t_0 = \pi/2.$

Megoldások

1. Az (x, y) -síkra való vetületi görbe paraméteres egyenletrendszere: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Ez nem más, mint az $x^2 + y^2 = 4$ kör. A térgörbe tehát rajta van az $x^2 + y^2 = 4$ hengeren. A t szög változásával a z koordináta arányosan változik. A görbe egy csavarvonal, menetmagassága 0,5.

2. A görbe az (x, y) - síkban fekvő $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipszis.

3. Ez olyan egyenes, amely átmegy a $P_0(-5; 3; 4)$ ponton, és párhuzamos a $\mathbf{v} = (2; 1; -5)$ vektorral.

4. A görbe rajta van az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ gömbfelületen, az (x, y) -síkra való vetülete pedig az

$x = a\cos^2 t,\ \ y = a\sin t\cos t,$ azaz $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

kör. Tehát a görbe az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ gömb és az $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$ henger áthatási görbéje (Viviani-görbe, 3.180. ábra).

5. $\dot{\mathbf{r}} = (2t; 1; 3t^2 - 1),\quad \dot{\mathbf{r}}(1) = (2; 1; 2),\quad |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{9} = 3,$

$\ddot{\mathbf{r}} = (2; 0; 6t),\quad \ddot{\mathbf{r}}(1) = (2; 0; 6),$

$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = 2(3; -4; -1),\quad |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = 2\sqrt{26}.$

A triéder egységvektorai:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{3}(2; 1; 2),\quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3; -4; -1),\quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{1}{3\sqrt{26}}(-7; -8; 11).$$

A triédert alkotó egyenesek (figyelembe véve, hogy $\mathbf{r_0} = (0; 3; 0)$):

Az érintő egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = (0; 3; 0) + \lambda(2; 1; 2);$

A normális egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = (0; 3; 0) + \lambda(-7; -8; 11);$

A binormális egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = (0; 3; 0) + \lambda(3; -4; -1).$

A triéder síkjai:

A simulósík egyenlete: $3x - 4y - z + 12 = 0$;

A normálsík egyenlete: $2x + y + 2z - 3 = 0$;

A rektifikáló sík egyenlete: $-7x - 8y + 11z + 24 = 0$.

6. $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t)$, $\mathbf{r_0} = \mathbf{r}(\pi/2) = (0; 1; \pi/2)$,

$\dot{\mathbf{r}} = (-\sin t, \cos t, 1)$, $\dot{\mathbf{r}}(\pi/2) = (-1; 0; 1)$, $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{2}$,

$\ddot{\mathbf{r}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(\pi/2) = (0; -1; 0)$,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1; 0; 1), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{2}(0; -2; 0) = (0; -1; 0).$$

Az érintő egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = (0; 1; \pi/2) + \lambda(-1; 0; 1)$;

A normális egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = (0; 1; \pi/2) + \lambda(0; -2; 0)$;

A binormális egyenes egyenlete: $\mathbf{r} = (0; 1; \pi/2) + \lambda(1; 0; 1)$;

A simulósík egyenlete: $x + z - \pi/2 = 0$;

A normálsík egyenlete: $-x + z - \pi/2 = 0$;

A rektifikáló sík egyenlete: $-y + 1 = 0$.

7. $\dot{\mathbf{r}} = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$, $\ddot{\mathbf{r}} = (e^t, e^{-t}, 0)$, $\dddot{\mathbf{r}} = (e^t, -e^{-t}, 0)$,

$\dot{\mathbf{r}}(0) = (1; -1; \sqrt{2})$, $\ddot{\mathbf{r}}(0) = (1; 1; 0)$, $\dddot{\mathbf{r}}(0) = (1; -1; 0)$,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2), \quad \dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}} = -2\sqrt{2}, \quad |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{8}.$$

A (8) képleteket alkalmazva, felahsználva, hogy $|\dot{\mathbf{r}}| = 2$,

$$g = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad c = \frac{-2\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

8. Használjuk fel a **6.** feladat részeredményeit:

$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (1; 0; 1)$, $|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{2}$, $\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}} = 1$.

$$g = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}.$$

9. $\dot{\mathbf{r}} = (-1; 2t; 1)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (0; 2; 0)$, $\dddot{\mathbf{r}} = (0; 0; 0)$,

$\dot{\mathbf{r}}(2) = (-1; 4; 1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(2) = (0; 2; 0)$, $\dddot{\mathbf{r}}(2) = (0; 0; 0)$.

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (-2; 0; -2), \quad g = \frac{\sqrt{8}}{18\sqrt{18}} = \frac{1}{27}, \quad c = 0.$$

A c torzió minden pontban 0. Ez azt jelenti, hogy a görbe síkgörbe.

10. $\dot{\mathbf{r}} = (1;\, t^{1/2};\, -1)$, $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{2+t})$,

$$s = \int_1^2 \sqrt{2+t}\,dt = \frac{2}{3}\left[\sqrt{2+t}^3\right]_1^2 = \frac{2}{3}(8-3\sqrt{3}).$$

11. $\dot{\mathbf{r}} = (3;\, 6t;\, 6t^2)$, $|\dot{\mathbf{r}}| = 3\sqrt{1+4t^2+4t^4} = 3(1+2t^2)$,

$$s = \int_0^1 3(1+2t^2)\,dt = 3\left[t + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = 3\left(1+\frac{2}{3}\right) = 5.$$

12. $\dot{\mathbf{r}} = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t;\, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t;\, -e^{-t})$, $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{3}e^{-t}$,

$$s = \int_0^\infty \sqrt{3}e^{-t}\,dt = \sqrt{3}\left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \sqrt{3}.$$

Az **5.** feladat részeredményeit felhasználva,

$$\mathbf{v} = (2;\, 1;\, 2),\quad \mathbf{a} = (2;\, 0;\, 6).$$

A (11) képletet használva,

$$\mathbf{a_t} = (\ddot{\mathbf{r}}\,\mathbf{t})\mathbf{t} = \frac{1}{3}(4+12)\cdot\frac{1}{3}(2;\,1;\,2) = \frac{16}{9}(2;\,1;\,2),$$

$$\mathbf{a}_n = (\ddot{\mathbf{r}}\,\mathbf{n})\mathbf{n} = \frac{1}{3\sqrt{26}}(-14+66)\cdot\frac{1}{3\sqrt{26}}(-7;\,-8;\,11) = \frac{2}{9}(-7;\,-8;\,11).$$

A **6.** feladat részeredményeit felhsználva,

$$\mathbf{v} = (-1;\, 0;\, 1),\quad \mathbf{a} = (0;-1;\, 0),\quad \mathbf{a_t} = \mathbf{0},\quad \mathbf{a_n} = (0;\, -1;\, 0).$$